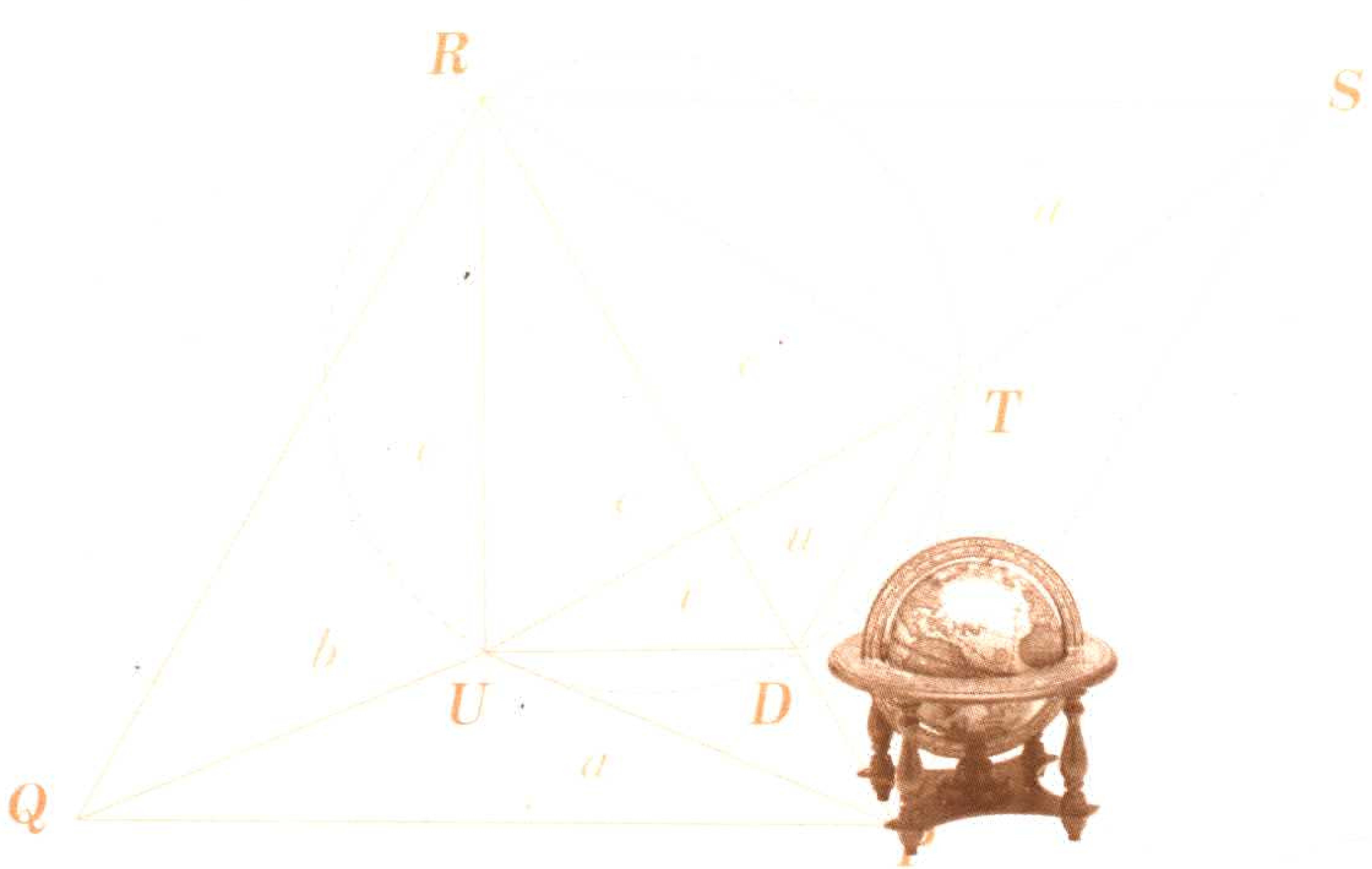
# 世界数学奥林匹克解题大辞典

中国数学奥林匹克委员会
南开大学数学系



# 序言

王元

数学奥林匹克是对青少年极其有益的一项活动.它通过科学与趣味相统一的丰富多彩的题目,使许许多多的优秀学生在中学时期就经受了考验,接受了各种现代数学思想的熏陶,使他们提高了能力,增长了知识,开阔了眼界.数学奥林匹克活动的广泛开展,不仅丰富了中学生的课外活动,促进了中学数学教学的改革,而且发现和培养了一大批有才能的青年,这些青年将成为我国科学界在下个世纪赶超世界先进水平的中坚力量.

数学竞赛中没有失败者.虽然每年参加中国数学奥林匹克的选手百余人,作为国家队出国参加国际数学奥林匹克的选手也只有六人,但是,那些因为运气不佳,培训不足,见识不广或临场发挥不理想等因素而没有获胜的学生也不是失败者.他们在参加竞赛及培训中所培养起来的求解难题的兴趣和欲望,那种永不满足,勇攀高峰的精神,分析问题的严密的逻辑思维,解决问题的灵活多样的应变能力以及对现代数学思想的理解和积累,正是进行成功的科学研究并在将来成为科学家的必要条件.因此说,这远比在一次竞赛中获胜更为宝贵.他们中的许多人进入大学后成为学习尖子,有些人正在攻读硕士和博士学位并成为数学研究队伍中的后起之秀,就是最有力的证明.即使对于那些进入大学后改学其他

专业的学生，他们也将因思维敏捷，头脑灵活，勇于创新和具有较强的数学能力而使自己终身受益．因此，数学奥林匹克必将继续下去．

数学奥林匹克已有一百多年的历史，且越来越受到重视，现在，每年举办数学奥林匹克的国家和地区已超过70个．已有的竞赛题目成千上万，其中构思独特，新颖别致、灵活深邃的题目有几千道之多，而且还在以每年几百道的速度继续增长．这些题目散载于国内外的各种书籍与杂志之中，任何个人手中的资料都很不完整，使用起来极不方便．这次河北少年儿童出版社邀请国内数学奥林匹克界的专家、教授和高级教练员共同精选了国内外数学奥林匹克的试题并给出精辟、准确的解答，编写了这套《世界数学奥林匹克解题大辞典》．这是一次很有意义的壮举．是一项艰苦而又巨大的工程，是我国数学奥林匹克事业的一项基本建设．本书的出版，必将推动我国的数学奥林匹克事业稳步地向前发展，有助于我国在国际数学奥林匹克中保持优势，立于世界数学强国之林．就此我以兴奋的心情对这套解题大辞典的出版表示热烈的祝贺，并对在此书编写过程中付出辛勤劳动的各位作者和出版过程中做出多方面努力的编辑人员及支持本书出版的各位领导表示衷心的感谢．

近10年来，我国学生在国际数学奥林匹克中不断取得好成绩，我国所提供的候选题也接连被选为试题，这是值得高兴的事情．但是，我们也应清醒地看到，与一些先进国家相比，我国开展数学奥林匹克和参加国际数学奥林匹克的时间毕竟不长，这方面的资料也不很完全．因此，这套辞典的内容也是不很完全的．此外，以后每年新出现的竞赛题目也要补充进来．希望大家继续努力，不断完善这套大辞典的内容，为数学奥林匹克事业做出新贡献．

# 目 录

# 第一章 整 除



1·1 证明对任意整数 $n$，$n^6+2n^5-n^2-2n$ 能被 120 整除.

（基辅数学奥林匹克，1935 年）

［证］

$$
\begin{aligned}
& n^6+2n^5-n^2-2n \\
&= n^5(n+2)-n(n+2) \\
&= n(n+2)(n^4-1) \\
&= n(n+2)(n-1)(n+1)(n^2+1) \\
&= n(n+2)(n-1)(n+1)(n^2-4+5) \\
&= (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) \\
&\quad +5(n-1)n(n+1)(n+2).
\end{aligned}
$$

上式的第一项为五个连续整数相乘，则必能被 $5\cdot4\cdot3\cdot2=120$ 整除，第二项中是四个连续整数的乘积的 5 倍，因而也能被 $5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$ 整除. 于是原式能被 120 整除.

1·2 证明对任意的正整数 $n$，数 $(n^3-n)\cdot(5^{8n+4}+3^{4n+2})$ 能被 3804 整除.

（第一届墨西哥数学奥林匹克，1990 年）

［证］ $3804=6\cdot634$.

（1）由于 $n^3-n=(n-1)n(n+1)$

是三个连续整数的乘积，则

$$6\mid n^3-n.$$

（2）用数学归纳法证明：对任意非负整数 $n$，$634\mid 5^{8n+4}+3^{4n+2}$.

当 $n=0$ 时，

$$5^4+3^2=625+9=634,$$

所以 $$634 \mid 5^4 + 3^2.$$

假设 $n = k$ 时,有

$$634 \mid 5^{8k+4} + 3^{4k+2}.$$

那么,当 $n = k + 1$ 时,

$$\begin{aligned}&5^{8(k+1)+4} + 3^{4(k+1)+2}\\&=(5^4)^2 \cdot 5^{8k+4} + 3^4 \cdot 3^{4k+2}\\&=(625)^2 \cdot 5^{8k+4} + 9^2 \cdot 3^{4k+2}\\&\equiv(-9)^2 \cdot 5^{8k+4} + 9^2 \cdot 3^{4k+2}\\&\equiv 0 \quad (\bmod 634).\end{aligned}$$

所以 $634 \mid 5^{8(k+1)+4} + 3^{4(k+1)+2}$.

于是对所有非负整数 $n$,

$$634 \mid 5^{8n+4} + 3^{4n+2}.$$

由(1),(2)

$$6 \cdot 634 = 3804 \mid (n^3 - n)(5^{8n+4} + 3^{4n+2}).$$

1·3 证明 $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot 1983 \cdot 1985 + 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot 1984 \cdot 1986$ 能被 1987 整除.

(加拿大数学奥林匹克训练题,1988 年)

[证] $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot 1983 \cdot 1985 + 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot 1984 \cdot 1986$

$= 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot 1983 \cdot 1985 + (1987 - 1985)(1987 - 1983)\cdots(1987 - 3)(1987 - 1)$

$= 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot 1983 \cdot 1985 + (-1985)(-1983)\cdots(-3)(-1)$ + 1987 的倍数

$= 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot 1983 \cdot 1985 \cdot [1 + (-1)^{993}]$ + 1987 的倍数

= 1987 的倍数.

即 $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot 1983 \cdot 1985 + 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot 1984 \cdot 1986$ 能被 1987 整除.

1·4 证明和数 $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot 2000 \cdot 2001 + 2002 \cdot 2003 \cdot \cdots \cdot 4001 \cdot 4002$ 能被 4003 整除.

(第 15 届全俄数学奥林匹克,1989 年)

[证] $2002 \cdot 2003 \cdot \cdots \cdot 4001 \cdot 4002$

$= (4003 - 2001)(4003 - 2000)\cdots(4003 - 2)(4003 - 1)$

$= 4003n - 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot 2000 \cdot 2001.$

从而有

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot 2000 \cdot 2001 + 2002 \cdot 2003 \cdot \cdots \cdot 4002 = 4003n.$

即所给出的和数能被 4003 整除.

1·5 从自然数数列1,2,3,4,… 中依次划去3的倍数和4的倍数,但是其中凡是 5 的倍数均保留(例如 15,20 都不划去),划完以后,再将剩下的数据依次写成数列:$A_1 = 1$, $A_2 = 2$, $A_3 = 5$, $A_4 = 7$,… 求 $A_{1988}$ 的值.

(理科实验班入学数学复试,1988 年)

[解] 先对不大于 100 的全体自然数进行估计:

在{1,2,3,…,100} 中 3 的倍数共$\left[\frac{100}{3}\right] = 33$ 个,

在{1,2,3,…,100} 中 4 的倍数共$\left[\frac{100}{4}\right] = 25$ 个,

在{1,2,3,…,100} 中 12 的倍数共$\left[\frac{100}{12}\right] = 8$ 个,

在{1,2,3,…,100} 中 15 的倍数共$\left[\frac{100}{15}\right] = 6$ 个,

在{1,2,3,…,100} 中 20 的倍数共$\left[\frac{100}{20}\right] = 5$ 个,

在{1,2,3,…,100} 中 60 的倍数共$\left[\frac{100}{60}\right] = 1$ 个,

所以,由容斥原理,划好以后剩下的数列共有数

$M_{100} = 100 - (33 + 25) + (8 + 6 + 5) - 1 = 60$(个).

这说明,前 100 个数中,经过题设的划数剩下 60 个,即保留了$\frac{3}{5}$.

因此,要保留 1988 项,至少要有 $1988 \div \frac{3}{5} \approx 3314$ 项,即至少要对 1,2,…,3315 划项才有可能得到 $A_{1988}$.

在 1,2,…,3315 中,3 的倍数为$\left[\frac{3315}{3}\right] = 1105$ 个,4 的倍数为$\left[\frac{3315}{4}\right] = 828$ 个,余类推.

$$M_{3315} = 3315 - \left(\left[\frac{3315}{3}\right] + \left[\frac{3315}{4}\right]\right) + \left(\left[\frac{3315}{3 \cdot 4}\right] + \left[\frac{3315}{3 \cdot 5}\right] + \left[\frac{3315}{4 \cdot 5}\right]\right) - \left[\frac{3315}{3 \cdot 4 \cdot 5}\right]$$

$= 1989.$

由于3315能被5整除,3314不能被3和4整除,故没有划掉,于是 $A_{1988} = 3314.$



1·6　自然数 $a,b,c,d$ 都可以被自然数 $ab - cd$ 整除,证明

$$ab - cd = 1.$$

(列宁格勒数学奥林匹克,1988年)

[证]　设 $e = ab - cd$.

由题设,则有 $a = \alpha e,\ b = \beta e,\ c = \gamma e,\ d = \delta e$,其中 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 均为自然数.

从而有

$$\begin{aligned} e &= ab - cd \\ &= \alpha\beta e^2 - \gamma\delta e^2 \\ &= (\alpha\beta - \gamma\delta)e^2. \end{aligned}$$

于是 $e^2 \mid e$,由于 $e$ 是自然数,则仅当 $e = 1$ 时才有 $e^2 \mid e$.即

$$ab - cd = 1.$$

1·7　(1)$x,y$ 均为整数,若 $5 \mid (x + 9y)$,求证 $5 \mid (8x + 7y)$.

(2)$x,y,z$ 均为整数,若 $11 \mid (7x + 2y - 5z)$.求证 $11 \mid (3x - 7y + 12z)$.

(中国北京市初中二年级数学竞赛,1987年)

[证]　(1)因为 $5 \mid (x + 9y)$,所以

$$5 \mid (2x + 18y).$$

又　$(2x + 18y) + (8x + 7y) = 10x + 25y.$

由于 $5 \mid (10x + 25y)$,所以

$$5 \mid (8x + 7y).$$

(2)因为　$4(3x - 7y + 12z) + 3(7x + 2y - 5z)$

$$\begin{aligned} &= 33x - 22y + 33z \\ &= 11(3x - 2y + 3z). \end{aligned}$$

因　$11 \mid 11(3x - 2y + 3z)$,

又由已知　$11 \mid (7x + 2y - 5z)$,

于是　$11 \mid (3x - 7y + 12z).$

1·8　证明对于同样的整数 $x$ 和 $y$,$2x + 3y$ 和 $9x + 5y$ 能同时被

17 整除.

(匈牙利数学奥林匹克,1894 年)

[证 1]　设表达式 $2x+3y$ 等于某个整数 $k$,

$$2x+3y=k \qquad ①$$

这时有

$$x=\frac{k-3y}{2}=-y+\frac{k-y}{2}. \qquad ②$$

因此,仅当 $\frac{k-y}{2}$ 等于某个整数 $s$ 时, $x$ 才能是整数,由 $\frac{k-y}{2}=s$ 可得

$$y=k-2s.$$

再由 ②,

$$x=-y+s=3s-k.$$

因此,仅当

$$x=-k+3s,\quad y=k-2s \qquad ③$$

时,整数 $x$ 和 $y$ 才能满足等式 ①,这里 $s$ 是任意整数.

反之,当 $s$ 取任意整数时,由 ③ 可得整数 $x$ 和 $y$,它们满足等式 ①.

又设

$$9x+5y=l, \qquad ④$$

其中 $l$ 为某个给定的整数,

这时同样可得

$$x=5t-l,\quad y=-9t+2l, \qquad ⑤$$

其中 $l$ 是任意整数.

若表达式 $2x+3y$ 是 17 的倍数,由 ① 和 ③ 有

$$x=-17n+3s,\ y=17n-2s.$$

其中 $s$ 为任意整数.

这时有

$$\begin{aligned}&9x+5y\\=&9(-17n+3s)+5(17n-2s)\\=&17(-4n+s),\end{aligned}$$

于是 $9x+5y$ 也是 17 的倍数.

同样,若 $9x+5y$ 是 17 的倍数,由 ④ 和 ⑤ 有

$$x=5t-17m,\quad y=-9t+34m,$$

数论卷

从而可得

$$\begin{aligned}&2x+3y\\=&2(5t-17m)+3(-9t+34m)\\=&17(-t+4m),\end{aligned}$$

于是 $2x+3y$ 也是 17 的倍数.

[证 2] 设 $u=2x+3y$, $v=9x+5y$.

当 $x$ 和 $y$ 是整数时, $u$ 和 $v$ 也是整数.

于是 $$3v-5u=17x. \qquad ①$$

当 $2x+3y$ 能被 17 整除时,即 $u$ 能被 17 整除时,由 ① 式, $3v$ 能被 17 整除,又由 3 和 17 互素,则 $v$ 能被 17 整除,即 $9x+5y$ 能被 17 整除.

当 $9x+5y$ 能被 17 整除时,即 $v$ 能被 17 整除,由 ① 式, $5u$ 能被 17 整除,又由 5 和 17 互素,则 $u$ 能被 17 整除,即 $2x+3y$ 能被 17 整除.

1·9 是否存在两个不等于 0 的整数 $a$ 和 $b$,其中之一可被它们的和整除,另一个可被它们的差整除?

(列宁格勒数学奥林匹克,1988 年)

[解] 不存在这样的两个整数.

否则,若存在两个非零整数 $a$ 和 $b$,则在 $|a+b|$ 和 $|a-b|$ 中必有一个既大于 $|a|$ 又大于 $|b|$,(若 $a$ 和 $b$ 同号,则 $|a+b|>|a|$, $|a+b|>|b|$,若 $a$ 和 $b$ 异号,则 $|a-b|>|a|$, $|a-b|>|b|$),这个既大于 $|a|$,又大于 $|b|$ 的数,不可能是 $|a|$ 的约数,也不可能是 $b$ 的约数.因此符合题意的非零整数 $a$ 和 $b$ 不存在.

1·10 $k$ 与 $n$ 为正整数,证明

$$(n^4-1)(n^3-n^2+n-1)^k+(n+1)n^{4k-1}$$

能被 $n^5+1$ 整除.

(保加利亚数学竞赛,1985 年)

[证] 对 $k$ 施用数学归纳法.

(1) 当 $k=1$ 时,

$$\begin{aligned}&(n^4-1)(n^3-n^2+n-1)+(n+1)\cdot n^3\\=&n^7-n^6+n^5+n^2-n+1\\=&(n^5+1)(n^2-n+1).\end{aligned}$$

因而能被 $n^5+1$ 整除.

(2) 假设

$$n^5+1 \mid (n^4-1)(n^3-n^2+n-1)^k+(n+1)n^{4k-1},$$

那么对 $k+1$ 时,

$$\begin{aligned}
&(n^4-1)(n^3-n^2+n-1)^{k+1}+(n+1)n^{4(k+1)-1}\\
=&(n^4-1)(n^3-n^2+n-1)^k(n^3-n^2+n-1)+(n+1)n^{4k-1}n^4\\
=&(n^4-1)(n^3-n^2+n-1)^k(n^3-n^2+n-1)+(n+1)n^{4k-1}(n^3\\
&-n^2+n-1)+(n+1)n^{4k-1}n^4-(n+1)n^{4k-1}(n^3-n^2+n-1)\\
=&[(n^4-1)(n^3-n^2+n-1)^k+(n+1)n^{4k-1}](n^3-n^2+n-1)+\\
&(n+1)n^{4k-1}(n^4-n^3+n^2-n+1)\\
=&[(n^4-1)(n^3-n^2+n-1)^k+(n+1)n^{4k-1}](n^3-n^2+n-1)+\\
&(n^5+1)n^{4k-1}.
\end{aligned}$$

由归纳假设,第一项能被 $n^5+1$ 整除,而第二项显然能被 $n^5+1$ 整除,于是

$$n^5+1 \mid (n^4-1)(n^3-n^2+n-1)^{k+1}+(n+1)n^{4(k+1)-1}.$$

即对 $k+1$ 命题成立.

于是对所有自然数 $k$,命题成立.

**1·11** 证明对每个整数 $x$, $x^2+5x+16$ 不能被 169 整除.

(意大利数学竞赛,1990 年)

**[证]** 假定存在整数 $x$,使得

$$169 \mid x^2+5x+16,$$

即

$$169 \mid (x-4)^2+13x. \qquad ①$$

因为 $13 \mid 13x$,所以

$$13 \mid (x-4)^2.$$

因为 13 是素数,所以

$$13 \mid (x-4), \qquad ②$$

于是

$$169 \mid (x-4)^2.$$

由 ① 式有

$$169 \mid 13x,$$

从而

$$13 \mid x. \qquad ③$$

② 和 ③ 矛盾.

**1·12** 一串数 1, 4, 7, 10,…,697,700 的规律是:第一个数是 1,以后的每一个数等于它前面的一个数加 3,直到 700 为止.将所有这些

数相乘,试求所得数的尾部零的个数.(例如 12003000 的尾部零的个数是 3).

(中国初中数学联赛,1988 年)

[解] 首先,求出积中含有的因数 5 的个数.

数组中,10,25,40,55,…,700 均含有因数 5. 这一组数共有

$$(700-10)\div 15+1=47 \text{ 个}.$$

这就是说,每一个数各计一个 5,共 47 个 5.

但是,其中,25,100,175,…,700 还含有第二个因数 5,这些数计有

$$(700-25)\div 75+1=10 \text{ 个}.$$

因此,应该再添上 10 个 5.

类似地,250,625 还含有第三个因数 5,625 还含有第四个因数 5. 这样,积中因数 5 的个数为

$$47+10+2+1=60 \text{ 个}.$$

由于积中因数 2 的个数多于 60 个,所以积中尾部连续有 60 个零.

1·13 将自然数 $N$ 接写在每一个自然数的右面(例如,将 2 接写在 35 的右面得 352),如果得到的新数都能被 $N$ 整除,那么 $N$ 称为魔术数,在小于 130 的自然数中,魔术数的个数是多少?

(中国初中数学联赛,1986 年)

[解] 任取自然数 $P$,设 $N$ 为 $m$ 位的魔术数.

设 $N$ 接写在 $P$ 的右边的数为$\overline{PN}$,则

$$\overline{PN}=P\cdot 10^m+N.$$

由题设,若 $N$ 是魔术数,则

$$N\mid\overline{PN},$$

于是

$$N\mid P\cdot 10^m.$$

由于 $P$ 是任意自然数,于是只有

$$N\mid 10^m.$$

当 $m=1$ 时,$N=1,2,5$.

当 $m=2$ 时,$N=10,20,25,50$.

当 $m=3$,且 $N<130$ 时,$N=100,125$.

所以小于 130 的魔术数共有 9 个.

1·14 若干个整数的和能被 6 整除,证明这些数的立方和也能被 6 整除.

（基辅数学奥林匹克，1958年）

[解]　首先证明对任意整数 $a$，

$$6 \mid a^3 - a.$$

事实上，

$$a^3 - a = (a-1)a(a+1)$$

是三个连续整数之积，因此它能被 $3! = 6$ 整除.

假设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为 $n$ 个整数，且

$$6 \mid a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

$$(a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$$
$$= (a_1^3 - a_1) + (a_2^3 - a_2) + \cdots + (a_n^3 - a_n).$$

由　　$6 \mid a_i^3 - a_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n$

可得　　$6 \mid (a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n).$

因而　　$6 \mid a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3.$

1·15　基里亚国和达里亚国的货币单位分别叫基涅尔和达涅尔. 在基里亚国中，1基涅尔可以兑换10达涅尔，在达里亚国中，1达涅尔可以兑换10基涅尔，一魔术师手中原来有1达涅尔的钱，他可以自由往来于这两个国家，并可随意在两国兑换货币.

证明任何时候他手中的两种钱的数目都不相等.

（列宁格勒数学奥林匹克，1987年）

[证]　用 $(a, b)$ 表示魔术师手中有钱 $a$ 基涅尔和 $b$ 达涅尔.

由题意知，如果魔术师在一国内用 $c$ 个该国货币兑换另一国货币，那么他手中的两国货币的总数就由 $a + b$ 增加到 $a + b + 9c$，两种货币之差就由 $b - a$ 改变为 $b - a \pm 11c$. 反之，如果他在一国用 $c$ 个（$c$ 为10的倍数）另一国货币兑换该国货币，那么他手中的两国货币总数就由 $a + b$ 减少为 $a + b - \frac{9}{10}c$，而两种货币之差就由 $b - a$ 改变为 $b - a \pm \frac{11}{10}c$.

因此，如果魔术师能够由 $(a_1, b_1)$ 变为 $(a_2, b_2)$，那么也可以由 $(a_2, b_2)$ 变回为 $(a_1, b_1)$.

由于开始时，魔术师手中的钱数为 $(0,1)$，如果要变为 $(k,k)$（$k \neq 0$），那么其中必有一次为在某国用该国货币兑换另一国货币.

我们考察反过来将 $(k,k)$ 变回为 $(0,1)$ 的过程，那么其中至少有一次为在某国用另一国货币兑换该国货币. 于是，在这种由 $(k,k)$ 变回为

(0,1) 的过程中,两种货币之差累计应为

$$k-k+\left(\pm\frac{11}{10^{a_1}}c_1\pm\frac{11}{10^{a_2}}c_2\pm\cdots\pm\frac{11}{10^{a_n}}c_n\right)=1.$$

其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为 0 或 1,并且不全为 0.

从而上式化为

$$11(\pm 10^{a_1-1}c_1\pm 10^{a_2-1}c_2\pm\cdots\pm 10^{a_n-1}c_n)=10.$$

由于此式右端为正整数,则此式左端的括号内也应为正整数,记为 $m$,即有

$$11m=10$$

但这是不可能的.

所以任何时候魔术师手中的两种货币都不可能相等.

1·16　设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是自然数,它们的和能被 30 整除.证明

$$a_1^5+a_2^5+\cdots+a_n^5$$

能被 30 整除.

(基辅数学奥林匹克,1973 年)

[证]　首先证明　$30\mid a^5-a$.由于

$$\begin{aligned}&a^5-a\\&=a(a^2-1)(a^2+1)\\&=(a-1)a(a+1)(a^2-4+5)\\&=(a-2)(a-1)a(a+1)(a+2)+5(a-1)a(a+1).\end{aligned}$$

$a-2$, $a-1$, $a$, $a+1$, $a+2$ 是连续五个整数,它们的乘积能被 $5!=120$ 整除,因而能被 30 整除.

$a-1$, $a$, $a+1$ 是连续三个整数,它们的乘积能被 $3!=6$ 整除,因而 $5(a-1)a(a+1)$ 能被 30 整除.

于是　　$$30\mid a^5-a.$$

从而　　$$30\mid\sum_{i=1}^{n}(a_i^5-a_i)=\sum_{i=1}^{n}a_i^5-\sum_{i=1}^{n}a_i.$$

又由已知 $30\mid\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$,所以

$$30\mid\sum_{i=1}^{n}a_i^5.$$

1·17　在小于 10000 的奇自然数 $n$ 中,是使由 $n^9$ 的后 4 个数码组

成的数大于 $n$ 的奇数 $n$ 多,还是使由 $n^9$ 的后 4 个数码组成的数小于 $n$ 的奇数 $n$ 多?

(第 55 届莫斯科数学奥林匹克,1992 年)

[解] 一样多.

将小于 10000 的奇自然数 $n$ 分成若干组,每组两个数 $(n_1, n_2)$,且

$$n_1 + n_2 = 10000.$$

由于 $$n_1 + n_2 \mid n_1^9 + n_2^9.$$

所以 $$10000 \mid n_1^9 + n_2^9. \quad ①$$

设 $n_1^9$ 的后 4 个数码组成的数 $m_1$, $n_2^9$ 的后 4 个数码组成的数 $m_2$,则由 ① 得

$$m_1 + m_2 = 10000.$$

由此可得 $n_1 > m_1$ 等价于 $m_2 > n_2$.

因此,题中所述的四位数一样多.

1·18 证明如果 $u$ 和 $v$ 是整数,$u^2 + uv + v^2$ 能被 9 整除,那么 $u$ 和 $v$ 都能被 3 整除.

(匈牙利数学奥林匹克,1958 年)

[证] 已知表达式可化为

$$u^2 + uv + v^2 = (u - v)^2 + 3uv.$$

因为 $9 \mid u^2 + uv + v^2$, $3 \mid 3uv$,于是

$$3 \mid (u - v)^2.$$

从而 $$9 \mid (u - v)^2, \quad 3 \mid u - v.$$

于是 $$9 \mid 3uv.$$

即 $$3 \mid uv.$$

所以 $u$ 和 $v$ 至少有一个能被 3 整除.

设 $3 \mid u$,则由

$$3 \mid u - v,$$

必有 $$3 \mid v.$$

于是 $u$ 和 $v$ 都能被 3 整除.

1·19 假设 $a, b, c, d$ 是整数,且数 $ac$, $bc + ad$, $bd$ 都能被某整数 $u$ 整除.证明数 $bc$ 和 $ad$ 也都能被 $u$ 整除.

(匈牙利数学奥林匹克,1910 年)

[证 1] 由 $ac$, $bc+ad$, $bd$ 都能被 $u$ 整除,且设 $u$ 有因子 $p^r$($p$ 为素数),则有

$$ac = p^r A, \quad ①$$
$$bc + ad = p^r B, \quad ②$$
$$bd = p^r C. \quad ③$$

其中 $A,B,C$ 是整数.

①×③得

$$(bc)(ad) = p^{2r}AC.$$

因此,$bc$ 和 $ad$ 的分解式中必有一个 $p$ 的指数不小于 $r$,不妨设 $bc = p^t D$($t \geqslant r$,$D$ 是整数)

于是 $$p^r \mid bc.$$

再由②可得 $$p^r \mid ad.$$

于是 $bc$ 和 $ad$ 都能被 $p^r$ 整除,从而 $bc$ 和 $cd$ 都能被 $u$ 整除.

[证 2] 考虑到等式

$$(bc-ad)^2 = (bc+ad)^2 - 4acbd.$$

在等式两边同时除以 $u^2$ 得

$$\left(\frac{bc-ad}{u}\right)^2 = \left(\frac{bc+ad}{u}\right)^2 - 4 \cdot \frac{ac}{u} \cdot \frac{bd}{u}.$$

由于 $ac$, $bd$, $bc+ad$ 都能被 $u$ 整除,则

$$s = \frac{bc+ad}{u}, \quad p = \frac{ac}{u}, \quad q = \frac{bd}{u}$$

都是整数,即

$$\left(\frac{bc-ad}{u}\right)^2 = s^2 - 4pq.$$

于是 $\frac{bc-ad}{u}$ 也为整数,令

$$t = \frac{bc-ad}{u}.$$

于是 $$t^2 = s^2 - 4pq.$$
$$s^2 - t^2 = 4pq,$$
$$(s+t)(s-t) = 4pq.$$

由于任意两个整数的和与它们的差具有相同的奇偶性,以及由 $4pq$ 是偶数可知 $s+t$ 与 $s-t$ 必为偶数.

于是

$$\frac{bc}{u}=\frac{s+t}{2},\quad \frac{ad}{u}=\frac{s-t}{2},$$

必为整数,即 $bc$ 和 $ad$ 都能被 $u$ 整除.

1·20 假设 $a,b,c,d$ 是使方程组

$$\begin{cases}ax+by=m,\\ cx+dy=n.\end{cases}$$

对所有的整数 $m,n$ 都有整数解的整数.证明这时有

$$ad-bc=\pm 1.$$

(匈牙利数学奥林匹克,1942 年)

[证] 考虑方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc.$$

首先证明 $D\neq 0$.

如果 $D=0$,由题设,显然 $a,b,c,d$ 不可能都等于 0,不妨设 $a\neq 0$,则由

$$D=ad-bc=0,$$

得

$$\frac{c}{a}=\frac{d}{b}.$$

设 $\lambda=\frac{c}{a}$,则有 $c=\lambda a$, $d=\lambda b$.

代入方程组可得 $n=\lambda m$.

由此得出,仅当 $n=\lambda m$ 时,方程组才有整数解,这与 $m$ 和 $n$ 为任意整数相矛盾,因此必有 $D\neq 0$.

这时,对给定的 $m$ 和 $n$,原方程组有解

$$\begin{cases}x=\dfrac{md-nb}{D},\\[2ex] y=\dfrac{na-mc}{D}.\end{cases}$$

对所有的整数对$(m,n)$,它们都应该是整数.

特别地,取 $m=1$, $n=0$ 及 $m=0$, $n=1$,可以求得

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{d}{D}, \\ y_1 = -\dfrac{c}{D}. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = -\dfrac{b}{D}, \\ y_2 = \dfrac{a}{D}. \end{cases}$$

因此可得

$$x_1y_2 - y_1x_2 = \frac{ad - bc}{D^2} = \frac{1}{D}.$$

是整数,于是 $D$ 应是 1 的约数,即仅当

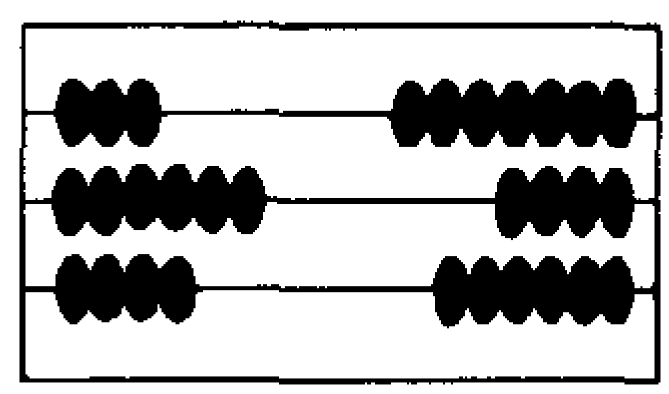
$$D = \pm 1,$$

即
$$ad - bc = \pm 1$$

时,方程组对任意整数 $m$ 和 $n$ 都有整数解

$$\begin{cases} x = \dfrac{md - nb}{D}, \\ y = \dfrac{na - mc}{D}. \end{cases}$$

1·21　儿童计数器的三个档上各有十个算珠(如图).将每档算珠分为左右两部分(不许一旁无珠).现在要左方三档中所表示的三个珠数的乘积等于右方三档中所表示的三个珠数的乘积.问有多少种分珠法.



(中国北京市高中一年级数学竞赛,1987 年)

[解]　(1) 若三档都平分为两个 5,是一种合于要求的分法.

$$5 \cdot 5 \cdot 5 = 5 \cdot 5 \cdot 5.$$

(2) 若有两档平分为(5,5),则第三档也必分为(5,5),所以仍是(1) 种的分法.

(3) 若有一档分为(5,5),而另两档不是平分.设这两档的一方为 $r$ 和 $s$($r \neq 5$, $s \neq 5$),则另一方相应为 $10 - r$, $10 - s$,这时当 $r + s = 10$,即

$$r = 10 - s, \quad s = 10 - r \text{ 时},$$

便构成合于要求的分法,因为这时

$$5 \cdot r \cdot s = 5(10 - r)(10 - s).$$

取 $r$ 的方法有 1,2,3,4,6,7,8,9 共 8 种,于是($r$,$s$) 共有 8 组,每组的 5, $r$, $s$ 排在一方,所以共有 $3 \cdot 8 = 24$ 种分珠法.

(4) 下面证明，若分珠中没有(5,5)，则题目的要求不可能实现.

设从上到下左边三档珠数依次为 $a,b,c$，依题意得

$$abc=(10-a)(10-b)(10-c)$$
$$=1000-100(a+b+c)+10(ab+bc+ca)-abc,$$
$$abc=500-50(a+b+c)+5(ab+bc+ca).$$

由于 $a,b,c\in\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，以及上式右边的每一项都是 5 的倍数，从而 $a,b,c$ 三数中至少有一个必定是 5. 因此在分珠中必有(5,5).

由以上，符合要求的分珠法共有 $24+1=25$ 种.

1·22 组装甲、乙、丙三种产品，需用 $A$、$B$、$C$ 三种零件. 每件甲需用 $A,B$ 各 2 个；每件乙需用 $B,C$ 各 1 个；每件丙需用 2 个 $A$ 和 1 个 $C$. 用库存的 $A$、$B$、$C$ 三种零件，如组装成 $p$ 件甲产品，$q$ 件乙产品和 $r$ 件丙产品，则剩下 2 个 $A$ 和 1 个 $B$，但 $C$ 恰好用完. 试证无论怎样改变产品甲、乙、丙的件数，也不能把库存的 $A$、$B$、$C$ 三种零件都恰好用完.

（中国高中数学联赛，1981 年）

［证 1］ 对 $A,B,C$ 赋值：设零件 $A$ 为 1 分，零件 $B$ 为 2 分，零件 $C$ 为 4 分. 则甲、乙、丙三种产品每件所需的零件分数之和都是 6. 库存三种零件的总分数之和应是

$$6(p+q+r)+2+2.$$

但此数不是 6 的倍数.

因此，组装成每件都为 6 分的产品，库存的零件必有剩余.

［证 2］ 组装成 $p$ 件甲产品，$q$ 件乙产品，$r$ 件丙产品共需：

零件 $A$： $2p+2r$ 件，

零件 $B$： $2p+q$ 件，

零件 $C$： $q+r$ 件.

因此，加上剩余零件后，库存零件数为：$A$ 有 $2p+2r+2$ 件，$B$ 有 $2p+q+1$ 件，$C$ 有 $q+r$ 件.

如果甲、乙、丙的件数分别改变成 $x,y,z$ 件，于是可得方程组

$$\begin{cases}2x+2z=2p+2r+2,\\ 2x+y=2p+q+1,\\ y+z=q+r.\end{cases}$$

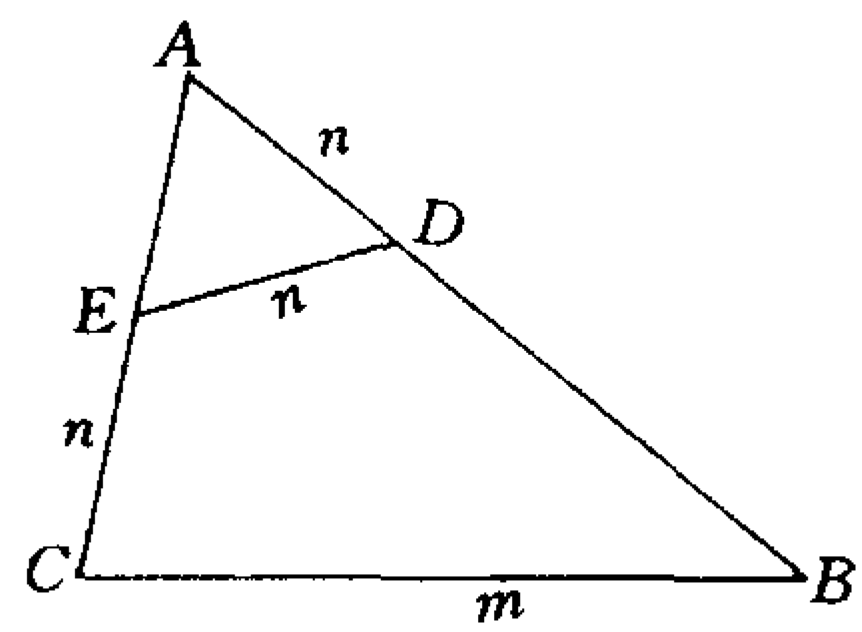
解之得 $x = p + \frac{2}{3}, \quad y = q - \frac{1}{3}, \quad z = r + \frac{1}{3}.$

产品的件数应是非负整数,但解得的 $x,y,z$ 都不是整数,由此说明,若要使 $x,y,z$ 都取整数值,就不能把库存的三种零件都恰好用完.

数论卷

**1·23** 在三角形 $ABC$ 中,$AB = 33$, $AC = 21$,且 $BC = m$,这里 $m$ 是一个正整数,如果在 $AB$ 上可找到一点 $D$,在 $AC$ 上可找到一点 $E$ 使得 $AD = DE = EC = n$,这里 $n$ 为一个正整数.问 $m$ 必须取什么值?

(瑞典数学竞赛,1982 年)




[解] 在 $\triangle ADE$ 中,

$$AD + DE > AE,$$

则 $$n + n > 21 - n.$$

于是 $$7 < n < 21.$$

由于 $\triangle DEA$ 是等腰三角形,得出

$$\cos A = \frac{\frac{AE}{2}}{n} = \frac{21-n}{2n}.$$

在 $\triangle ABC$ 中,用余弦定理

$$m^2 = 21^2 + 33^2 - 2 \cdot 21 \cdot 33 \cdot \frac{21-n}{2n}.$$

由此可得

$$m^2 = 2223 - \frac{3^3 \cdot 7^2 \cdot 11}{n}.$$

于是 $n$ 是 $3^3 \cdot 7^2 \cdot 11$ 的约数,且满足 $7 < n < 21$,

因而 $n = 9$ 或 $n = 11$.

当 $n = 9$ 时,可得

$$m^2 = 606,$$

而 606 不是完全平方数.

当 $n = 11$ 时,可得

$$m^2 = 900, \quad m = 30.$$

**1·24** 证明不存在有七条棱的多面体.

(基辅数学奥林匹克,1951 年)

[证] 假设存在有 7 条棱的多面体 $M$.

首先,多面体的各面都是三角形.

事实上,若多面体$M$的某个面$P$有多于3条的边,从面$P$的每个顶点出发的棱中至少有一条不是$P$的边,从而多面体$M$的棱不少于8条,与已知多面体$M$只有7条棱相矛盾.

设多面体$M$有$f$个面,则它的总棱数应为$\frac{3}{2}f$条.于是有等式

$$\frac{3}{2}f = 7,$$

$$3f = 14. \qquad ①$$

由于$3 \nmid 14$,则①式不成立.

于是不存在有七条棱的多面体.

1·25　求最大的正整数$n$,使得$n^3 + 100$能被$n + 10$整除.

（第4届美国数学邀请赛,1986年）

[解]　我们设法把$n^3 + 100$变形,使之出现$n + 10$,为此

$$\begin{aligned} & n^3 + 100 \\ = & n^3 + 1000 - 900 \\ = & (n + 10)(n^2 - 10n + 100) - 900. \end{aligned}$$

于是若　$n + 10 \mid n^3 + 100.$

则　$n + 10 \mid 900.$

由于　$n + 10 \leqslant 900.$

因此,为使$n$最大,取$n + 10 = 900$,则$n = 890$.

1·26　求$k$的最大值,使$3^{11}$可以表示为$k$个连续正整数之和.

（第5届美国数学邀请赛,1987年）

[解]　假设$3^{11}$表示成连续$k$个正整数之和:

$$3^{11} = (n + 1) + (n + 2) + \cdots + (n + k). \qquad ①$$

其中$n$为非负整数,$k$为正整数.

我们求满足①式的$k$的最大值.

$$3^{11} = nk + \frac{k(k + 1)}{2},$$

$$2 \cdot 3^{11} = 2nk + k(k + 1),$$

$$2 \cdot 3^{11} = k(2n + k + 1).$$

显然　$k < 2n + k + 1.$

要使等式右边较小的因数$k$尽可能地大,又必须使$n$非负,则最大

的可能是

$$k=2\cdot 3^5,\quad 2n+k+1=3^6.$$

此时可解得 $\qquad n=121.$

因此有

$$3^{11}=122+123+\cdots+607.$$

所求的最大的 $k$ 为 $2\cdot 3^5=486$.

1·27　求最大的正整数 $n$，使不等式 $\frac{8}{15}<\frac{n}{n+k}<\frac{7}{13}$ 对惟一的一个整数 $k$ 成立.

（第5届美国数学邀请赛，1987年）

[解]　将已知不等式变形为 $\frac{15}{8}>\frac{n+k}{n}>\frac{13}{7}$.

即
$$\frac{6}{7}<\frac{k}{n}<\frac{7}{8}.$$
$$48n<56k<49n.$$

于是问题转化为求最大的开区间 $(48n,49n)$，使这个区间内仅含一个56的整倍数.

由于区间 $(48n,49n)$ 的长度为 $n$，它含有 $n-1$ 个整数，如果 $n-1\geqslant 2\cdot 56$，那么区间内必含有至少两个56的整倍数，于是有

$$n-1<2\cdot 56$$
$$n\leqslant 112.$$

当 $n=112$ 时，有

$$48\cdot 112=56\cdot 96<56\cdot 97<56\cdot 98=49\cdot 112.$$

其中 $k=97$ 是满足已知不等式的惟一整数.

因此，$n=112$ 为所求.

1·28　已知 $x,y\in N$，试求最大的 $y$ 值，使得存在惟一的 $x$ 值，满足下列不等式

$$\frac{9}{17}<\frac{x}{x+y}<\frac{8}{15}.$$

（中国湖北省武汉市数学夏令营，1987年）

[解1]　因为 $x,y\in N$，则题设的不等式可化为

$$\begin{cases}8x-9y>0,\\7x-8y<0.\end{cases}$$

$$\frac{9y}{8} < x < \frac{8y}{7}.$$

要使区间$\left(\frac{9y}{8},\frac{8y}{7}\right)$内存在惟一的整数 $x$,其充要条件是

(1) 若$\frac{8y}{7} \in N$,则$\frac{8y}{7} = \left[\frac{9y}{8}\right] + 2$,或者

(2) 若$\frac{8y}{7} \notin N$,则$\left[\frac{8y}{7}\right] = \left[\frac{9y}{8}\right] + 1$.

设 $y = 8t + r$, $t \in N$, $r = 0,1,2,\cdots,7$.

由(1) 有

$$9t + \frac{t + 8r}{7} = 9t + \left[\frac{9r}{8}\right] + 2,$$

即
$$\frac{t + r}{7} = \left[\frac{r}{8}\right] + 2.$$

因为$\left[\frac{r}{8}\right] = 0$,所以

$$\frac{t + r}{7} \in N, \quad t \in N.$$

所以
$$t + r = 14.$$

为使 $y$ 最大,我们取 $r = 0$.

于是
$$t = 14, \quad y = 112.$$

相应的 $x = 127$ 是惟一的整数.

由(2) 有

$$\left[\frac{t + r}{7}\right] = \left[\frac{r}{8}\right] + 1 = 1,$$

所以可取最大的 $t + r = 13$,

为使 $y$ 最大,取 $r = 0$, $t = 13$,

这时 $y$ 最大为 104,相应的 $x = 118$.

由以上可知,所以 $y$ 的最大值为 112.

[**解 2**]　原不等式变形为

$$\frac{15}{8} < \frac{x + y}{x} < \frac{17}{9},$$

即
$$\frac{7}{8} < \frac{y}{x} < \frac{8}{9}.$$

$$63y < 56x < 64y.$$

所以问题转化为求最大的开区间$(63y,64y)$ 使其仅包含一个 56

的整倍数，由于区间长度为 $y$，所以含有 $y-1$ 个整数.

如果 $y-1 \geqslant 2 \cdot 56$，那么区间内必含有至少 2 个 56 的整倍数.

所以 $y-1<2 \cdot 56$，　即 $y \leqslant 112$.

当 $y=112$ 时，有

$63 \cdot 112=126 \cdot 56<127 \cdot 56<128 \cdot 56=64 \cdot 112$，

其中 $x=127$，所以 $y=112$ 为所求.

1·29　求最大的正整数 $k$，使得

$$1991^k \mid 1990^{1991^{1992}}+1992^{1991^{1990}}.$$

（第 32 届国际数学奥林匹克预选题，1991 年）

[解]　首先用数学归纳法证明：

设奇数 $a \geqslant 3$，对一切正整数 $n$，有

$$(1+a)^{a^n}=1+S_n a^{n+1}. \qquad ①$$

其中 $S_n$ 是整数，且 $a \nmid S_n$.

对于 $n=1$，有

$$\begin{aligned}&(1+a)^a\\ =&1+C_a^1 a+C_a^2 a^2+\cdots+C_a^a a^a\\ =&1+a^2(1+C_a^2+C_a^3 a+\cdots+a^{a-2}).\end{aligned}$$

由于 $a$ 是奇数，所以 $a \mid C_a^2$，于是

$$a \mid C_a^2+C_a^3 a+\cdots+a^{a-2},$$

从而　$$a \nmid S_1=1+C_a^2+\cdots+a^{a-2}.$$

因此，对 $n=1$，① 式成立.

假设 ① 式对自然数 $n=k_0$ 成立，则

$$\begin{aligned}&(1+a)^{a^{k_0+1}}\\ =&[(1+a)^{a^{k_0}}]^a\\ =&(1+S_{k_0}a^{k_0+1})^a.\\ =&1+S_{k_0}a^{k_0+2}+C_a^2 S_{k_0}^2 a^{2k_0+2}+\cdots+S_{k_0}^a a^{a(k_0+1)}\\ =&1+S_{k_0+1}a^{k_0+2},\end{aligned}$$

其中　$$S_{k_0+1}=S_{k_0}+C_a^2 S_{k_0}^2 a^{k_0}+\cdots+S_{k_0}^a a^{a(k_0+1)-k_0-2}.$$

由归纳假设 $a \nmid S_{k_0}$，因而 $a \nmid S_{k_0+1}$.

从而 ① 式对 $n = k_0 + 1$ 成立.

即对一切自然数 $n$,① 式成立.

类似地,可以证明:

设奇数 $b \geqslant 3$,则对一切正整数 $n$,有

$$(b-1)^{b^n} = -1 + T_n b^{n+1}, \qquad ②$$

其中 $T_n$ 是整数,且 $b \nmid T_n$.

利用 ①,② 可知,存在整数 $S$ 和 $T$,使得

$$1991 \nmid S, 1991 \nmid T,$$

且

$$\begin{aligned} &1990^{1991^{1992}} + 1992^{1991^{1990}} \\ &= T \cdot 1991^{1993} + S \cdot 1991^{1991} \\ &= 1991^{1991}(T \cdot 1991^2 + S) \end{aligned}$$

由此,所求的最大的 $k = 1991$.

1·30　求最大自然数 $x$,使得对每一个自然数 $y$, $x$ 能整除

$$7^y + 12y - 1.$$

(“友谊杯”国际数学竞赛,1992 年)

[解]　当 $y = 1$ 时,$7^y + 12y - 1 = 18$,因此

$$x \mid 18.$$

从而

$$x \leqslant 18.$$

下面用数学归纳法证明

$$18 \mid 7^y + 12y - 1.$$

当 $y = 1$ 时,显然.

若 $y = k$ 时,$18 \mid 7^k + 12k - 1$.

若 $y = k + 1$ 时,

$$\begin{aligned} &7^{k+1} + 12(k+1) - 1 \\ &= 7 \cdot 7^k + 7 \cdot 12k - 7 - 6 \cdot 12k + 18 \\ &= 7(7^k + 12k - 1) - 72k + 18. \end{aligned}$$

由归纳假设

$$18 \mid 7^k + 12k - 1,$$

又

$$18 \mid -72k + 18.$$

于是

$$18 \mid 7^{k+1} + 12(k+1) - 1.$$

即 $y = k + 1$ 时命题成立.

从而对所有的自然数 $y$, $18 \mid 7^y + 12y - 1$.

于是最大的自然数 $x = 18$.



1·31 求最大的自然数 $k$,使得 $3^k$ 整除 $2^{3^m} + 1$,其中 $m$ 为任意自然数.

("友谊杯"国际数学竞赛,1992 年)

[解] $m = 1$ 时,$2^{3^m} + 1 = 9$.

由 $3^k \mid 9$ 可知 $k \leqslant 2$.

下面证明对任意正整数 $m$,

$$3^2 \mid 2^{3^m} + 1.$$

事实上
$$\begin{aligned} & 2^{3^m} + 1 \\ = & (2^3)^{3^{m-1}} + 1 \\ \equiv & (-1)^{3^{m-1}} + 1 \\ \equiv & 0 \quad (\bmod 9). \end{aligned}$$

所以
$$9 \mid 2^{3^m} + 1.$$

从而 $k$ 的最大值为 2.

1·32 试找出最小的正整数 $n$,使它的立方的末三位数字是 888.

(第 6 届美国数学邀请赛,1988 年)

[解 1] 如果一个正整数的立方以 8 结尾,那么这个数本身必以 2 结尾,即它可以写成

$$n = 10k + 2 \quad (k \text{ 为非负整数})$$

的形式,于是

$$\begin{aligned} n^3 &= (10k + 2)^3 \\ &= 1000k^3 + 600k^2 + 120k + 8. \end{aligned}$$

其中 $120k$ 决定了 $n^3$ 的十位数码.

由于要求 $n^3$ 的十位数码是 8,则 $12k$ 的个位数应是 8,即 $k$ 的个位是 4 或 9,因此可设

$$k = 5m + 4 \quad (m \text{ 为非负整数}).$$

这时 $n^3 = [10(5m + 4) + 2]^3$

$$= 125000m^3 + 315000m^2 + 264600m + 74088.$$

为使 $n^3$ 的百位数字是 8，必须使 $2646m$ 的个位是 8，最小的 $m = 3$.

这时 $$k = 5m + 4 = 19,$$
$$n = 10k + 2 = 192.$$

可以求出 $n^3 = 7077888$，其末三位是 888.

因此所求的最小的 $n$ 为 192.

[**解 2**] 由题意有

$$1000 \mid n^3 - 888.$$

所以 $$1000 \mid n^3 + 112 - 1000,$$
$$1000 \mid n^3 + 112.$$

所以 $n$ 是偶数，设 $n = 2k$，则

$$1000 \mid 8k^3 + 112 = 8(k^3 + 14).$$

这就需要 $$125 \mid k^3 + 14.$$

首先必须 $5 \mid k^3 + 14$，因此 $k$ 的个位数字是 6 或 1.

于是可设 $k = 5m + 1$ （$m$ 为非负整数）

$$\begin{aligned} k^3 + 14 &= (5m + 1)^3 + 14 \\ &= 125m^3 + 75m^2 + 15m + 15 \\ &= 5(25m^3 + 15m^2 + 3m + 3). \end{aligned}$$

为使 $125 \mid k^3 + 14$，只须

$$25 \mid 15m^2 + 3m + 3.$$

从而 $15m^2 + 3m + 3$ 的个位是 0 或 5，由于

$$15m^2 + 3m + 3 = 3m(5m + 1) + 3.$$

$m(5m + 1)$ 一定为偶数，所以 $3m(5m + 1)$ 的个位数一定为 2.

从而 $m(5m + 1)$ 的个位一定是 4，此时 $m$ 的个位一定是 4 或 9.

为此设 $m = 5t + 4$，（$t$ 为非负整数）.

$$\begin{aligned} &15m^2 + 3m + 3 \\ &= 15(5t + 4)^2 + 3(5t + 4) + 3 \\ &= 15 \cdot 25t^2 + 40 \cdot 15t + 16 \cdot 15 + 15t + 15 \\ &= 15 \cdot 25t^2 + 24 \cdot 25t + 15t + 15 \cdot 17 \end{aligned}$$

为使 $25 \mid 15m^2 + 3m + 3$，只须

$$25 \mid 15t + 15 \cdot 17,$$

即
$$5 \mid 3t + 51.$$

取最小的 $t = 3$.

于是 $m = 5t + 4 = 19,\quad k = 5m + 1 = 96.$

从而
$$n = 2k = 192.$$

1·33 求使 $2^n + 1$ 能被 3 整除的一切自然数 $n$.

（匈牙利数学奥林匹克,1898 年）

［解］ 由 $2^n - (-1)^n = 3[2^{n-1} - 2^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1}]$.
为方便计,记 $2^{n-1} - 2^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1} = A$,则 $A$ 是整数,于是

$$2^n - (-1)^n = 3A.$$

$$2^n + 1 = 3A + 1 + (-1)^n.$$

因此,当且仅当 $n$ 是奇数时,

$$3 \mid 2^n + 1.$$

1·34 设 $a_1 = 1$, $a_2 = 3$,且对所有的正整数 $n$,

$$a_{n+2} = (n+3)a_{n+1} - (n+2)a_n.$$

求所有使 $a_n$ 可被 11 整除的 $n$ 的值.

（第 7 届巴尔干数学竞赛,1990 年）

［解］ 由已知

$$a_{n+2} = (n+3)a_{n+1} - (n+2)a_n,$$

$$a_{n+2} - a_{n+1} = (n+2)(a_{n+1} - a_n).$$

记 $b_{n+1} = a_{n+1} - a_n$,则有

$$b_{n+1} = (n+1)b_n.$$

由此易得
$$b_n = n!.$$

从而
$$n! = a_n - a_{n-1},$$

$$(n-1)! = a_{n-1} - a_{n-2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$2! = a_2 - a_1.$$

诸式相加,再利用 $a_1 = 1$ 可得

$$a_n = 1! + 2! + \cdots + n!.$$

通过计算可得

$$a_4 = 1 + 2! + 3! + 4! = 33.$$

所以 $$11 \mid a_4.$$

$$a_8 = 1 + 2! + 3! + \cdots + 8! = 46233.$$

所以 $$11 \mid a_8.$$

又 $n \geqslant 10$ 时,

$$\begin{aligned} a_n &= a_8 + (9! + 10!) + 11! + 12! + \cdots + n! \\ &= a_8 + 9! \cdot 11 + 11! + 12! + \cdots + n!. \end{aligned}$$

所以 $$11 \mid a_n \quad (n \geqslant 10).$$

于是,当 $n = 4$, $n = 8$, $n \geqslant 10$ 时,$11 \mid a_n$.

1·35　如果 $a < b < c < d < e$ 是连续的正整数,$b + c + d$ 是完全平方数,$a + b + c + d + e$ 是完全立方数,那么 $c$ 的最小值是多少?

（第 7 届美国数学邀请赛,1989 年）

[解]　因为 $a,b,c,d,e$ 是连续的正整数,所以有

$$b + c + d = 3c,$$
$$a + b + c + d + e = 5c,$$

由于 $b + c + d$ 是完全平方数,$a + b + c + d + e$ 是完全立方数,所以可设

$$3c = m^2, \qquad ①$$
$$5c = n^3. \qquad ②$$

由 ① 得　$3 \mid m$,　进而 $3 \mid c$.

由 ② 得　$5 \mid n$,　进而 $5^2 \mid c$.

再由 ② 得　$3^3 \mid c$.

于是 $$25 \cdot 27 \mid c.$$

又 $$c \geqslant 25 \cdot 27 = 675.$$

因此 $c$ 的最小值是 675.

1·36　公共汽车票的号码是六位数,如果号码的前三位数码之和等于后三位数码之和,则称有这个号码的票是“幸运”的.证明所有幸运票的号码之和能被 13 整除.

（第 5 届全俄数学奥林匹克,1965 年）

[证]　如果某个幸运票的号码为 $A$,由于 $A$ 是一个六位号码,由题设,则

$$A' = 999999 - A$$

也是幸运票的号码.

于是 $$A + A' = 999999 = 13 \cdot 37 \cdot 999.$$

即 $$13 \mid A + A'.$$

于是所有幸运票的号码之和能被 13 整除.

1·37 证明对所有的正整数 $n$,分数$\dfrac{n^2+n-1}{n^2+2n}$不可约.

(第 1 届墨西哥数学奥林匹克,1990 年)

[证] 设$(n^2+n-1, n^2+2n) = d$,则

$$d \mid n^2+n-1, \quad d \mid n^2+2n.$$

于是 $$d \mid (n^2+2n)-(n^2+n-1),$$

即 $$d \mid n+1.$$

进而 $$d \mid (n+1)^2,$$

从而 $$d \mid n^2+2n+1,$$

则 $$d \mid (n^2+2n+1)-(n^2+2n),$$

即 $$d \mid 1.$$

于是 $$d = 1, \quad (n^2+n-1, n^2+2n) = 1.$$

因此,分数$\dfrac{n^2+n-1}{n^2+2n}$不可约.

1·38 $n$ 个互不相等的自然数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 都能整除 $10^k$($k \in N$),求证$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n} < 2.5$.

(中国福建省福州市高中数学竞赛,1990 年)

[证] 因为 $a_i \mid 10^k$, $i = 1,2,\cdots,n$.

则 $$a_i = 2^{t_i}5^{s_i} \quad (t_i, s_i \in N \cup \{0\}).$$

因此,$\dfrac{1}{a_1},\dfrac{1}{a_2},\cdots,\dfrac{1}{a_n}$ 均为

$$\left(\frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^1}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)\left(\frac{1}{5^0}+\frac{1}{5^1}+\cdots+\frac{1}{5^k}\right)$$

展开式中互不相同的某一项.所以

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}$$

$$\leqslant\left(\frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^1}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)\left(\frac{1}{5^0}+\frac{1}{5^1}+\cdots+\frac{1}{5^k}\right)$$

$$= \frac{1-\frac{1}{2^{k+1}}}{1-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1-\frac{1}{5^{k+1}}}{1-\frac{1}{5}}$$

$$< 2 \cdot \frac{5}{4}$$

$$= \frac{5}{2}.$$

1·39　十进制纯循环小数是指小数$0.\overline{a_1a_2\cdots a_k}$,它从小数点后开始出现重复的 $k$ 个数字. 例如:$0.243243243\cdots = \frac{9}{37}$. 混循环小数 $0.b_1\cdots b_m\overline{a_1\cdots a_k}$,是指最终出现循环,但不能化为一个纯循环小数,例如 $0.011363636\cdots = \frac{1}{88}$.

如果一个混循环小数表为既约分数$\frac{p}{q}$,求证分母 $q$ 必可被 2 或 5 整除,或同时被它们整除.

(第 17 届美国数学奥林匹克,1988 年)

[证]　把混循环小数

$$0.b_1\cdots b_m\overline{a_1\cdots a_k}, \quad (m \geqslant 1, b_m \neq a_k)$$

化成分数得

$$\frac{p}{q} = \frac{(10^k-1)b_1\cdots b_m + a_1\cdots a_k}{(10^k-1)\cdot 10^m}.$$

上式又可改写为

$$\frac{p}{q} = \frac{10^k b_1\cdots b_m + (a_1\cdots a_k - b_1\cdots b_m)}{10^m(10^k-1)}.$$

此式右边的分母中含有因数 10,但在分子中,由于 $a_k \neq b_m$,则

$$10 \nmid a_1\cdots a_k - b_1\cdots b_m.$$

所以分子不能被 10 整除.

因此分子 $p$ 中不能同时含有因数 2 及因数 5.

如果分子中不含因数 2 也不含因数 5. 那么 $10 \mid q$,即分母同时被 2 和 5 整除;如果分子中含有因数 2,则必有 $5 \mid q$,如果分子中含有因数 5,则必有 $2 \mid q$,此时分母 $q$ 必可被 2 或 5 整除.

1·40　已知一个 $6n$ 位数可被 7 整除,现将它的末位数字移到开

头，证明所得到的数能被 7 整除.

（第 23 届莫斯科数学奥林匹克，1960 年）

［证］　设原来的数 $A = 10a + b$.

则将它的末位数字移到开头得到的数为

$$B = 10^{6n-1}b + a.$$

因为　　$10B - A = (10^{6n} - 1)b.$

由于　$10^{6n} - 1 = (10^6)^n - 1 = 999999M$. 其中 $M$ 是整数.

且　　$7 \mid 999999$,

则　　$7 \mid 10B - A$.

又因为 $7 \mid A$，则　　$7 \mid 10B$.

由于 $(7,10) = 1$，则　　$7 \mid B$.

**1·41**　$x, y, z$ 是两两不相等的整数. 证明 $(x-y)^5 + (y-z)^5 + (z-x)^5$ 能被 $5(y-z)(z-x)(x-y)$ 整除.

（第 2 届全俄数学奥林匹克，1962 年）

［证］　设 $x - y = u, y - z = v$，则

$$z - x = -(u + v).$$

$$(u+v)^5 = u^5 + 5u^4v + 10u^3v^2 + 10u^2v^3 + 5uv^4 + v^5$$

从而

$$\begin{aligned}
&u^5 + v^5 - (u+v)^5 \\
&= -5uv(u^3 + 2u^2v + 2uv^2 + v^3) \\
&= -5uv[(u^3 + v^3) + 2uv(u+v)] \\
&= -5uv(u+v)(u^2 + uv + v^2),
\end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned}
&(x-y)^5 + (y-z)^5 + (z-x)^5 \\
&= 5(x-y)(y-z)(z-x)[(x-y)^2 + (x-y)(y-z) + (y-z)^2] \\
&= 5(x-y)(y-z)(z-x)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx).
\end{aligned}$$

因而 $(x-y)^5 + (y-z)^5 + (z-x)^5$ 能被 $5(x-y)(y-z)(z-x)$ 整除.

**1·42**　证明对任意整数 $n$，$\frac{n^5}{5} + \frac{n^3}{3} + \frac{7n}{15}$ 是整数.

（基辅数学奥林匹克，1971 年）

［证］　设 $N = \frac{n^5}{5} + \frac{n^3}{3} + \frac{7n}{15}$.

$$N=\frac{n(n^2-1)(n^2-4)}{5}+\frac{5n^3-4n}{5}+\frac{n(n^2-1)}{3}+\frac{n}{3}+\frac{7n}{15}$$
$$=n^3+\frac{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)}{5}+\frac{(n-1)n(n+1)}{3}.$$

由于 $n-2$, $n-1$, $n$, $n+1$ 和 $n+2$ 是五个连续整数,必有一个能被 5 整除,因此$\frac{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)}{5}$是整数.

又由于 $n-1$,$n$ 和$n+1$是三个连续整数,所以,必有一个能被 3 整除,因此$\frac{(n-1)n(n+1)}{3}$是整数.

于是,对任意整数 $n$,

$$N=\frac{n^5}{5}+\frac{n^3}{3}+\frac{7n}{15}$$

是整数.

1·43 证明如果 $x,y,z$ 是不同的整数,而 $n$ 是非负整数,那么

$$\frac{x^n}{(x-y)(x-z)}+\frac{y^n}{(y-x)(y-z)}+\frac{z^n}{(z-x)(z-y)}$$

是整数.

(匈牙利数学奥林匹克,1959 年)

[证 1] 已知的表达式可化为

$$\frac{x^n}{(x-y)(x-z)}+\frac{y^n}{(y-x)(y-z)}+\frac{z^n}{(z-x)(z-y)}$$
$$=\frac{x^n(y-z)+y^n(z-x)+z^n(x-y)}{(x-y)(x-z)(y-z)}. \quad ①$$

当 $n=0$ 时,① 式的分子变为 0,因而是整数.

当 $n$ 是自然数时,由于

$$x-y=-(y-z)-(z-x),$$

则 ① 式的分子化为

$$(x^n-z^n)(y-z)+(y^n-z^n)(z-x). \quad ②$$

当 $n=1$ 时,② 式变为 0,因而是整数.

当 $n\geqslant 2$ 时,则 ② 式化为

$$(x^n-z^n)(y-z)+(y^n-z^n)(z-x)$$
$$=(x-z)(y-z)(x^{n-1}+x^{n-2}z+\cdots+xz^{n-2}+z^{n-1}-y^{n-1}$$
$$-y^{n-2}z-\cdots-yz^{n-2}-z^{n-1})$$

$$= (x - z)(y - z)(x - y)[(x^{n-2} + x^{n-3}y + \cdots + xy^{n-3} + y^{n-2}) + z(x^{n-3} + \cdots + y^{n-3}) + \cdots + z^{n-2}].$$



从而①式的分子与分母中的$(x-z)(y-z)(x-y)$可以约去,①式成为整系数多项式.于是当$n \geqslant 2$时,原式为整数.

由以上,对非负整数$n$,原式为整数.

[证 2]　设

$$P_n(x,y,z) = \frac{x^n}{(x-y)(x-z)} + \frac{y^n}{(y-x)(y-z)} + \frac{z^n}{(z-x)(z-y)}.$$

我们只要证明$P_n(x,y,z)$对非负整数$n$是整系数多项式即可.

对$n$施用数学归纳法.

当$n = 0$时,$P_0(x,y,z) = 0$,结论是正确的.

假设$n = k$时,$P_k(x,y,z)$是关于$x,y,z$的整系数多项式.则

$$\begin{aligned} &P_{k+1}(x,y,z) - zP_k(x,y,z) \\ &= \frac{x^{k+1} - zx^k}{(x-y)(x-z)} + \frac{y^{k+1} - zy^k}{(y-x)(y-z)} \\ &= \frac{x^k - y^k}{x-y} \\ &= x^{k-1} + x^{k-2}y + \cdots + y^{k-1}. \end{aligned}$$

于是有

$$P_{k+1}(x,y,z) = zP_k(x,y,z) + (x^{k-1} + x^{k-2}y + \cdots + y^{k-1}).$$

因此$P_{k+1}(x,y,z)$是整系数多项式.

从而对非负整数$n$,　$P_n(x,y,z)$是整系数多项式,因而对整数$x,y,z$,　$P_n(x,y,z)$是整数.

1·44　设$m$和$n$是自然数.证明如果对于某些非负整数$k_1,k_2,\cdots,k_n$,数$2^{k_1} + 2^{k_2} + \cdots + 2^{k_n}$能被$2^m - 1$整除,那么$n \geqslant m$.

（第 16 届全苏数学奥林匹克,1982 年）

[证]　我们从能被$2^m - 1$整除的,形如$2^{k_1} + 2^{k_2} + \cdots + 2^{k_n}$的数中选取有最小的$n$的那些数.再从所得的数中选取$k_1 + k_2 + \cdots + k_n$最小的一个数,$k_1,k_2,\cdots,k_n$两两不等.

如果$n \geqslant m$不成立,即$n < m$,则$k_i \leqslant m - 1$.

$$2^{k_1} + 2^{k_2} + \cdots + 2^{k_n} \leqslant 2 + 2^2 + \cdots + 2^{m-1}$$

$$=2^m-2$$
$$<2^m-1.$$

此时 $2^{k_1}+2^{k_2}+\cdots+2^{k_n}$ 不能被 $2^m-1$ 整除,出现矛盾.

因此 $n\geqslant m$.

1·45 (1) 设 $a,m,n$,是自然数, $a>1$.证明如果 $a^m+1$ 能被 $a^n+1$ 整除,那么 $m$ 能被 $n$ 整除.(2) 设 $a,b,m,n$ 是自然数,同时 $a$ 和 $b$ 互素,且 $a>1$.证明如果 $a^m+b^m$ 能被 $a^n+b^n$ 整除,那么 $m$ 能被 $n$ 整除.

(第 6 届全苏数学奥林匹克,1972 年)

[证] 注意到(1)是(2)的特例,即(2)中 $b=1$ 的情形,所以我们只证明(2).

首先证明如下两个命题:

命题一:若 $a^n+b^n\mid a^k+b^k,(a,b)=1$,则 $a^n+b^n\mid a^{k-n}-b^{k-n}$.

命题二:若 $a^n+b^n\mid a^l-b^l,(a,b)=1$,则 $a^n+b^n\mid a^{l-n}+b^{l-n}$.

这两个命题容易由 $(a,b)=1$ 以及下面的两个恒等式得到.

$$a^k+b^k=a^{k-n}(a^n+b^n)-b^n(a^{k-n}-b^{k-n}),$$
$$a^l-b^l=a^{l-n}(a^n+b^n)-b^n(a^{l-n}+b^{l-n}).$$

设 $m=nq+r,\quad 0\leqslant r<n$.

则由命题一,二可知

$$a^n+b^n\mid a^r+(-1)^q b^r. \qquad ①$$

这是因为 $r$ 可以从 $m$ 减去 $nq$ 得到.

由于 $\qquad 0\leqslant|a^r+(-1)^q b^r|<a^n+b^n$,

因此要满足 ① 式,必须 $r=0$ 及 $q$ 是奇数.

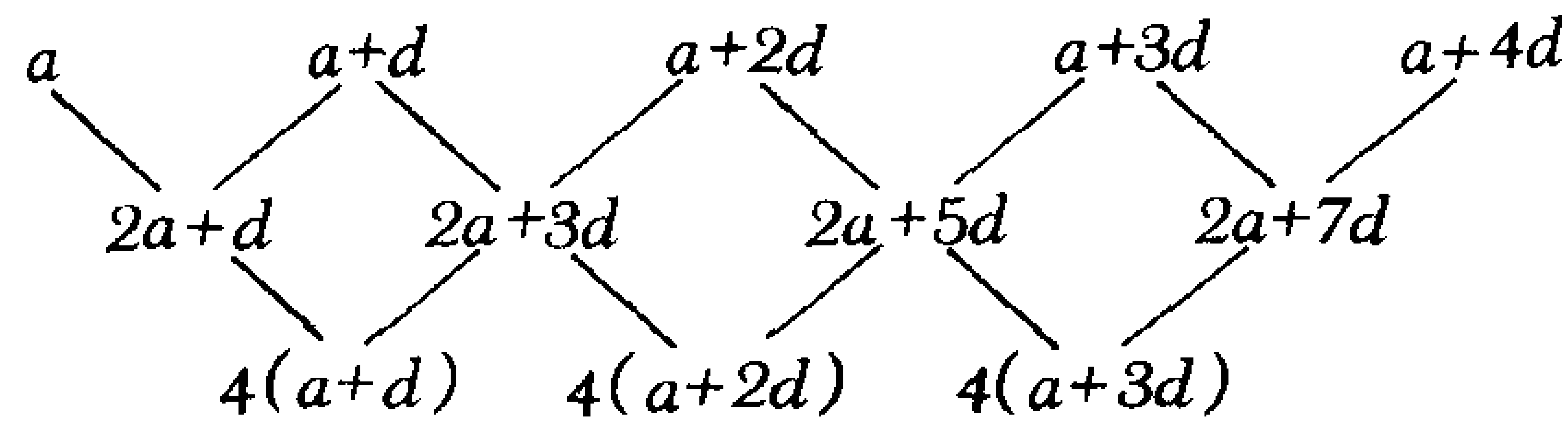
这就得到 $m=nq$,即 $n\mid m$.

1·46 把整数从 0 到 1985 按递增顺序写成一行,然后把每对相邻数之和写成新的第二行,再把第二行中每对相邻数之和写成第三行,依此类推,直到只剩一个数不再产生新的行为止.证明此数能被 1985 整除.

(第 11 届全俄数学奥林匹克,1985 年)

[证] 由于从 0 到 1985 按递增顺序写成一行构成等差数列,我们可以证明,如果第 $n$ 行是等差数列,那么第 $n+2$ 行也是等差数列,这可由题目中对各行数定义直接得出.

考察上述的第 $n$ 行,第 $n+1$ 行和第 $n+2$ 行:




可以发现,除首尾两项外,其余各项第 $n+2$ 行都比第 $n$ 行元素扩大了 4 倍.

由以上还可知第 2 行包含 1985 个数,其公差是 2,即

$$1,\quad 3,\quad 5,\quad \cdots,\quad 3967,\quad 3969.$$

它的中间项即第 993 项是 1985.

第 4 行也是等差数列,它有 1983 个数,其公差是 8,即

$$12,20,28,\cdots$$

它的中间项即第 992 项是 $4\cdot 1985$.

由此类推可得最后一行即第 1986 行恰为 1985 的倍数,即为

$$4^{\frac{1985-1}{2}}\cdot 1985=2^{1984}\cdot 1985.$$

**1·47** 设 $x^2-x+a$ 能整除 $x^{13}+x+90$,试确定正整数 $a$ 的值.

(第 24 届美国普特南数学竞赛,1963 年)

**[解]** 令 $x^{13}+x+90=(x^2-x+a)q(x)$,其中 $a$ 为整数,$q(x)$ 是整系数多项式.

令 $x=-1,0,1$,则

$$\begin{cases}(a+2)q(-1)=88, & ①\\ aq(0)=90, & ②\\ aq(1)=92. & ③\end{cases}$$

由 ②,③,

$$a[q(1)-q(0)]=2,$$

于是 $$a\mid 2.$$

因此 $$a=1 \text{ 或 } 2.$$

但当 $a=1$ 时,由 ① 得

$$3q(-1)=88.$$

这是不可能的.

故只能有 $a=2$.

当 $a=2$ 时,有

$$x^{13}+x+90=(x^2-x+2)(x^{11}+x^{10}-x^9-3x^8-x^7+5x^6+7x^5-3x^4-17x^3-11x^2+23x+45).$$

1·48　有多少个实数 $a$,使得 $x^2+ax+6a=0$ 只有整数解.

(第 9 届美国数学邀请赛,1991 年)

[解]　设方程 $x^2+ax+6a=0$ 有整数解 $m,n(m\leqslant n)$,则有

$$m+n=-a,$$

$$mn=6a.$$

于是有
$$-6(m+n)=mn.$$

即
$$(m+6)(n+6)=36.$$

因为　$36=1\cdot 36=2\cdot 18=3\cdot 12=4\cdot 9=6\cdot 6.$

所以满足 $m\leqslant n$ 的解 $(m,n)$ 有

$(-42,-7),(-24,-8),(-18,-9),(-15,-10),$

$(-12,-12),(-5,30),(-4,12),(-3,6),(-2,3),(0,0).$

对应的 $a=-(m+n)$ 的值为

$$49,\quad 32,\quad 27,\quad 25,\quad 24,-25,-8,-3,-1,\quad 0.$$

共 10 个.

1·49　试找出这样的 $a$ 值,它们使得方程 $x^2-ax+9a=0$ 的根是整数.

(前苏联教委推荐试题,1990 年)

[解]　设 $x_1,x_2$ 是方程

$$x^2-ax+9a=0$$

的整数根,于是由韦达定理得

$$x_1+x_2=a,$$

$$x_1x_2=9a.$$

于是
$$x_1x_2=9(x_1+x_2).$$

$$x_1x_2-9x_1-9x_2+81=81,$$

$$(x_1-9)(x_2-9)=81.$$

注意到,对 81 有如下 6 种形式的因数分解

$$81=1\cdot 81=(-1)\cdot(-81)=3\cdot 27$$
$$=(-3)\cdot(-27)=9\cdot 9=(-9)\cdot(-9).$$

因而可知

$$a=x_1+x_2=(x_1-9)+(x_2-9)+18$$

可得下面6个数

$$\pm 82+18,\quad \pm 30+18,\quad \pm 18+18.$$

即 $a=100,-64,\ 48,-12,\ 36,\ 0.$

于是当 $a$ 取上述6个整数值时,已知方程有整数根.

1·50　$k$ 是什么整数时,方程

$$(k^2-1)x^2-6(3k-1)x+72=0$$

有两个不相等的正整数根.

（中国青海省西宁市初中数学竞赛,1983年）

[解]　由于已知方程有两个不相等的正整数根,则

$$k^2-1\neq 0,\quad k\neq\pm 1.$$
$$\Delta=6^2(3k-1)^2-4\cdot 72(k^2-1)=[6(k-3)]^2.$$

由求根公式得

$$x=\frac{6(3k-1)\pm 6(k-3)}{2(k^2-1)},$$

$$x_1=\frac{12}{k+1},\quad x_2=\frac{6}{k-1}.$$

若使 $x_1,x_2$ 均为正整数,则 $k+1$ 是12的正约数,且 $k-1$ 是6的正约数,即

$$\begin{cases}k+1=1,2,3,4,6,12,\\ k-1=1,2,3,6.\end{cases}$$

所以　$k=2,\ 3.$

当 $k=3$ 时,$x_1=x_2=3$,是二相等正整数根.

因此,当 $k=2$ 时,$x_1=4,\ x_2=6$ 符合本题要求.

1·51　在测验练习中,对左端为具有整系数的 $x$ 的10次多项式和右端为0的方程,一位学生写出的解为 $x=\frac{1}{7}$.他的邻座看了一下他的练习本,只看到多项式的前两项:$1975x^{10}$ 和 $1974x^9$,立刻说答案不正确.为什么他这样说?

（基辅数学奥林匹克,1975年）

[解]　由题设,10次方程为

$$1975x^{10}+1974x^9+a_8x^8+\cdots+a_1x+a_0=0,$$

其中 $a_8,a_7,\cdots,a_0$ 均为整数.

若 $x=\frac{1}{7}$ 是方程的根,则有

$$1975\cdot\frac{1}{7^{10}}+1974\cdot\frac{1}{7^9}+a_8\cdot\frac{1}{7^8}+\cdots+a_1\cdot\frac{1}{7}+a_0=0,$$

即 $$1975+7\cdot1974=-(a_8\cdot7^2+\cdots+a_0\cdot7^{10}).$$

$$1975+7\cdot1974=-7^2(a_8+a_7\cdot7+\cdots+a_0\cdot7^8).$$

由于 $$7^2\nmid1975+7\cdot1974,$$

$$7^2\mid-7^2(a_8+a_7\cdot7+\cdots+a_0\cdot7^8).$$

于是上面的等式不成立,即 $x=\frac{1}{7}$ 不是原方程的根.

所以 $x=\frac{1}{7}$ 不正确.

1·52　设　$P(x)=a_kx^k+a_{k-1}x^{k-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 式中各系数 $a_i(i=0,1,2,\cdots,k)$ 都是整数.今设有四个不同整数 $x_1,x_2,x_3,x_4$ 使 $P(x_i)(i=1,2,3,4)$ 都等于2,试证明对于任何整数 $x$, $P(x)$ 决不等于1,3,5,7,9中的任何一个.

(中国北京市高中数学竞赛,1963年)

[证]　由题设,$x_1,x_2,x_3,x_4$ 是 $P(x)-2$ 的四个不同的根,因此,

$$P(x)-2=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)Q(x).$$

其中 $Q(x)$ 为一整系数多项式或为一整数.

无论 $x$ 等于什么整数,则 $x-x_1$, $x-x_2$, $x-x_3$, $x-x_4$, $Q(x)$ 都是整数,且由于 $x_1,x_2,x_3,x_4$ 是四个不同整数,则 $x-x_1$, $x-x_2$, $x-x_3$, $x-x_4$ 也不相等.

若 $P(x)$ 等于1,3,5,7,9中的任何一个,则

$$P(x)-2=-1,\ 1,\ 3,\ 5,\ 7.$$

中的任何一个.

但 $-1$, 1, 3, 5, 7中任何一个都不能分解为四个不同因数的乘积.所以 $P(x)$ 不可能等于1,3,5,7,9中的任何一个.

1·53　证明如果当自变数 $x$ 取任意整数值时,二次三项式 $ax^2+bx+c$ 总取整数值,那么 $2a$, $a+b$ 及 $c$ 都是整数,并且反过来也正确.

（波兰数学竞赛，1956 年）

[证]　当 $x$ 取整数时，$ax^2+bx+c$ 取整数.



记 $f(x)=ax^2+bx+c$，于是 $f(0)=c$ 是整数.

$f(1)=a+b+c$ 是整数，又因为 $c$ 是整数，所以 $f(1)-f(0)=a+b$ 是整数.

又　$2a=f(2)-2(a+b)-c$，由 $f(2)$，$a+b$ 及 $c$ 是整数，则 $2a$ 也是整数.

反过来，当 $2a$，　$a+b$ 及 $c$ 是整数时，

$$\begin{aligned}ax^2+bx+c&=ax^2-ax+ax+bx+c\\&=ax(x-1)+(a+b)x+c\\&=2a\cdot\frac{x(x-1)}{2}+(a+b)x+c.\end{aligned}$$

由于 $x$ 和 $x-1$ 必为一奇数一偶数，所以 $\frac{x(x-1)}{2}$ 是整数，于是当 $x$ 是整数时，$ax^2+bx+c$ 总取整数值.

1·54　已知对于任何整数 $x$，三项式 $ax^2+bx+c$ 的值都是整数，试问：

(1) 是否在系数 $a,b,c$ 中至少有一个是整数?

(2) 是否 $a,b,c$ 都一定是整数.

（乌克兰数学奥林匹克，1992 年）

[解]　(1) 由已知，对任何整数 $x$，均有

$$ax^2+bx+c\in Z.$$

特别地，取 $x=0$，则 $c\in Z$.

即在系数 $a,b,c$ 中至少有一个是整数.

(2) 由于对任何整数 $x$，乘积 $x(x+1)$ 是偶数，于是 $\frac{x(x+1)}{2}$ 一定为整数，从而三项式

$$\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+0$$

对任何整数 $x$，都是整数.

即 $a,b,c$ 不一定都是整数.

1·55　证明如果当 $x$ 取三个不同的整数值时，关于变量 $x$ 的整系数多项式的值的绝对值都是 1，那么这个多项式没有整数根.

（波兰数学竞赛，1967 年）

［证］ 设 $f(x)$ 是整系数多项式，并且

$$|f(a)|=|f(b)|=|f(c)|=1, \qquad ①$$

这里 $a,b,c$ 是三个不相等的整数.

假定多项式有整数根 $x_0$，那么对任何 $x$

$$f(x)=(x-x_0)\varphi(x), \qquad ②$$

这里 $\varphi(x)$ 是整系数多项式.

由 ①，② 可知

$$|(a-x_0)\varphi(a)|=|a-x_0||\varphi(a)|=1.$$

因为 $|\varphi(a)|$ 是整数，所以 $|a-x_0|$ 是正整数，并且 $|a-x_0|$ 是 1 的约数，所以

$$|a-x_0|=1.$$

同理可证 $|b-x_0|=1$，　$|c-x_0|=1$.

由于 1 只有两个约数 $+1$ 和 $-1$，所以三个数 $a-x_0$，　$b-x_0$，$c-x_0$ 中必有两个相等，从而 $a,b$ 和 $c$ 中也必有两个相等，这与题设的 $a,b,c$ 都互不相等相矛盾.

因此，$f(x)$ 不可能有整数根.

**1·56** 当 $x=-1$，　$x=0$，　$x=1$，　$x=2$ 时，多项式

$$P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$

取整数值. 求证对于所有的整数 $x$，这个多项式取整数值.

（第 14 届全俄数学奥林匹克，1988 年）

［证］ 考虑恒等式

$$\begin{aligned}P(x)&=ax^3+bx^2+cx+d\\&=6a\cdot\frac{(x-1)x(x+1)}{6}+2b\cdot\frac{x(x-1)}{2}+(a+b+c)x+d.\end{aligned}$$

由于 $P(0)=d$，　$P(1)=a+b+c+d$ 是整数，则 $d$ 是整数，$a+b+c$ 是整数.

$P(-1)=2b-(a+b+c)+d$　是整数. 则 $2b$ 是整数.

$P(2)=6a+2b+2(a+b+c)+d$ 是整数. 则 $6a$ 是整数.

又因为 $\frac{(x-1)x(x+1)}{6}$，　$\frac{x(x-1)}{2}$ 都是整数，于是

$$P(x)=6a\cdot\frac{(x-1)x(x+1)}{6}+2b\cdot\frac{x(x-1)}{2}+(a+b+c)x+d$$

对任意的整数 $x$，都是整数.

1·57　证明不存在整数 $a,b,c,d$，使得表达式

$$ax^3+bx^2+cx+d,$$

当 $x=19$ 时，值为 1，当 $x=62$ 时，值为 2.

（第 2 届全俄数学奥林匹克，1962 年）

[证]　设 $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$.

若存在满足题目要求的整数 $a,b,c,d$，则

$$P(19)=a\cdot 19^3+b\cdot 19^2+c\cdot 19+d=1, \quad ①$$

$$P(62)=a\cdot 62^3+b\cdot 62^2+c\cdot 62+d=2. \quad ②$$

② - ① 得

$$a(62^3-19^3)+b(62^2-19^2)+c(62-19)=1,$$

即　$43[a(62^2+62\cdot 19+19^2)+b(62+19)+c]=1$.

此式的左边是 43 的倍数，显然不能等于 1.

因而满足题目要求的整数 $a,b,c,d$ 不存在.

1·58　求证任何整系数多项式 $P(x)$ 都不能同时满足下述二等式：　$P(7)=5$，　$P(15)=9$.

（前苏联大学生数学竞赛，1976 年）

[证]　设 $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，其中 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 都是整数. 若

$$P(7)=5,\quad P(15)=9 \quad ①$$

则

$$a_n\cdot 7^n+a_{n-1}\cdot 7^{n-1}+\cdots+a_1\cdot 7+a_0=5,$$

$$a_n\cdot 15^n+a_{n-1}\cdot 15^{n-1}+\cdots+a_1\cdot 15+a_0=9.$$

二式相减得

$$a_n(15^n-7^n)+a_{n-1}(15^{n-1}-7^{n-1})+\cdots+a_1(15-7)=4.$$

由于　$15-7=8\mid 15^k-7^k$，　$k=1,2,\cdots,n$.

则上式左边能被 8 整除，而右边等于 4 不能被 8 整除. 因而 ① 式二式不能同时满足.

1·59　(1) $f(x)$ 是一元四次整系数多项式，即

$$f(x)=c_4x^4+c_3x^3+c_2x^2+c_1x+c_0,$$

其中 $c_0,c_1,c_2,c_3,c_4$ 均为整数，求证 $a,b$ 为整数，且 $a>b$，则 $a-b$ 能整除 $f(a)-f(b)$.

(2) 甲乙二人在教室里做作业。

甲问乙:"你做完了几道题?"

乙回答说:"我做完的题目数是一个正整数,而且是一个一元四次整系数多项式的根,你猜一猜?"

于是,甲试着用 7 代入多项式,得值 77,这时乙说:"我做的题目数比 7 多."

甲说:"好,我再用大一点的整数试一试."于是甲又用 $B$ 代入多项式,其值为 85.

乙看了又说:"我做的题目比 $B$ 还多."后来甲经过思考和计算,终于求出了乙做的题目数.

试根据对话,求乙完成的题目数.

(中国河北省数学竞赛,1979 年)

[解] (1) $f(a)-f(b)$

$$= (c_4a^4+c_3a^3+c_2a^2+c_1a+c_0)-(c_4b^4+c_3b^3+c_2b^2+c_1b+c_0)$$

$$= c_4(a^4-b^4)+c_3(a^3-b^3)+c_2(a^2-b^2)+c_1(a-b).$$

因为 $a-b \mid a^k-b^k,\quad k\in N$,则

$$a-b \mid f(a)-f(b).$$

(2) 设乙所说的一元四次整系数多项式为 $f(x)$,乙做的题目数为 $A$.

依题意有

$$f(7)=77,\quad f(B)=85,\quad f(A)=0.$$

且

$$7<B<A.$$

利用(1)的结果有

$$A-7 \mid f(A)-f(7)=-77, \qquad ①$$

$$A-B \mid f(A)-f(B)=-85. \qquad ②$$

$$B-7 \mid f(B)-f(7)=8. \qquad ③$$

由①知 $A-7=1,7,11,77.$

从而 $A=8,\quad 14,\quad 18,\quad 84.$

由③知 $B-7=1,\quad 2,\quad 4,\quad 8.$

从而 $B=8,9,11,15.$

考虑 $A,B$ 不同取值的组合,仅当 $A=14,B=9$ 时,满足

$$A-B \mid -85.$$

所以 $A = 14$,即乙做了 14 道题.

1·60　设 $a,b,c,d$ 为不同整数,使得

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)-4=0$$

有一个整数根 $r$,证明 $4r=a+b+c+d$.

(第 7 届美国普特南数学竞赛,1947 年)

[证]　因为 $r$ 是方程的整数根,故

$$(r-a)(r-b)(r-c)(r-d)=4.$$

因为 $a,b,c,d$ 是四个不同的整数,所以 $r-a$, $r-b$, $r-c$, $r-d$ 也是四个不同的整数,且它们又是 4 的四个不同的约数.

4 个不同约数的乘积为 4 的约数集合只有

$$\{1,\ -1,\ 2,\ -2\}.$$

因而

$$\begin{aligned}&(r-a)+(r-b)+(r-c)+(r-d)\\&=1-1+2-2=0,\end{aligned}$$

即

$$4r=a+b+c+d.$$

1·61　已知有整系数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的多项式

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

又已知存在四个不同的整数 $a,b,c,d$,使得

$$f(a)=f(b)=f(c)=f(d)=5,$$

证明没有整数 $k$,使得 $f(k)=8$.

(第 2 届加拿大数学竞赛,1970 年)

[证]　因为 $x=a,b,c,d$ 时,均有 $f(x)=5$,所以多项式 $f(x)-5$ 有四个整数根 $a,b,c,d$.

于是,对所有实数 $x$,有

$$f(x)-5=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)Q(x).$$

其中 $Q(x)=x^{n-4}+b_1x^{n-5}+\cdots+b_{n-4}$,且 $b_1,b_2,\cdots,b_{n-4}$ 为整数.

假设存在整数 $k$,使 $f(k)=8$,则有

$$f(k)-5=(k-a)(k-b)(k-c)(k-d)Q(k).$$

即

$$(k-a)(k-b)(k-c)(k-d)Q(k)=3.$$

由于 $a,b,c,d$ 互不相同,则 $k-a$, $k-b$, $k-c$, $k-d$ 是 3 的四个不同约数,而 3 的四个不同约数为 $+1$, $-1$, $+3$, $-3$,于是有

$$(+1)(-1)(+3)(-3)Q(k)=3.$$

$$9Q(k)=3.$$

由于 $Q(k)$ 是整数,这是不可能的.

所以不存在整数 $k$,使 $f(k)=8$.

1·62　$P(x)$ 为整系数多项式.求证如果 $Q(x)=P(x)+12$ 至少有六个不同的整数根,则 $P(x)$ 无整数根.

(奥地利 — 波兰数学竞赛,1988 年)

[证]　设 $Q(x)$ 有六个不同的整数根 $a_1,a_2,\cdots,a_6$,则

$$P(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_6)Q_1(x)-12,$$

其中 $Q_1(x)$ 为整系数多项式.

假设 $P(x)$ 有整数根 $m$,则

$$(m-a_1)(m-a_2)\cdots(m-a_6)Q_1(m)-12=0.$$

其中 $Q_1(m)$ 为整数.从而有

$$12=(m-a_1)(m-a_2)\cdots(m-a_6)Q_1(m)$$

由 $a_1,a_2,\cdots,a_6$ 是互不相同的整数,则 $m-a_1,\ m-a_2,\ \cdots,\ m-a_6$ 互不相等.注意到同一绝对值的数至多有 2 个.因此有

$$\begin{aligned}12&\geqslant|m-a_1||m-a_2|\cdots|m-a_6|\\&\geqslant1^2\cdot2^2\cdot3^2\\&=36.\end{aligned}$$

出现矛盾.

于是 $P(x)$ 无整数根.

1·63　已知多项式 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 中,系数 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 皆为整数,并且 $f(2)$ 和 $f(3)$ 能被 6 整除.求证 $f(5)$ 也能被 6 整除.

(中国上海市数学竞赛,1963 年)

[证]　$f(2)=a_0\cdot2^n+a_1\cdot2^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\cdot2+a_n$, ①

$f(3)=a_0\cdot3^n+a_1\cdot3^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\cdot3+a_n$. ②

因为　$6\mid f(2)$,则　　$2\mid f(2)$.

于是,由 ① 式　　　$2\mid a_n$.

又因为 $6\mid f(3)$,则　　$3\mid f(3)$.

于是,由 ② 式　　　$3\mid a_n$.

由于 $(2,3)=1$,则　$6\mid a_n$.

$f(5)=a_0(2+3)^n+a_1(2+3)^{n-1}+\cdots+a_{n-2}(2+3)^2+a_{n-1}(2$

$+3)+a_n+a_n-a_n.$

按二项式定理展开,并由 ①、② 有

$$f(5)=f(2)+f(3)-a_n+a_0(C_n^1 2^{n-1}\cdot 3+C_n^2 2^{n-2}\cdot 3^2+\cdots+C_n^{n-1}2\cdot 3^{n-1})+a_1(C_{n-1}^1 2^{n-2}\cdot 3+C_{n-1}^2 2^{n-3}\cdot 3^2+\cdots+C_{n-1}^{n-2}2\cdot 3^{n-2})+\cdots+a_{n-2}C_2^1 2\cdot 3.$$

于是 $f(5)$ 能被 6 整除.

**1·64** 已知对任何整数 $k\neq 27$,数 $a-k^{1964}$ 都能被 $27-k$ 整除.试求 $a$.

(第 27 届莫斯科数学奥林匹克,1964 年)

[**解**] 记 $27-k=m$,则 $k=27-m$.

$$\frac{a-k^{1964}}{27-k}=\frac{a-(27-m)^{1964}}{m}=\frac{a-27^{1964}}{m}+C_{1964}^1 27^{1963}-C_{1964}^2 27^{1962}m+\cdots-m^{1963}.$$

由于上式中从第二项起都是整数,因此必须对任何整数 $m$,$\frac{a-27^{1964}}{m}$ 都是整数.

因此 $$a=27^{1964}.$$

**1·65** $a,b$ 及 $n$ 是固定的自然数,且对任何自然数 $k(k\neq b)$,$a-k^n$ 能被 $b-k$ 整除.证明 $a=b^n$.

(第 4 届全俄数学奥林匹克,1964 年)

[**证**] 由恒等式

$$k^n-b^n=(k-b)(k^{n-1}+k^{n-2}b+\cdots+b^{n-1})$$

可得 $$k-b\mid k^n-b^n.$$

由已知 $$k-b\mid k^n-a,$$

于是有

$$k-b\mid (k^n-b^n)-(k^n-a).$$

即 $$k-b\mid a-b^n.$$

由于 $k$ 是不等于 $b$ 的任意自然数,则 $k-b$ 为任意不等于零的整数,为使 $a-b^n$ 是任意不为零的整数的倍数,仅当 $a-b^n=0$.

即 $a=b^n$.

1·66　设 $m$ 为大于2的正奇数,求使 $2^{1989}$ 整除 $m^n-1$ 的最小自然数 $n$.

（第30届国际数学奥林匹克预选题,1989年）

［解］　记 $n$ 为 $n=2^s q$,其中 $q$ 为奇数,则

$$\begin{aligned}&m^n-1\\&=m^{2^s q}-1\\&=(m^{2^s})^q-1\\&=(m^{2^s}-1)[(m^{2^s})^{q-1}+(m^{2^s})^{q-2}+\cdots+m^{2^s}+1]\\&=(m^{2^s}-1)A.\end{aligned}$$

其中 $A$ 为奇数,于是

$$2^{1989}\mid m^n-1\Longleftrightarrow 2^{1989}\mid m^{2^s}-1.$$

因此可设 $n=2^s$.

(1) 若正奇数 $m=2^k p+1$,其中 $p$ 为奇数,$k>1$.

我们用数学归纳法证明:对所有自然数 $s$

$$2^{s+k}\mid m^{2^s}-1,\text{但 }2^{s+k+1}\nmid m^{2^s}-1.$$

当 $s=1$ 时,

$$\begin{aligned}m^2-1&=(2^k p+1)^2-1\\&=2^{2k}p^2+2^{k+1}p\\&=2^{k+1}(2^{k-1}p^2+p).\end{aligned}$$

所以 $\qquad 2^{k+1}\mid m^2-1,\quad 2^{k+2}\nmid m^2-1.$

假设 $s=t$ 时,

$$2^{k+t}\mid m^{2^t}-1,\quad 2^{k+t+1}\nmid m^{2^t}-1.$$

则 $s=t+1$ 时,

$$\begin{aligned}m^{2^{t+1}}-1&=(m^{2^t})^2-1\\&=(m^{2^t}-1)(m^{2^t}+1).\end{aligned}$$

由于 $m^{2^t}+1$ 为偶数,则 $2\mid m^{2^t}+1,2^2\nmid m^{2^t}+1.$

于是

$$2^{k+t+1}\mid m^{2^{t+1}}-1,\quad 2^{k+t+2}\nmid m^{2^{t+1}}-1.$$

第一章 整除

于是对所有自然数 $s$，

$$2^{k+s} \mid m^{2^s}-1, 2^{k+s+1} \nmid m^{2^s}-1.$$

(2) 若正奇数 $m = 2^k p - 1$，其中 $p$ 为奇数 $k > 1$.

同样可以证明，对所有自然数 $s$，

$$2^{s+k} \mid m^{2^s}-1, \quad 2^{s+k+1} \nmid m^{2^s}-1.$$

于是由 $$2^{1989} \mid m^{2^s}-1$$

可得 $$1989 \leqslant s+k,$$

$$s \geqslant 1989-k.$$

即 $k \leqslant 1989$ 时，最小的指数 $n = 2^{1989-k}$.

$k > 1989$ 时， $n = 2^0 = 1$.

1·67　证明大于 $(\sqrt{3}+1)^{2n}$ 的下一个整数能被 $2^{n+1}$ 整除.

（第 6 届美国普特南数学竞赛，1946 年）

[证]　我们首先证明，大于 $(\sqrt{3}+1)^{2n}$ 的下一个整数是

$$(1+\sqrt{3})^{2n}+(1-\sqrt{3})^{2n}.$$

事实上，由二项式定理，对每个正整数 $n$，都有整数 $A_n$ 和 $B_n$，使得

$$(1+\sqrt{3})^{2n} = A_n + B_n\sqrt{3},$$

$$(1-\sqrt{3})^{2n} = A_n - B_n\sqrt{3}$$

成立.

从而 $$(1+\sqrt{3})^{2n}+(1-\sqrt{3})^{2n} = 2A_n$$

是整数.

由于 $$|1-\sqrt{3}| < 1.$$

则 $$0 < (1-\sqrt{3})^{2n} < 1.$$

于是　$(1+\sqrt{3})^{2n}+(1-\sqrt{3})^{2n}$ 是大于 $(1+\sqrt{3})^{2n}$ 的下一个整数.

于是问题变为证明 $2A_n$ 能被 $2^{n+1}$ 整除，即变为证明 $A_n$ 能被 $2^n$ 整除.

下面用数学归纳法证明，对所有的正整数 $n$， $A_n$ 和 $B_n$ 都能被 $2^n$ 整除.

当 $n = 1$ 时，$(1+\sqrt{3})^2 = 4+2\sqrt{3}$，即 $A_1 = 4$， $B_1 = 2$ 能被 $2^1$ 整除.

假设命题对 $n = k$ 时成立，即

$$2^k \mid A_k, \quad 2^k \mid B_k.$$

$$\begin{aligned} A_{k+1} + B_{k+1}\sqrt{3} &= (1+\sqrt{3})^{2(k+1)} \\ &= (1+\sqrt{3})^2(1+\sqrt{3})^{2k} \\ &= (4+2\sqrt{3})(A_k + B_k\sqrt{3}) \\ &= (4A_k + 6B_k) + (2A_k + 4B_k)\sqrt{3}. \end{aligned}$$

所以 $A_{k+1} = 4A_k + 6B_k, \quad B_{k+1} = 2A_k + 4B_k.$

于是 $2^{k+1} \mid A_{k+1}, \quad 2^{k+1} \mid B_{k+1}.$

从而命题对 $n = k+1$ 成立.

由以上,均有 $2^n \mid A_n, \quad 2^n \mid B_n, \quad n \in N.$

从而 $2^{n+1} \mid 2A_n = (1+\sqrt{3})^{2n} + (1-\sqrt{3})^{2n}.$

**1·68** 求证 $n$ 是正整数时,大于 $(3+\sqrt{5})^{2n}$ 的最小整数能被 $2^{n+1}$ 整除.

(中国江苏省苏州市高中数学竞赛,1987年)

**[证]** 设 $u = 3+\sqrt{5}, \quad v = 3-\sqrt{5}$. 则 $u, v$ 是二次方程 $x^2 - 6x + 4 = 0$ 的两个根.

令 $T_n = u^n + v^n$.

由 $u^2 = 6u - 4, \quad v^2 = 6v - 4.$

可得
$$u^n = 6u^{n-1} - 4u^{n-2},$$
$$v^n = 6v^{n-1} - 4v^{n-2}.$$

于是 $T_n = 6T_{n-1} - 4T_{n-2}, \quad n = 2, 3, \cdots$

从而 $T_n$ 是整数.

由于 $0 < 3-\sqrt{5} < 1$,则

$$0 < (3-\sqrt{5})^n < 1.$$

于是 $T_n = (3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n$ 是大于 $(3+\sqrt{5})^n$ 的最小整数.

由此,命题转化为证明 $2^{n+1} \mid T_{2n}$.

$$\begin{aligned} T_{2n} &= (3+\sqrt{5})^{2n} + (3-\sqrt{5})^{2n} \\ &= (14+6\sqrt{5})^n + (14-6\sqrt{5})^n \\ &= 2^n[(7+3\sqrt{5})^n + (7-3\sqrt{5})^n]. \end{aligned}$$

于是 $2^n \mid T_{2n}.$

$$T_{2n+1}=(3+\sqrt{5})^{2n+1}+(3-\sqrt{5})^{2n+1}$$
$$=2^n[(3+\sqrt{5})(7+3\sqrt{5})^n+(3-\sqrt{5})(7-3\sqrt{5})^n].$$

所以 $$2^n \mid T_{2n+1}. \quad ①$$

下面用数学归纳法证明 $2^{n+1} \mid T_{2n}$.

当 $n=0$ 时,

$$T_0=2, 2^{0+1}=2,$$

所以 $$2^{0+1} \mid T_{2\cdot 0}.$$

即 $n=0$ 时, $2^{n+1} \mid T_{2n}$ 成立.

假设 $n=k$ 时,有 $2^{k+1} \mid T_{2k}$,那么 $n=k+1$ 时,

$$T_{2(k+1)}=6T_{2k+1}-4T_{2k}$$
$$=6(6T_{2k}-4T_{2k-1})-4T_{2k}$$
$$=32T_{2k}-24T_{2k-1}.$$

由 ①, $2^{k-1} \mid T_{2k-1}$ 及 $2^{k+1} \mid T_{2k}$.

从而 $$2^{k+2} \mid 24T_{2k-1}, \quad 2^{k+2} \mid 32T_{2k}.$$

即 $$2^{k+2} \mid T_{2(k+1)}.$$

从而对 $n=k+1$, $2^{n+1} \mid T_{2n}$ 成立.

本题得证.

**1·69** 设 $m$ 是一个奇自然数,且 $m$ 不能被 3 整除.证明 $4^m-(2+\sqrt{2})^m$ 的整数部分可被 112 整除.

(第 31 届国际数学奥林匹克候选题,1990 年)

[证] 由二项式定理可知 $(2+\sqrt{2})^m+(2-\sqrt{2})^m$ 是整数.

从而 $4^m-(2+\sqrt{2})^m=M+(2-\sqrt{2})^m$,

其中 $m$ 是整数.

又因为 $$0<(2-\sqrt{2})^m<1,$$

记 $I=[4^m-(2+\sqrt{2})^m]$,即 $I$ 是 $4^m-(2+\sqrt{2})^m$ 的整数部分,则

$$I=4^m-\{(2+\sqrt{2})^m+(2-\sqrt{2})^m\}.$$

因为 $112=16\cdot 7$,我们先证明 $16 \mid I$.

当 $m=1$ 时,

$$I=4^m-\{(2+\sqrt{2})^m+(2-\sqrt{2})^m\}$$
$$=4-(2+\sqrt{2})-(2-\sqrt{2})$$

$= 0$

$\equiv 0 \pmod{16}$

当 $m \geqslant 2$ 时，由 $m$ 是奇数，且 $m$ 不能被 3 整除，则 $m \geqslant 5$.

于是 $$4^m \equiv 0 \pmod{16}$$

$$(2+\sqrt{2})^m + (2-\sqrt{2})^m$$
$$= 2 \cdot 2^m + 2 \cdot C_m^2 2^{m-2}(\sqrt{2})^2 + 2 \cdot C_m^4 2^{m-4}(\sqrt{2})^4 + \cdots$$
$$\equiv 0 \pmod{16}$$

所以 $$I \equiv 0 \pmod{16}.$$

于是 $$16 \mid I.$$

下面再证 $7 \mid I$.

因为 $m$ 是一个不能被 3 整除的奇自然数，所以 $m = 6k+1$ 或 $m = 6k+5$.

若 $$m = 6k+1.$$

因为 $$4^6 \equiv 1 \pmod 7.$$

$$(2+\sqrt{2})^6 = 2^6 + 2^3(15 \cdot 2^2 + 15 \cdot 2 + 1) + 2^3\sqrt{2}(6 \cdot 2^2 + 20 \cdot 2 + 6)$$
$$= 1 + 7(a + b\sqrt{2}) \quad (a, b \in Z).$$
$$(2-\sqrt{2})^6 = 1 + 7(a - b\sqrt{2}) \quad (a, b \in Z).$$

所以

$$I = 4^{6k+1} - \{(2+\sqrt{2})(2+\sqrt{2})^{6k} + (2-\sqrt{2})(2-\sqrt{2})^{6k}\}$$
$$\equiv 4 - \{(2+\sqrt{2})[1 + 7(c + d\sqrt{2})] + (2-\sqrt{2})[1 + 7(c - d\sqrt{2})]\}$$
$$\equiv 4 - 4 \qquad (c, d \in Z).$$
$$\equiv 0 \pmod 7.$$

所以 $m = 6k+1$ 时，$7 \mid I$.

若 $m = 6k+5$.

$$I = 4^{6k+5} - \{(2+\sqrt{2})^5(2+\sqrt{2})^{6k} + (2-\sqrt{2})^5(2-\sqrt{2})^{6k}\}$$
$$\equiv 4^5 - \{(2+\sqrt{2})^{-1}[1 + 7(c' + d'\sqrt{2})] + (2-\sqrt{2})^{-1}[1 + 7(c' - d'\sqrt{2})]$$
$$\equiv 2 - \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2} + \frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$\equiv 0 \pmod 7.$$

所以 $m = 6k+5$ 时，$7 \mid I$.

于是对不能被 3 整除的奇自然数 $m$，$7 \mid I$.

又因为$(7,16)=1$,所以 $112 \mid I$.

1·70　一个整数数列定义如下:

$$a_0=0,\quad a_1=1,\quad a_n=2a_{n-1}+a_{n-2}\quad (n>1).$$

证明当且仅当 $2^k \mid n$ 时, $2^k \mid a_n$.

(第 29 届国际数学奥林匹克预选题,1988 年)

[证 1]　由初始条件

$$a_0=0,\quad a_1=1$$

及递推关系

$$a_n=2a_{n-1}+a_{n-2}\quad (n>1)$$

不难推出通项公式

$$a_n=\frac{(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}.$$

下面用数学归纳法证明本题.

(1) $k=1$ 时,设 $2 \mid n$,即 $n=2t$, $t\in N$.

$$\begin{aligned}a_{2t}&=\frac{(1+\sqrt{2})^{2t}-(1-\sqrt{2})^{2t}}{2\sqrt{2}}\\&=\frac{(3+2\sqrt{2})^t-(3-2\sqrt{2})^t}{2\sqrt{2}}.\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}[C_t^1 3^{t-1}\cdot 2\sqrt{2}+C_t^3 3^{t-3}(2\sqrt{2})^3+\cdots]\\&=C_t^1 3^{t-1}\cdot 2+C_t^3 3^{t-3}\cdot 2^4+C_t^5 3^{t-5}\cdot 2^7+\cdots.\end{aligned}$$

显然　$$2 \mid a_{2t}.$$

又 $a_2=2a_1+a_0=2$,则 $4 \nmid a_2$,即 $2^2 \nmid a_2$.

于是,当且仅当 $2 \mid n$ 时. $2 \mid a_n$.

(2) 假设 $n=2^k m(k>1,m$ 是奇数$)$ 时,结论成立,即

$$2^k \mid a_n \quad 且\ 2^{k+1} \nmid a_n.$$

我们证明当 $n=2^{k+1}m$ 时, $2^{k+1} \mid a_n$ 且 $2^{k+2} \nmid a_n$.

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{(1+\sqrt{2})^{2^{k+1}m}-(1-\sqrt{2})^{2^{k+1}m}}{2\sqrt{2}}\\&=\frac{[(1+\sqrt{2})^{2^k m}]^2-[(1-\sqrt{2})^{2^k m}]^2}{2\sqrt{2}}\end{aligned}$$

$$= \frac{[(1+\sqrt{2})^{2^k m} - (1-\sqrt{2})^{2^k m}]}{2\sqrt{2}}$$

$$\cdot [(1+\sqrt{2})^{2^k m} + (1-\sqrt{2})^{2^k m}]$$

由归纳假设

$$2^k \left| \frac{(1+\sqrt{2})^{2^k m} - (1-\sqrt{2})^{2^k m}}{2\sqrt{2}} \right.,$$

$$2^{k+1} \nmid \frac{(1+\sqrt{2})^{2^k m} - (1-\sqrt{2})^{2^k m}}{2\sqrt{2}}.$$

下面考察

$$(1+\sqrt{2})^{2^k m} + (1-\sqrt{2})^{2^k m}.$$

为方便计,令 $t = 2^k m$,则

$$M = (1+\sqrt{2})^t + (1-\sqrt{2})^t$$
$$= 2(1 + C_t^2 2 + C_t^4 2^2 + \cdots),$$

于是 $$2 \mid M.$$

又 $$1 + C_t^2 2 + C_t^4 2^2 + \cdots \text{是奇数},$$

所以 $$2^2 \nmid M.$$

因此 $2^{k+1} \mid a_n$, 且 $2^{k+2} \nmid a_n$.

于是对 $n = 2^{k+1} m$,结论成立,

因此对所有的自然数 $k$,结论成立.

即 $$2^k \mid n \Longleftrightarrow 2^k \mid a_n.$$

**[证 2]** 由于

$$(1+\sqrt{2})^n = A_n + \sqrt{2} B_n, \quad A_n, \quad B_n \in N. \qquad ①$$

则 $$(1-\sqrt{2})^n = A_n - \sqrt{2} B_n. \qquad ②$$

由证 1 $$a_n = \frac{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}},$$

则 $$a_n = B_n.$$

① × ② 得 $$A_n^2 - 2B_n^2 = (-1)^n.$$

于是,$A_n$ 恒为奇数.

当 $n$ 为奇数时,$2B_n^2 = A_n^2 + 1 \equiv 2 \pmod 4$.

所以 $B_n$ 是奇数.

设 $n = 2^k(2l+1)$.

我们证明 $2^k \mid B_n$， 且 $2^{k+1} \nmid B_n$.

当 $k=0$ 时，$n$ 为奇数，上面已证明 $B_n$ 是奇数，此时结论成立.

假设结论对 $k$ 成立，则由于

$$(1+\sqrt{2})^{2n}=(A_n+\sqrt{2}B_n)^2=A_{2n}+\sqrt{2}B_{2n},$$

所以
$$B_{2n}=2A_nB_n.$$

由于 $A_n$ 是奇数， $2^k \mid B_n$ 且 $2^{k+1} \nmid B_n$，

则
$$2^{k+1} \mid B_{2n}, \text{且 } 2^{k+2} \nmid B_{2n}.$$

于是结论对 $k+1$ 成立.

从而对一切 $k \in N$，

$$2^k \mid a_n \quad 且 \ 2^{k+1} \nmid a_n.$$

**1·71** 证明所有形如$\frac{1}{mn}$的数之和不是整数，其中 $m,n$ 是自然数，且 $1 \leqslant m \leqslant n \leqslant 1986$.

（第 20 届全苏数学奥林匹克，1986 年）

**[证]** 在集合 $M=\{1,2,\cdots,1985,1986\}$ 中，能被 $3^6$ 整除的数只有两个： $729=3^6$ ， $1458=2\cdot 3^6$.

除去这两个数，$M$ 中的其余 1984 个数均不能被 $3^6$ 整除.

设所有形如$\frac{1}{mn}$的数之和($m,n \in \{1,2,\cdots 1986\}$) 为 $S$，则

$$S=\frac{a}{3^{11}\cdot b}+\frac{1}{729\cdot 1458}.$$

其中 $b$ 不能被 3 整除，因而

$$S=\frac{6a+b}{2b\cdot 3^{12}}.$$

由于分子不能被 3 整除，所以 $S$ 不是整数.

**1·72** 证明存在能被 $5^{1000}$ 整除且在其中不包含数字 0 的数.

（第 1 届全苏数学奥林匹克，1967 年）

**[证]** 首先注意到 $5^{1000}$ 的个位数不是 0，而是 5.

假设 $5^{1000}$ 中从个位数起第 $k$ 位是 0，而从个位起到第 $k-1$ 位各位数字都不是 0.

考察 $5^{1000}\cdot 10^{k-1}$ 与 $5^{1000}$ 的和.

这个数的第 $k$ 位已不是 0，并且从个位数起到第 $k$ 位的各位数码都不是 0，又有

$$5^{1000} \mid 5^{1000}\cdot 10^{k-1}+5^{1000}.$$

重复这个过程，可以得到后1000个数码都不等于0的数. 我们留下这1000个数码，去掉其余所有的数码，这样得到的数显然能被 $5^{1000}$ 整除，这个数即符合要求.

1·73　证明当且仅当 $m-n$ 可被 $3^k$ 整除时，$4^m-4^n$ 可被 $3^{k+1}$ 整除. 试对(1) $k=1,2,3$；(2) 任何自然数 $k$ 讨论问题，其中 $m\in N$，$n\in N$ 且 $m>n$.

（第46届莫斯科数学奥林匹克，1983年）

[证]　首先证明 $4^{3^k\alpha}-1$ 恰能够被 $3^{k+1}$ 整除，其中 $k$ 和 $\alpha$ 是自然数，且 $3\nmid\alpha$.

我们用数学归纳法.

(1) $k=1$ 时，$4^{3\alpha}-1=64^{\alpha}-1=63(64^{\alpha-1}+\cdots+64+1)$.

由于 $64^{\alpha-1}+\cdots+64+1\equiv\alpha\not\equiv 0\pmod 3$，则 $4^{3\alpha}-1$ 恰能被 $9=3^{1+1}$ 整除.

$k=2$ 时，$4^{9\alpha}-1=(4^9-1)[(4^9)^{\alpha-1}+\cdots+4^9+1]$.

由于　$4^9-1=64^3-1=63(64^2+64+1)$，则 $4^{9\alpha}-1$ 恰能被 $27=3^{2+1}$ 整除.

$k=3$ 时，$4^{27\alpha}-1=(4^{27}-1)[(4^{27})^{\alpha-1}+\cdots+4^{27}+1]$.

由于　$4^{27}-1=(4^9-1)[(4^9)^2+4^9+1]$，

而 $4^9-1$ 恰能被 $3^3$ 整除，$(4^9)^2+4^9+1$ 恰能被3整除，则 $4^{27\alpha}-1$ 恰能被 $81=3^{3+1}$ 整除.

(2) 假设 $4^{3^k\alpha}-1$ 恰能被 $3^{k+1}$ 整除，则

$$\begin{aligned}4^{3^{k+1}\alpha}-1&=(4^{3^k\alpha})^3-1\\&=(4^{3^k\alpha}-1)[(4^{3^k\alpha})^2+4^{3^k\alpha}+1].\end{aligned}$$

由归纳假设知 $(4^{3^k\alpha})^2+4^{3^k}+1$ 恰能被3整除，所以　$4^{3^{k+1}\alpha}-1$ 恰能被 $3^{k+1}\cdot 3=3^{(k+1)+1}$ 整除.

于是对 $k+1$ 命题成立.

由于 $4^m-4^n=4^n(4^{m-n}-1)$，则由上面的结论，当且仅当 $m-n$ 能被 $3^k$ 整除时，$4^m-4^n$ 能被 $3^{k+1}$ 整除.

1·74　设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ 是一个 $n$ 次多项式，

且 $a_0+a_1+\cdots+a_n=0$.

证明 $f(x^{k+1})$ 必能被

$$x^k+x^{k-1}+\cdots+x+1$$

整除.



(中国安徽省数学竞赛,1980年)

[证] 因为 $a_0+a_1+\cdots+a_n=0$.

所以有

$$\begin{aligned}f(x)&=(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n)-(a_0+a_1+\cdots+a_n)\\&=a_0(x^n-1)+a_1(x^{n-1}-1)+\cdots+a_{n-1}(x-1)\\&=(x-1)[a_0(x^{n-1}+\cdots+x+1)+a_1(x^{n-2}+\cdots+x\\&\quad+1)+\cdots+a_{n-1}]\end{aligned}$$

$$f(x^{k+1})=(x^{k+1}-1)[a_0(x^{n-1}+\cdots+x+1)+\cdots+a_{n-1}]$$

由于 $x^{k+1}-1=(x-1)(x^k+x^{k-1}+\cdots+x+1)$.

所以 $f(x^{k+1})$ 能被 $x^k+x^{k-1}+\cdots+x+1$ 整除.

1·75 证明对任意的自然数 $n$,数 $A_n=5^n+2\cdot3^{n-1}+1$ 能被8整除.

(匈牙利数学奥林匹克,1912年)

[证1] 用数学归纳法.

(1) 当 $n=1$ 时, $A_1=5^1+2\cdot3^{1-1}+1=8$ 能被8整除.

(2) 假设 $A_k=5^k+2\cdot3^{k-1}+1$ 能被8整除.

下面我们证明 $A_{k+1}$ 能被8整除.

$$\begin{aligned}A_{k+1}&=5^{k+1}+2\cdot3^k+1\\&=5\cdot5^k+3\cdot2\cdot3^{k-1}+1\\&=5\cdot5^k+5\cdot2\cdot3^{k-1}+5-2\cdot2\cdot3^{k-1}-4\\&=5(5^k+2\cdot3^{k-1}+1)-4(3^{k-1}+1)\end{aligned}$$

由归纳假设,$8\mid5^k+2\cdot3^{k-1}+1$,

又对于自然数 $k$,$2\mid3^{k-1}+1$,所以

$$8\mid4(3^{k-1}+1).$$

因而 $$8\mid A_{k+1}.$$

综合(1),(2),对任意的自然数 $n$,总有

$$8\mid A_n.$$

[证 2]　当 $n$ 为奇数时，

$$A_n = (5^n + 3^n) - (3^{n-1} - 1).$$

由于

$$5^n + 3^n = (5+3)(5^{n-1} - 5^{n-2}\cdot 3 + \cdots + 3^{n-1}) = 8(5^{n-1} - 5^{n-2}\cdot 3 + \cdots + 3^{n-1}).$$

则

$$8 \mid 5^n + 3^n.$$

又 $n-1$ 为偶数，设 $n-1=2m$，则

$$3^{n-1} - 1 = 3^{2m} - 1 = 9^m - 1 = (8+1)^m - 1 = 8M.$$

其中 $M$ 是整数，则 $8 \mid 3^{n-1} - 1$.

于是 $8 \mid A_n$.

当 $n$ 为偶数时，$n-1$ 为奇数，

$$A_n = 5(5^{n-1} + 3^{n-1}) - (3^n - 1).$$

设 $n = 2m$，则

$$3^n - 1 = 3^{2m} - 1 = (8+1)^m - 1 = 8M,$$

其中 $M$ 为整数，从而 $8 \mid 3^n - 1$.

又 $8 \mid 5^{n-1} + 3^{n-1}$，所以

$$8 \mid A_n.$$

于是对任意自然数，$8 \mid A_n$.

1·76　证明对每个自然数 $n$，$1^{1987} + 2^{1987} + \cdots + n^{1987}$ 不能被 $n+2$ 整除.

（第 21 届全苏数学奥林匹克，1987 年）

[证]　当 $n=1$ 时，$3 \nmid 1^{1987} = 1$.

当 $n \geqslant 2$ 时，设 $a_n = 1^{1987} + 2^{1987} + \cdots + n^{1987}$. 则

$$2a_n = 1^{1987} + 2^{1987} + \cdots + n^{1987} + n^{1987} + \cdots + 2^{1987} + 1^{1987} = 2 + (n^{1987} + 2^{1987}) + [(n-1)^{1987} + 3^{1987}] + \cdots + (n^{1987} + 2^{1987}).$$

由于对每一个 $k = 2, 3, \cdots$

$$n+2 \mid k^{1987} + (n+2-k)^{1987}.$$

于是

$$2a_n \equiv 2 \pmod{n+2}.$$

所以 $a_n$ 不能被 $n+2$ 整除.

1·77　证明 $1^{1983} + 2^{1983} + \cdots + 1983^{1983}$ 能够被 $1+2+3+\cdots+1983$ 整除.

（第 46 届莫斯科数学奥林匹克，1983 年）

**［证］** 可以证明一般的结论：

$$S = 1^n + 2^n + \cdots + n^n \quad (n \text{ 为奇数})$$

能够被 $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ 整除.

因为 $n$ 是奇数，则

$$n \mid k^n + (n-k)^n, \quad k = 1,2,\cdots,n-1.$$

于是有

$$2S = [1^n + (n-1)^n] + [2^n + (n-2)^n] + \cdots + [(n-1)^n + 1^n] + 2n^n,$$

即 $2S$ 能被 $n$ 整除，

同理

$$2S = [1^n + n^n] + [2^n + (n-1)^n] + \cdots + [(n-1)^n + 2^n] + [n^n + 1^2],$$

即 $2S$ 能被 $n+1$ 整除，

因为 $n$ 和 $n+1$ 互素，所以 $2S$ 能被 $n(n+1)$ 整除.

又因为 $n(n+1)$ 是偶数，则 $S$ 能被 $\dfrac{n(n+1)}{2}$ 整除.

特别地，对 $n = 1983$ 也成立.

1·78　试证 2 的每个正整数幂都有一个倍数，使其数字（在十进制中）均不为 0.

（中国国家集训队选拔考试，1990 年）

**［证 1］** 首先约定，所谓某数的第 $l$ 位数字一律指从右向左数得的第 $l$ 个数码.

对任何 $k \in N$，　令 $N_1 = 2^k$.

由 $5 \nmid 2^k$ 知，$N_1$ 的个位数码不为 0，即第 1 位数码不为 0.

若 $N_1$ 的各位数码都不为 0，则本题得证.

若不然，设 $N_1$ 的前 $m-1$ 位数码均不为 0，而第 $m$ 位数码为 0（$m \geqslant 2$），令

$$N_2 = (1 + 10^{m-1})2^k = (1 + 10^{m-1})N_1.$$

则 $N_2$ 的前 $m$ 位数码均不为 0. 如果需要，再对 $N_2$ 进行类似地处理，每一次至少增加一个非零数码，故经过有限次后，定能得到一个数

$N_s$,它的前 $k$ 位数码均不为 0,且 $2^k \mid N_s$.

不妨设 $N_s$ 有 $q > k$ 位数码,并把 $N_s$ 写作

$$N_s = m \cdot 10^k + n,$$

这里 $n$ 为一个 $k$ 位数码的自然数.

因为 $2^k \mid N_s,\quad 2^k \mid 10^k,$

所以 $2^k \mid n$,且 $n$ 的各位数码不为 0.

这时 $n$ 即为所求.

[证 2] 用数学归纳法证明如下命题:

对任意 $k \in N$,存在仅含 1 和 2 的一个 $k$ 位数 $m_k$,使得 $2^k \mid m_k$.

显然这是比本题更强的结论.

(1) 当 $k = 1$ 时, 取 $m_1 = 2$ 即可.

(2) 假设 $k = t$ 时,命题成立,即存在 $m_t$ 为仅含数码 1 和 2 的 $t$ 位数,且 $2^t \mid m_t$.

设 $m_t = 2^t q$,这里 $q$ 为正整数.

考察下面的两个数

$$m_t + 10^t = 2^t(q + 5^t), \quad ①$$

$$m_t + 2 \cdot 10^t = 2^t(q + 2 \cdot 5^t). \quad ②$$

当 $q$ 为奇数时, $2^{t+1} \mid m_t + 10^t$,

当 $q$ 为偶数时, $2^{t+1} \mid m_t + 2 \cdot 10^t$.

取其中能被 $2^{t+1}$ 整除的数为 $m_{t+1}$,注意到 ① 和 ② 中的数分别相当于在 $m_t$ 的前面添加 1 和 2,因此 $m_{t+1}$ 仍为仅含 1 和 2 的 $t+1$ 位数,且 $2^{t+1} \mid m_{t+1}$.

所以命题对 $k = t + 1$ 成立.

综上所述,对所有 $k \in N$,命题成立,从而原题成立.

1·79 决定所有正整数对$(m,n)$,使得

$$1 + x^n + x^{2n} + \cdots + x^{mn}$$

能被 $1 + x + x^2 + \cdots + x^m$ 整除.

(第 6 届美国数学奥林匹克,1977 年)

[解] 由于 $1 + x^n + x^{2n} + \cdots + x^{mn} = \dfrac{x^{(m+1)n} - 1}{x^n - 1}$,

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^m = \frac{x^{m+1} - 1}{x - 1}.$$

多项式 $1+x^n+x^{2n}+\cdots+x^{mn}$ 能被 $1+x+x^2+\cdots+x^m$ 整除就等价于

$$\frac{x^{(m+1)n}-1}{x^{m+1}-1}\cdot\frac{x-1}{x^n-1} \qquad ①$$

是一个整系数多项式.

对于所有的正整数 $m$ 和 $n$,都有

$$x^{m+1}-1 \mid x^{(m+1)n}-1,$$
$$x^n-1 \mid x^{(m+1)n}-1.$$

因此,为使 ① 是整系数多项式,只要 $x^{m+1}-1$ 和 $x^n-1$ 没有 $x-1$ 以外的公因式就可以.事实上,如果 $x^{m+1}-1$ 和 $x^n-1$ 有 $x-1$ 以外的公因式,则 $x^{m+1}-1=0$ 和 $x^n-1=0$ 有除 1 以外的公共根,但 $x^{(m+1)n}-1=0$ 无重根,故 $\frac{(x^{(m+1)n}-1)(x-1)}{(x^n-1)(x^{m+1}-1)}$ 不是整系数多项式.

故满足题目要求的充分必要条件是 $m+1$ 与 $n$ 互素.

1·80　在正整数集上定义一个函数 $f(n)$ 如下:当 $n$ 为偶数时 $f(n)=\frac{n}{2}$;$n$ 为奇数时 $f(n)=n+3$.

(1) 证明对任何一个正整数 $m$ ,数列

$$a_0=m,\quad a_1=f(a_0),\quad \cdots,\quad a_n=f(a_{n-1}),\quad \cdots$$

中总有一项为 1 或 3.

(2) 在全部正整数中,哪些 $m$ 使上述数列必然出现 3?哪些 $m$ 使上述数列必然出现 1?

(中国高中数学联赛,1979 年)

**[解]**　(1) 若数列中的某一项 $a_k>3$,则 $a_{k+1}$ 或 $a_{k+2}$ 必小于 $a_k$.

这是因为,当 $a_k$ 为偶数时,

$$a_{k+1}=f(a_k)=\frac{a_k}{2}<a_k,$$

当 $a_k$ 为奇数时,　$a_{k+1}=f(a_k)=a_k+3$ 为偶数,

$$a_{k+2}=f(a_{k+1})=\frac{a_{k+1}}{2}=\frac{f(a_k)}{2}=\frac{a_k+3}{2}<a_k.$$

不妨设 $a_{k+1}<a_k$.

若仍有 $a_{k+1}>3$,同理,　$a_{k+2}$ 或 $a_{k+3}$ 必小于 $a_{k+1}$,如此继续下去.

由于 $a_k$ 是有限的,所以必有某个 $a_{k+1}\leqslant 3$.

再注意到 $a_{k+1}$ 是正整数,所以必有

$$a_{k+1} = 1, \quad 2 \text{ 或 } 3.$$

若 $a_{k+1} = 1$ 或 3,则结论已得证.

若 $a_{k+1} = 2$,则 $a_{k+2} = f(a_{k+1}) = \frac{a_{k+1}}{2} = 1$,结论亦得证.

(2) 若 $a_0 = m$ 是 3 的倍数,设 $m = 3k$($k$ 为正整数).则

$$a_1 = \begin{cases} f(3k) = \frac{3k}{2}, & k \text{ 为偶数}, \\ f(3k) = 3k + 3, & k \text{ 为奇数}. \end{cases}$$

即 $a_1$ 仍是 3 的倍数.

由此又推得 $a_2 = f(a_1)$ 是3的倍数,由此继续下去,可知数列的所有项都是3的倍数,这样,在此数列中不会出现1,于是由(1)可知,此数列必出现 3.

若 $a_0 = m$ 不是 3 的倍数.

设 $m = 3k + 1$,则

$$a_1 = \begin{cases} \frac{3(2l+1)+1}{2} = 3l + 2, & \text{当 } k = 2l + 1 \text{ 时}, \\ (3k + 1) + 3 = 3(k + 1) + 1, & \text{当 } k \text{ 为偶数时}. \end{cases}$$

则 $a_1$ 不是 3 的倍数.

设 $m = 3k + 2$,同理可证 $a_1$ 不是 3 的倍数.

如此继续下去可知,当 $a_0 = m$ 不是 3 的倍数时,数列的所有项都不是 3 的倍数,再由(1),此数列必出现 1.

1·81　给定 $mn + 1$ 个正整数 $a_1, a_2, \cdots, a_{mn+1}$,且

$$0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{mn+1}.$$

证明存在 $m + 1$ 个数,使它们中没有一个数能够被另一个数整除,或者存在 $n + 1$ 个数,使得依小大顺序排成序列,除最前面的一个数之外,每个数都能被它前面的数整除.

(第 27 届美国普特南数学竞赛,1966 年)

[证]　对任何一个数 $a_i$,我们都可以构造一个整除链

$$a_i = a_{i_1}, \quad a_{i_2}, \cdots, \quad a_{i_{\alpha_i}}.$$

使得除 $a_i$ 外,每个数都能被它前面的数整除,$\alpha_i \geqslant 1$,称 $\alpha_i$ 为这个整除链的长度.

所有这种从 $a_i$ 开始的整除链中,使 $\alpha_i$ 最大的,我们称之为从 $a_i$ 开始的最大整除链,其长度记为 $A(i)$.

如果存在某个 $i$,使 $A(i) \geqslant n+1$,那么从 $a_i$ 开始的最大整除链长 $\geqslant n+1$,取其前面的 $n+1$ 个数,则这 $n+1$ 个数中,除前面的一个数之外,每个数都能被它前面的数整除.

如果对每一个 $i$, $A(i) \leqslant n$, 即 $A(1), A(2), \cdots, A(mn+1)$ 都只能取 $1,2,\cdots,n$ 中的值,因此至少有 $\left[\frac{mn+1}{n}\right]+1$ 个相同,设

$$A(i_1)=A(i_2)=A(i_3)=\cdots=A(i_{m+1})=k,(1 \leqslant k \leqslant n).$$

则 $a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_{m+1}}$ 这 $m+1$ 个数中没有一个能被另一个整除.

这是因为,若 $a_{i_2}$ 能被 $a_{i_1}$ 整除,那么从 $a_{i_2}$ 开始的最大整除链长 $k$,在它的前面加上一个数 $a_{i_1}$,则得到从 $a_{i_1}$ 开始的一条整除链,长度为 $k+1$,那么 $a_{i_1}$ 开始的最大整除链长 $\geqslant k+1$,与 $A(i_1)=k$ 矛盾.这时,$a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_{m+1}}$ 是符合要求的 $m+1$ 个数.

1·82 设 $n$ 是不小于3的自然数,以 $f(n)$ 表示不是 $n$ 的因数的最小自然数(例如 $f(12)=5$).如果 $f(n) \geqslant 3$,又可作 $f(f(n))$.类似地,如果 $f(f(n)) \geqslant 3$,又可作 $f(f(f(n)))$ 等等.如果

$$\underbrace{f(f(\cdots f}_{k\text{个}f}(n)\cdots))=2$$

就把 $k$ 叫做 $n$ 的"长度".

如果用 $l_n$ 表示 $n$ 的长度,试对任意的自然数 $n(n \geqslant 3)$,求 $l_n$,并证明你的结论.

(第3届中国中学生数学冬令营,1988年)

注:中国中学生数学冬令营即中国数学奥林匹克.

**[解1]** (1) 当 $n$ 为奇数时,$f(n)=2$.所以 $l_n=1$.

(2) 我们指出,对任意 $n \geqslant 3$,都有

$$f(n)=p^k. \qquad ①$$

其中 $p$ 为质数而 $k$ 为正整数.

实际上,若①不成立,设

$$f(n)=p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_m^{k_m}. \qquad ②$$

其中 $p_1, \cdots p_m$ 为互不相同的质数,而 $k_1, \cdots, k_m$ 为正整数,且 $m>1$.

则由②知.存在两个互质的且均大于1的自然数 $a$ 和 $b$,使

$$f(n) = ab.$$

显然，$$a < f(n), \quad b < f(n).$$

既然 $f(n)$ 是不能整除 $n$ 的最小自然数，所以有 $a \mid n$, $b \mid n$.

从而由 $(a,b) = 1$ 得 $ab \mid n$，即

$$f(n) \mid n.$$

出现矛盾，从而证明了 ① 成立.

(3) 由 ① 知，若 $p$ 为奇数，则 $f(f(n)) = 2$，即

$$l_n = 2.$$

若 $p = 2$，且 $k \geqslant 2$，则

$$f(f(n)) = 3,$$

$$f(f(f(n))) = 2.$$

即 $$l_n = 3.$$

(4) 对于自然数 $n$，若存在正整数 $k \geqslant 2$，使得

$$j \mid n, \quad j = 2,3,\cdots, \quad 2^k - 1.$$

且 $$2^k \nmid n.$$

则 $$f(n) = 2^k.$$

此时 $$l_n = 3.$$

若 $n$ 为偶数且不属于上述情况，则 $l_n = 2$.

于是 $$l_n = 1,2,3.$$

**[解 2]** 设 $f(n) = m = 2^a \cdot b$ ($n \geqslant 3$, $m \geqslant 2$, $b$ 为正奇数，$a$ 为非负整数).

由题设，$m \nmid n$，

又因为 $(2^a, b) = 1$，所以

$$2^a \nmid n \text{ 或 } b \nmid n.$$

而 $$2^a \leqslant m, b \leqslant m.$$

由 $m$ 是不是 $n$ 的约数的最小自然数.

所以 $$f(n) = 2^a \quad \text{或} \ f(n) = b.$$

(1) $f(n) = 2^a$ 时，

若 $a = 1$，则 $f(n) = 2$，$l_n = 1$.

若 $a > 1$，则 $f(f(n)) = 3$，$f(f(f(n))) = 2$，即

$$l_n = 3.$$

(2) $f(n) = b$ 时，$f(f(n)) = f(b) = 2$，即

$$l_n = 2.$$

于是 $$l_n = 1,2,3.$$



1·83　试求出所有的整数 $a,b,c$，其中 $1 < a < b < c$，且使得

$$(a-1)(b-1)(c-1)$$

是 $abc-1$ 的约数.

（第 33 届国际数学奥林匹克，1992 年）

[解 1]　由题设有 $a \geqslant 2,\quad b \geqslant 3,\quad c \geqslant 4.$

因为
$$\frac{a-1}{a} = 1 - \frac{1}{a} \geqslant \frac{1}{2},$$
$$\frac{b-1}{b} = 1 - \frac{1}{b} \geqslant \frac{2}{3},$$
$$\frac{c-1}{c} = 1 - \frac{1}{c} \geqslant \frac{3}{4}.$$

三式相乘得
$$\frac{(a-1)(b-1)(c-1)}{abc} \geqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

记 $s = \dfrac{abc-1}{(a-1)(b-1)(c-1)}$，　则
$$\frac{abc-1}{(a-1)(b-1)(c-1)} < \frac{abc}{(a-1)(b-1)(c-1)} \leqslant 4.$$

由题设，$s$ 应为正整数，因而 $s = 1,2,3.$

(1) 若 $s = 1$，即
$$(a-1)(b-1)(c-1) = abc - 1,$$
$$a + b + c = ab + bc + ca. \qquad ①$$

但由 $a < ab,\quad b < bc,\quad c < ca$，则
$$a + b + c < ab + bc + ca.$$

与 ① 式矛盾，所以 $s \neq 1.$

(2) 若 $s = 2$，即
$$2(a-1)(b-1)(c-1) = abc - 1 < abc. \qquad ②$$

由 $abc-1$ 是偶数知 $a,b,c$ 均为奇数.

再由 $c > b > a > 1$ 得 $a \geqslant 3,\quad b \geqslant 5,\quad c \geqslant 7.$

若 $b \geqslant 7$，　则 $c \geqslant 9$，从而有
$$\frac{(a-1)(b-1)(c-1)}{abc} \geqslant \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} = \frac{32}{63} > \frac{1}{2},$$

$$2(a-1)(b-1)(c-1) > abc.$$

与 ② 式矛盾.

所以只能有 $b=5$, $a=3$,代入 ② 得

$$16(c-1)=15c-1,$$
$$c=15.$$

即 $a=3$, $b=5$, $c=15$.

(3) 若 $s=3$,即

$$3(a-1)(b-1)(c-1)=abc-1<abc. \quad ③$$

若 $a \geqslant 3$,则 $b \geqslant 4$, $c \geqslant 5$,从而

$$\frac{(a-1)(b-1)(c-1)}{abc} \geqslant \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{5} > \frac{1}{3},$$
$$3(a-1)(b-1)(c-1) > abc.$$

与 ③ 式矛盾.所以只能有 $a=2$.若 $b \geqslant 5$,则

$$\frac{(a-1)(b-1)(c-1)}{abc} \geqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{3}.$$
$$3(a-1)(b-1)(c-1) \geqslant abc.$$

仍与 ③ 式矛盾.所以 $b$ 只能为 3,4.

若 $b=3$,由 ③ 式有

$$6(c-1)=6c-1.$$

此方程无解.

若 $b=4$,由 ③ 式

$$9(c-1)=8c-1,$$

解得
$$c=8.$$

即 $a=2$, $b=4$, $c=8$.

综合以上讨论,得到两组解

$$\begin{cases} a=3, \\ b=5, \\ c=15. \end{cases} \qquad \begin{cases} a=2, \\ b=4, \\ c=8. \end{cases}$$

**[解 2]** 令 $x=a-1$, $y=b-1$, $z=c-1$, 则由 $1<a<b<c$ 知, $x,y,z$ 均为正整数,且 $x<y<z$.

$$\begin{aligned} abc-1 &= (x+1)(y+1)(z+1)-1 \\ &= xyz+xy+yz+zx+x+y+z. \end{aligned}$$

由题设 $xyz$ 是 $xyz+xy+yz+zx+x+y+z$ 的约数，即

$$xyz \mid xy+yz+zx+x+y+z.$$

(1) 若 $x \geqslant 3$，则 $y \geqslant 4, z \geqslant 5$，因而

$$\begin{aligned}&\frac{xy+yz+zx+x+y+z}{xyz}\\&=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\\&\leqslant \frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 3}\\&=\frac{59}{60}<1.\end{aligned}$$

从而 $\quad xyz \nmid xy+yz+zx+x+y+z.$

于是 $x \leqslant 2.$

(2) 当 $x=1$ 时，本题转化为

$$yz \mid yz+2(y+z)+1,$$

即

$$yz \mid 2(y+z)+1.$$

于是 $y$ 为奇数.

$$yz \leqslant 2(y+z)+1 \leqslant 4z-1.$$

从而 $\quad y<4.$

又 $y>x=1$ 及 $y$ 是奇数，所以 $\quad y=3.$

此时 $\quad xyz=3z,$

$$(x+1)(y+1)(z+1)-1=8z+7.$$

于是 $3z \mid 8z+7$，即

$$3z \mid 9z+(7-z).$$

由 $3z$ 是 $7-z$ 的约数及 $z>3$ 知， $\quad z=7.$

从而 $x=1,\quad y=3,\quad z=7$，即

$$a=2,\quad b=4,\quad c=8.$$

(3) 当 $x=2$ 时，本题转化为

$$2yz \mid 3(y+z)+yz+2$$

若 $y$ 和 $z$ 均为奇数或一为奇数一为偶数，则 $3(y+z)+yz+2$ 为奇数，不是 $2yz$ 的倍数，所以 $y$ 和 $z$ 均为偶数.

所以 $\quad y \geqslant 4, z \geqslant y+2.$

由 $\quad 2yz \leqslant 3y+3z+yz+2$

$$\leqslant yz + 3z + 3z - 6 + 2$$
$$= yz + 6z - 4$$
$$< yz + 6z,$$

可得 $yz < 6z, y < 6.$

于是 $y = 4$. 此时有

$$8z \mid 7z + 14,$$

即 $$8z \mid 8z + (14 - z).$$

于是 $$z = 14.$$

从而 $x = 2, \quad y = 4, \quad z = 14$, 即

$$a = 3, \quad b = 5, \quad c = 15.$$

综合以上，所求的正整数 $a, b, c$ 有两组：

$$\begin{cases} a = 2, \\ b = 4, \\ c = 8. \end{cases} \quad \begin{cases} a = 3, \\ b = 5, \\ c = 15. \end{cases}$$

1·84　设 $f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$，其中 $n$ 是一个大于 1 的整数．求证：$f(x)$ 不能表示为两个多项式的乘积，其中每一个多项式都具有整数系数，而且它们的次数都不低于一次．

（第 34 届国际数学奥林匹克，1993 年）

［证 1］　假设 $f(x)$ 可分解为两个整系数多项式之积

$$f(x) = g(x) \cdot h(x). \qquad ①$$

其中 $g(x) = \sum_{i=0}^{p} a_i x^i (a_p = 1), \quad h(x) = \sum_{j=0}^{q} b_j x^j (b_q = 1), \quad p, q \in N, \quad a_0, a_1, \cdots, a_{p-1}, b_0, b_1, \cdots, b_{q-1} \in Z.$

首先证明 $p$ 和 $q$ 均不小于 2.

若不然，不妨设 $p = 1$，则

$$f(x) = (x + a_0) h(x).$$

由于 $a_0 b_0 = 3$，则有

$$a_0 = \pm 1, \quad b_0 = \pm 3.$$

即 $f(x)$ 有根 $\pm 1$ 或 $\pm 3$.

我们计算 $f(1), f(-1), f(3), f(-3)$ 的值.

$f(1) = 1 + 5 + 3 = 9 \neq 0,$

$$f(-1) = (-1)^n + 5(-1)^{n-1} + 3$$

第一章　整除

$$=(-1)^{n-1}\cdot 4+3\neq 0,$$

$$f(3)=3^n+5\cdot 3^{n-1}+3\neq 0,$$

$$f(-3)=(-3)^n+5(-3)^{n-1}+3$$

$$=(-3)^{n-1}\cdot 2+3\neq 0.$$



所以 $\pm 1, \pm 3$ 不可能是 $f(x)$ 的根.

于是 $p,q$ 均不小于 2.

设 $2\leqslant p\leqslant q\leqslant n-2$.

由 $a_0b_0=3$,不妨设 $a_0=3,\quad b_0=1$.

设 $a_1,a_2,\cdots,a_{p-1}$ 中不能被3整除的系数中下标最小的为 $a_k$,即有 $k<p$,且

$$3\mid a_1,\quad 3\mid a_2,\cdots,\quad 3\mid a_{k-1},\quad 3\nmid a_k \qquad ②$$

考察 ① 中两边 $x^k$ 的系数,有

$$0=a_kb_0+a_{k-1}b_1+\cdots+a_0b_k,$$

即
$$a_k=-(a_{k-1}b_1+\cdots+a_0b_k).$$

由 $3\mid a_i(i=0,1,\cdots,k-1)$ 可知 $3\mid a_k$,导出矛盾.

于是,对所有 $a\leqslant i\leqslant p-1,\quad 3\mid a_i,\quad$ 而 $a_p=1$.

考察 $x^p$ 的系数,则有

$$0=1+a_{p-1}b_1+\cdots+a_0b_p$$

$$\equiv 1\pmod 3.$$

出现矛盾.

所以 $f(x)$ 不能分解为两个整系数多项式的乘积.

**[证 2]** 假设 $f(x)$ 可分解为两个整系数多项式之积,设

$$f(x)=g(x)\cdot h(x).$$

由于 $f(x)$ 的首项系数是1,则整系数多项式 $g(x)$ 和 $h(x)$ 的首项系数都是 1.

由于

$$g(0)h(0)=f(0)=3.$$

其中 $g(0)\in Z,\quad h(0)\in Z$,则

$$|g(0)|=1\text{ 或 }|h(0)|=1.$$

不妨设 $|g(0)|=1$,且设 $g(x)$ 有 $k$ 个根 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k(k<n)$,则由韦达定理知

$$|\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k| = 1, \qquad ①$$

又 $\alpha_i$ 为 $f(x)$ 的根，得

$$\alpha_i^n + 5\alpha_i^{n-1} + 3 = 0,$$

$$\alpha_i^{n-1}(\alpha_i + 5) = -3,$$

$$|\alpha_i|^{n-1}|\alpha_i + 5| = 3. \qquad ②$$

由 ① 得

$$\prod_{i=1}^{k}|\alpha_i + 5||\alpha_i|^{n-1} = 3^k = \prod_{i=1}^{k}|\alpha_i + 5|.$$

设 $|\alpha_k + 5| = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant k}\{|\alpha_i + 5|\}$，则

$$|\alpha_k + 5| \leqslant 3.$$

又因为

$$5 = |5 + \alpha_k - \alpha_k| \leqslant |-\alpha_k| + |\alpha_k + 5|,$$

则

$$|\alpha_k| \geqslant 5 - |\alpha_k + 5| \geqslant 2.$$

故由 ① 知

$$k \geqslant 2.$$

设 $|\alpha_1| = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant k-1}|\alpha_i|$，则

$$|\alpha_1|^{k-1} \leqslant |\alpha_1||\alpha_2|\cdots|\alpha_{k-1}| = \frac{1}{|\alpha_k|} \leqslant \frac{1}{2}.$$

从而

$$|\alpha_1| \leqslant \frac{1}{2^{\frac{1}{k-1}}}.$$

$$|\alpha_1 + 5| \leqslant |\alpha_1| + 5 \leqslant 5 + \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}} < 6.$$

$$|\alpha_1|^{n-1} \leqslant \frac{1}{2^{\frac{n-1}{k-1}}} < \frac{1}{2},$$

所以

$$|\alpha_1 + 5||\alpha_1|^{n-1} < 3.$$

导致与 ② 矛盾.

所以 $f(x)$ 不能分解为两个整系数多项式的乘积.

1·85　证明存在正整数 $m$，满足 $2^{1990} \mid 1989^m - 1$. 并求出具有上述性质的最小正整数 $m$.

（匈牙利数学奥林匹克，1990 年）

[证]　若 $m=2^k n$,其中 $n$ 为奇数,且 $n>1$,则

$$\begin{aligned}&1989^m-1\\&=(1989^{2^k}-1)(1989^{2^k(n-1)}+1989^{2^k(n-2)}+\cdots+1)\end{aligned}$$

上式的第二个因式是奇数,所以

$$2^{1990}\mid 1989^m-1 \Longleftrightarrow 2^{1990}\mid 1989^{2^k}-1.$$

由于 $1989^{2^k}-1$ 可分解为

$(1989^{2^{k-1}}+1)(1989^{2^{k-2}}+1)\cdots(1989+1)(1989-1)$,

其中每一个因式都是偶数,但只有最后一项是 4 的倍数,且不是 8 的倍数,所以

$$2^{k+2}\parallel 1989^{2^k}-1.$$

其中,记号 $p^t\parallel m$ 表示 $p^t\mid m$ 且 $p^{t+1}\nmid m$.

因而所求 $m$ 的最小值为

$$2^{1990-2}=2^{1988}.$$

1·86　能否找到100个互不相同的自然数,使得其中任意 5 个数的乘积都可被这 5 个数的和整除?

(列宁格勒数学奥林匹克,1989 年)

[解]　可以找到.

首先,我们任取 5 个自然数 $a,b,c,d,e$.

然后,再找一个整数 $x$,使

$$(a+b+c+d+e)\mid x.$$

构造 5 个新数

$$ax,\quad bx,\quad cx,\quad dx,\quad ex.$$

于是有

$$(ax+bx+cx+dx+ex)\mid ax\cdot bx\cdot cx\cdot dx\cdot ex.$$

这是因为

$$\begin{aligned}&ax\cdot bx\cdot cx\cdot dx\cdot ex\\&=abcde\cdot x^3\cdot(ax+bx+cx+dx+ex)\cdot\frac{x}{a+b+c+d+e},\end{aligned}$$

而 $\frac{x}{a+b+c+d+e}$ 是整数.

因而,为了得到所要求的 100 个自然数,可以先任取 100 个互不相

同的自然数,求出其中每 5 个数的和,共得到 $C_{100}^5$ 个和数,再找出一个能被这 $C_{100}^5$ 个和数中的每一个都能整除的自然数 $x$(例如,将 $x$ 取作这 $C_{100}^5$ 个和数之积),然后用 $x$ 去乘原来的 100 个数中的每一个,于是得到的 100 个新数即为所求.

1·87　证明对任意 $m,n\in N$,

$$S_{m,n}=1+\sum_{k=1}^{m}(-1)^k\frac{(n+k+1)!}{n!(n+k)}$$

都能被 $m!$ 整除,但对某些自然数 $m,n,S_{m,n}$ 不能被 $m!(n+1)$ 整除.

(英国数学奥林匹克,1981 年)

**[证]**　对 $m$ 用数学归纳法证明

$$S_{m,n}=(-1)^m\frac{(n+m)!}{n!}. \qquad ①$$

(1) 当 $m=1$ 时,

$$\begin{aligned}S_{1,n}&=1-\frac{(n+2)!}{n!(n+1)}\\&=1-(n+2)\\&=-\frac{(n+1)!}{n!}.\end{aligned}$$

即 $m=1$ 时,① 式成立.

(2) 假设对 $m$,① 式成立,那么对 $m+1$.

$$\begin{aligned}S_{m+1,n}&=S_{m,n}+(-1)^{m+1}\frac{(n+m+2)!}{n!(n+m+1)}\\&=(-1)^m\frac{(n+m)!}{n!}+(-1)^{m+1}\frac{(n+m)!(n+m+2)}{n!}\\&=(-1)^{m+1}\frac{(n+m)!}{n!}[(n+m+2)-1]\\&=(-1)^{m+1}\frac{(n+m+1)!}{n!},\end{aligned}$$

所以对 $m+1$,　① 式成立.

因此对所有 $m\in N$,　① 式成立.

由于 $C_{n+m}^m$ 是自然数,则

$$\begin{aligned}S_{m,n}&=(-1)^m\frac{(n+m)!}{n!m!}\cdot m!.\\&=(-1)^mC_{n+m}^m\cdot m!\end{aligned}$$

因而 $S_{m,n}$ 能被 $m!$ 整除.

当 $n=2$, $m=3$ 时,

$$S_{m,n}=S_{3,2}=-60$$

能被 $m!=3!=6$ 整除,但不能被 $m!(n+1)=3!(2+1)=18$ 整除.

1·88 试确定使 $ab^2+b+7$ 整除 $a^2b+a+b$ 的全部正整数对 $(a,b)$.

(第 39 届国际数学奥林匹克,1998 年)

[解] 设正整数对 $(a,b)$ 满足 $ab^2+b+7\mid a^2b+a+b$

则有 $ab^2+b+7\mid a(ab^2+b+7)-b(a^2b+a+b)$

即 $ab^2+b+7\mid 7a-b^2$.

(1)当 $7a-b^2=0$,即 $7\mid b$ 时,

设 $b=7k$,则 $7a=7^2k^2, a=7k^2$,此时有

$$a^2b+a+b=k(ab^2+b+7).$$

故 $(a,b)=(7k^2,7k)$ 是题目的解.

(2)当 $7a-b^2>0$ 时,有 $7a-b^2\geqslant ab^2+b+7$,

$7a>ab^2, b^2<7$,知 $b=1$ 或 $2$.

若 $b=1$,则 $a+8\mid a^2+a+1$.

设 $a+8=u$,则 $a^2+a+1=(u-8)^2+(u-8)+1$

$$=u^2-15u+59,$$

由 $u\mid u^2-15u+59$,得 $u\mid 59$,

于是 $u=19$ 或 $57$,得 $a=11$ 或 $49$.

此时又得到二组解 $(a,b)=(11,1)$ 或 $(49,1)$.

若 $b=2$,则 $4a+9\mid 7a-4$.

由于 $4a+9\leqslant 7a-4<2(4a+9)$,不等式对正整数 $a$ 不成立.

综上,解为

$$(a,b)=(7k^2,7k),(11,1),(49,1).\quad k\in N.$$

1·89 是否存在这样的由正整数构成的数列:其中每个正整数都恰好出现一次,并且对任何 $k=1,2,3,\cdots$,数列中前 $k$ 项之和都可被 $k$ 整除?

(第 21 届全俄数学奥林匹克,1995 年)

[解] 我们证明这样的数列是存在的.

取 $a_1=1$. 假设已取定了数列中的前 $n$ 项:$a_1,a_2,\cdots,a_n$. 设 $m$ 是

没有被取入的最小正整数,$M$ 是已经被取入的最大自然数.

记 $S_k=\sum_{i=1}^{k}a_i$. 且 设 $a_{n+1}=m[(n+2)^t-1]-S_n$, $a_{n+2}=m$.

其中 $t$ 是使得 $a_{n+1}>M$ 成立的足够大的正整数.

于是有 $S_{n+1}=S_n+a_{n+1}=m[(n+2)^t-1]$

能被 $n+1$ 整除.

且 $S_{n+2}=S_{n+1}+a_{n+2}=m(n+2)^t$ 能被 $n+2$ 整除.

只要继续这样做下去,就可使每一个自然数都在我们的构造的数列中出现,且都刚好出现一次.

1·90 试证对于任何正整数 $a_1>1$,都存在严格递增的正整数序列 $a_1,a_2,a_3\cdots$,使得对任何 $k\geqslant1$,和数 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2$ 都能被和数 $a_1+a_2+\cdots+a_k$ 整除.

(第 21 届全俄数学奥林匹克,1995 年)

[证] 对于给定的正整数 $a_1>1$.

由于 $a_1^2+a_2^2=(a_2-a_1)(a_2+a_1)+2a_1^2$,

所以,只要取 $a_2$,使 $a_2=2a_1^2-a_1$,就有 $a_1+a_2=2a_1^2$,

从而 $a_1+a_2\mid(a_2-a_1)(a_2+a_1)+2a_1^2$,

即 $a_1+a_2\mid a_1^2+a_2^2$.

且满足 $a_2=2a_1^2-a_1>a_1^2>a_1$.

假设已取定 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足题目要求,记

$A_i=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_i^2$, $B_i=a_1+a_2+\cdots+a_i$,

则对 $i=1,2,\cdots,n$,有 $B_i\mid A_i$.

由于 
$$\begin{aligned}A_{n+1}&=A_n+a_{n+1}^2=A_n+(a_{n+1}-B_n)(a_{n+1}+B_n)+B_n^2\\&=(a_{n+1}-B_n)B_{n+1}+A_n+B_n^2\end{aligned}$$

于是,只要取 $a_{n+1}$使 $B_n+a_{n+1}=B_{n+1}=A_n+B_n^2$,即取 $a_{n+1}=A_n+B_n^2-B_n$,就有 $B_{n+1}\mid A_{n+1}$.

且由于 $1<a_1<a_2<\cdots<a_n$,则 $a_{n+1}=A_n+B_n^2-B_n>A_n>a_n^2>a_n$.

于是对 $n+1$ 命题也成立.

从而对所有正整数 $k$,$B_k\mid A_k$ 成立.

1·91 求所有大于 3 的自然数,使得 $1+C_n^1+C_n^2+C_n^3$ 整除 $2^{2000}$.

(第 13 届中国中学生数学冬令营,1998 年)

[解] 因为 2 是素数.所以本题等价于求自然数 $n>3$,使

$1+C_n^1+C_n^2+C_n^3=2^k(k\in N,k\leqslant 2000)$.

$$1+C_n^1+C_n^2+C_n^3=1+n+\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

$$=\frac{(n+1)(n^2-n+6)}{6}$$

有 $(n+1)(n^2-n+6)=3\times 2^{k+1}$.

作代换 $m=n+1$,得

$$m(m^2-3m+8)=3\times 2^{k+1}. \quad ①$$

下面对 $m$ 分类讨论.

(1)若 $m=2^s(m>4,s\geqslant 3)$,则

$$m^2-3m+8=3\times 2^t(t\in N).$$

如果 $s\geqslant 4$,那么 $m^2-3m+8=3\times 2^t\equiv 8(\mathrm{mod}\ 16)$.

由此可知,$t=3$,从而

$m^2-3m+8=24$,即 $m(m-3)=16$.

这不可能.

所以只有 $s=3,m=8$,即 $n=7$.

(2)若 $m=3\times 2^u(m>4,u\geqslant 1)$,则

$$m^2-3m+8=2^v(v\in N)$$

如果 $u\geqslant 4$,则

$$m^2-3m+8=2^v\equiv 8(\mathrm{mod}\ 16),$$

由此可知,$v=3$.故 $m(m-3)=0$.这也不可能.

又 $u=1$ 和 $u=2$ 时,即 $m=3\times 2$ 和 $m=3\times 2^2$ 时,都不能使 $m^2-3m+8=2^v$ 成立.

当 $m=3\times 2^3=24$ 时,可求出 $n=23$.

$\because$ $1+C_7^1+C_7^2+C_7^3=64=2^6\mid 2^{2000}$,

且 $1+C_{23}^1+C_{23}^2+C_{23}^3=2^{11}\mid 2^{2000}$.

故本题答案为 $n=7$ 和 $n=23$.

1·92 设 $S=\{1,2,\cdots,50\}$.求最小自然数 $k$,使 $S$ 的任一 $k$ 元子集中都存在两个不同的数 $a$ 和 $b$,满足 $(a+b)\mid ab$.

（第 11 届中国中学生数学冬令营，1996 年）

**［解］** 设有 $a,b\in S$ 满足条件 $(a+b)|ab$.

记 $c=(a,b)$，于是 $a=ca_1,b=cb_1$，
其中 $a_1,b_1\in N$，且 $(a_1,b_1)=1$. 因而有 $c(a_1+b_1)=(a+b)|ab=c^2a_1b_1$，

$$(a_1+b_1)|ca_1b_1.$$

由 $(a_1,b_1)=1$ 可知 $(a_1+b_1,a_1)=1,(a_1+b_1,b_1)=1$，
故有 $(a_1+b_1)|c$.

由 $a\in S,b\in S$，则 $a+b\leqslant 99$， 且 $c(a_1+b_1)\leqslant 99$.

从而有 $3\leqslant a_1+b_1\leqslant 9$，

由此可知，$S$ 中满足条件 $(a+b)|ab$ 的不同数对共有 23 对：

当 $a_1+b_1=3$ 时，$(a,b)=(6,3),(12,6),(18,9),(24,12),(30,15),(36,18),(42,21),(48,24)$；

当 $a_1+b_1=4$ 时，$(a,b)=(12,4),(24,8),(36,12),(48,16)$；

当 $a_1+b_1=5$ 时，$(a,b)=(20,5),(40,10),(15,10),(30,20),(45,30)$；

当 $a_1+b_1=6$ 时，$(a,b)=(30,6)$；

当 $a_1+b_1=7$ 时，$(a,b)=(42,7),(35,14),(28,21)$；

当 $a_1+b_1=8$ 时，$(a,b)=(40,24)$；

当 $a_1+b_1=9$ 时，$(a,b)=(45,36)$.

令 $M=\{6,12,15,18,20,21,24,35,40,42,45,48\}$，则 $|M|=12$ 且上述 23 个数对中的每一对都至少包含 $M$ 中的 1 个元素.

因此，若令 $T=S-M$，则 $|T|=38$ 且 $T$ 中任何两数都不满足题中要求. 可见，所求的最小自然数 $k\geqslant 39$.

注意，下列 12 个满足题中要求的数对互不相交：

$(6,3),(12,4),(20,5),(42,7),(24,8),(18,9),(40,10),(35,14),(30,15),(48,16),(28,21),(45,36)$.

对于 $S$ 中的任一 39 元子集 $R$，它只比 $S$ 少 11 个元素，而这 11 个元素至少属于上述 12 个数对中的 11 对，从而必有上述 12 对中的 1 对属于 $R$.

综上可知，所求的最小自然数 $k=39$.

1·93　证明对任意 $n\in N,n\geqslant 2$，存在一个由 $n$ 个整数构成的集

合$S$,使得对 $S$ 中的任意两个不同的数$a$ 和$b$,均有$(a-b)^2|ab$.

(第 27 届美国数学奥林匹克,1998 年)



[证] 我们对 $n$ 施用数学归纳法.

当 $n=2$ 时,取 $S_2=\{1,2\}$,则有$(1-2)^2|1\times 2$,因此,$n=2$ 时,命题成立.

假设 $n=k$ 时命题成立,即存在含有 $k$ 个元素的集合 $S_k=\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$满足条件,对任意 $1\leqslant i<j\leqslant k$,均有$(a_i-a_j)^2|a_ia_j$.

记 $A=a_1a_2\cdots a_k$,考虑如下 $k+1$ 个数

$$A,A+a_1,A+a_2,\cdots,A+a_k.$$

由于$[(A+a_i)-(A+a_j)]^2=(a_i-a_j)^2$,

$$(A+a_i)(A+a_j)=A^2+A(a_i+a_j)+a_ia_j.$$

由归纳假设及 $A$ 的定义,有

$$(a_i-a_j)^2|a_ia_j,$$

$$a_ia_j|A^2+A(a_i+a_j)+a_ia_j,$$

因此 $[(A+a_i)-(A+a_j)]^2|(A+a_i)(A+a_j)$.

另一方面,$[(A+a_j)-A]^2=a_j^2a_j^2|(A+a_j)\cdot A$

于是 $S_{k+1}=\{A,A+a_1,A+a_2,\cdots,A+a_k\}$满足题设要求.

所以,$n=k+1$ 时命题成立.

从而,对 $n\geqslant 2,n\in N$,命题成立.

1·94 求所有的由四个正整数 $a,b,c,d$ 组成的数组,使数组中任意三个数的乘积除以剩下的一个数的余数都是 1.

(中国国家集训队选拔考试,1994 年)

[解] 首先证明 $a,b,c,d$ 都不小于 2,且两两互素.

这是因为,由题意,有 $bcd=ka+1$,

显然 $a\geqslant 2$,否则,若 $a=1$,则 $bcd$ 除以$a$ 的余数是 0,与题意矛盾.

同时,$a$ 与$b,c,d$ 中的任意一个都互素.

同理有 $b\geqslant 2,c\geqslant 2,d\geqslant 2$,且 $a,b,c,d$ 两两互素.

不妨设 $2\leqslant a<b<c<d$.

由于 $a|bcd-1,b|acd-1,c|abd-1,d|abc-1$,

从而有

$a|bcd-1+abc+abd+acd$,

$b \mid acd-1+abc+abd+bcd$,

$c \mid abd-1+abc+acd+bcd$,

$d \mid abc-1+abd+acd+bcd$.

由 $a,b,c,d$ 两两互素,则有

$$abcd \mid abc+abd+acd+bcd-1,$$

即存在正整数 $t$,有

$$abc+abd+acd+bcd=tabcd+1.$$

$$t+\frac{1}{abcd}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}<\frac{4}{a}, \quad ①$$

从而 $t<\frac{4}{a}\leqslant\frac{4}{2}=2 \quad (\because a\geqslant 2)$.

于是 $t=1$. $a=2$ 或 $a=3$.

当 $a=3$ 时,$b\geqslant 4,c\geqslant 5,d\geqslant 6$.

则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\leqslant\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}<1$,

此式与①式及 $t=1$ 矛盾.

所以必有 $a=2$.这时①式化为

$$1+\frac{1}{2bcd}=\frac{1}{2}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d},$$

故 $$\frac{1}{2}+\frac{1}{2bcd}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}<\frac{3}{b} \quad ②$$

因而 $\frac{1}{2}<\frac{3}{b}$,即 $b<6$.

由于 $a=2,(a,b)=1,b<6$,则 $b=3$ 或 $b=5$.

当 $a=2,b=5$ 时,由 $(a,c)=1,(a,d)=1,c\geqslant 7,d\geqslant 9$.

这时有 $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}<\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}<\frac{1}{2}$,

与③式矛盾,即 $b\neq 5$.

于是 $b=3$. $c>5,d\geqslant 7$.

①式又化为

$$1+\frac{1}{6cd}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d},$$

故 $$\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{1}{6}+\frac{1}{6cd}<\frac{2}{c}. \quad ③$$

从而 $\frac{2}{c}>\frac{1}{6}$, $c<12$.

由 $a=2$ 知 $c$ 是奇数,则 $c\leqslant 11$.

由③式可求出 $d=6+\frac{35}{c-6}$. ④

$d\geqslant 7$, $d$ 是正整数,则 $\frac{35}{c-6}$ 是正整数,考虑到 $c\leqslant 11$,则 $1\leqslant c-6\leqslant 5$,从而只能有 $c-6=1$ 或 $c-6=5$.

即 $c=7$ 或 $c=11$.

当 $c=7$ 时,由④式 $d=41$,

当 $c=11$ 时,由④式 $d=13$.

于是所求的四个数 $(a,b,c,d)=(2,3,7,11)$ 或 $(2,3,11,13)$.

1·95 任意给定 $h=2^r$($r$ 是非负整数).求满足以下条件的所有自然数 $k$:对每个这样的 $k$,存在奇自然数 $m>1$ 和自然数 $n$,使得

$$k\mid m^k-1,\ m\mid n^{\frac{m^k-1}{k}}+1$$

(中国国家集训队选拔考试,1998 年)

[解] 对于 $h=2^r$,约定将满足题目条件的所有的 $k$ 的集合记为 $k(h)$.

我们下面证明: $k(h)=\{2^{r+s}t\mid s,t\in N,2\nmid t\}$.

先证明下面的事实:

$$m\equiv 1(\bmod 4)\Rightarrow 2^r\parallel\frac{m^{2^r}-1}{m-1}.$$

这个事实是显然的,这是因为

$$\frac{m^{2^r}-1}{m-1}=(m^{2^{r-1}}+1)(m^{2^{r-2}}+1)\cdots(m^2+1)(m+1).$$

由于 $m\equiv 1(\bmod 4)$,则 $m^{2^u}+1\equiv 2(\bmod 4)$,
其中 $u=0,1,\cdots,r-1$.

因此, $2^r\mid\frac{m^{2^r}-1}{m-1}$, $2^{r+1}\nmid\frac{m^{2^r}-1}{m-1}$.即 $2^r\parallel\frac{m^{2^r}-1}{m-1}$.

(1)先证明:若 $s\geqslant 2$, $2\nmid t$,则 $k=2^{r+s}t\in k(h)$.

事实上,存在 $m=2^st+1$, $n=m-1$,使得 $2^r\parallel\frac{m^{2^r}-1}{m-1}$.

由于 $\frac{m^h-1}{k}=\frac{m^{2^r}-1}{2^{r+s}t}=\frac{m^{2^r}-1}{2^r\cdot 2^st}=\frac{m^{2^r}-1}{2^r(m-1)}$ 是奇自然数,所以

$k \mid m^h - 1$.

又 $n^{\frac{m^h-1}{k}} = (m-1)^{\frac{m^h-1}{k}} \equiv -1 \pmod m$,

所以 $m \mid n^{\frac{m^h-1}{k}} + 1$.

(2)再证明:对于 $2 \nmid t, k = 2^{r+1}t \in k(h)$.

事实上,存在 $m = 4t^2 + 1, n = 2t$,使得

$$\frac{m^h-1}{k} = \frac{m^{2^r}-1}{2^r(m-1)} \cdot 2t,$$

$$n^{\frac{m^h-1}{k}} = (n^2)^{\frac{m^{2^r}-1}{2^r(m-1)} \cdot t} \equiv -1 \pmod m,$$

所以 $k \mid m^k - 1, m \mid n^{\frac{m^n-1}{k}} + 1$.

(3)用反证法证明:对于 $0 \leqslant q \leqslant 2r, 2 \nmid t, 2^q t \notin k(h)$.

若对 $k = 2^q t$,有 $m, n$ 满足题目中的要求,显然 $m$ 与 $n$ 互素.

在 $m$ 的所有素因数中,取以下表示中指数 $a$ 最小的一个素数 $p$: $p = 2^a b + 1, 2 \nmid b$.

易见 $2^a \mid m - 1$.

一方面,由 $p \mid n^{\frac{m^h-1}{k}} + 1$

有 $(n^{\frac{m^h-1}{2^q t}})^b \equiv -1 \pmod p$. (※)

另一方面,因为 $2^a \mid m-1, 2^{q+a} \mid m^h - 1$,所以有

$$\left(\frac{m^h-1}{n^{2qt}}\right)^b = \left(\frac{m^{h-1}}{n^{2q+at}}\right)^{2^a \cdot b} \equiv (n^{\frac{m^{h-1}}{2^{q+a}t}})^{p-1} \equiv 1 \pmod p \quad (※※)$$

(※)与(※※)矛盾.由(1),(2),(3),对于 $h = 2^r$,有

$$k(h) = \{2^{r+s}t \mid s, t \in N, 2 \nmid t\}.$$

**1·96** 设 $x_1$ 和 $x_2$ 是互素的正整数,对 $n \geqslant 2$,定义 $x_{n+1} = x_n x_{n-2} + 1$.

(1)对每个正整数 $i > 1$,求证:存在正整数 $j > i$,使得 $x_j^i$ 整除 $x_j^j$;

(2)$x_1$ 是否必定整除 $x_j^j$,这里正整数 $j > 1$?

(第 35 届国际数学奥林匹克预选题,1994 年)

**[解]** (1)正整数 $i > 1$.设 $p$ 是 $x_i$ 的一个素约数,对于任一正整数

$n$,引入一列非负整数 $u_n$,$0\leqslant u_n\leqslant p-1$,使得

$$u_n\equiv x_n \pmod p. \quad ①$$

显然 $\quad u_{n+1}\equiv u_nu_{n-1}+1 \pmod p. \quad ②$

因为 $0\leqslant u_{n-1}\leqslant p-1$,$0\leqslant u_n\leqslant p-1$ 和 $u_{n-1}$,$u_n$ 全是整数,则不同的有序非负整数对 $(u_{n-1},u_n)$ 只有有限个,而当 $n\geqslant 2$,$n$ 取遍全部不小于 2 的正整数时,$(u_{n-1},u_n)$ 有无限多对,因此,一定存在正整数 $k$,$l$,$2\leqslant k<l$,使得

$$(u_{k-1},u_k)=(u_{l-1},u_l).$$

即有 $\quad u_{k-1}=u_{l-1},u_k=u_l.$

再利用②,又有 $\quad u_{k+1}\equiv u_{l+1} \pmod p.$

而 $\quad 0\leqslant u_{k+1},u_{l+1}\leqslant p-1,$

则 $\quad u_{k+1}=u_{l+1}.$

因此,在除去有限多个 $u_1,u_2,\cdots,u_{k-2}$ 之后,易知数列 $\{u_n|n\geqslant k-1\}$ 是周期变化的,设周期为 $s$.

由于 $p|x_i$,$u_i\equiv x_i \pmod p$,于是

$$u_i=0. \quad ③$$

下面证明,存在某个正整数 $k_p$,使得 $\quad u_{i+kp}=0.$

我们用反证法.

假设对于正整数 $j$,$u_{i+j}\neq 0$.

考虑第一、第二周期序列 $\quad u_k,u_{k+1},\cdots,u_{k+s-1}$

及 $\quad u_{k+s},u_{k+s+1},\cdots,u_{k+2s-1},$

有 $\quad u_k=u_{k+s},u_{k+1}=u_{k+s-1},\cdots,u_{k+s-1}=u_{k+2s-1}$.且 $\{u_k,u_{k+1},\cdots,u_{k+s-1}\}$ 中没有一对数相同,也无一数为 0,由③式,有 $\quad k\geqslant i+1>2$

由②式,有 $\quad u_ku_{k-1}\equiv u_{k+1}-1=u_{k+s-1}-1\equiv u_{k+s}u_{k+s-1} \pmod p$.

因为 $u_k=u_{k+s}\neq 0$,则 $1\leqslant u_r,u_{k+s}\leqslant p-1$.

$p$ 是一个素数,则有. $u_{k-1}\equiv u_{k+s-1} \pmod p$.

于是 $\quad u_{k-1}=u_{k+s-1}.$

这与 $\{u_k,u_{k+1},\cdots,u_{k+s-1}\}$ 是第一个周期序列相矛盾.

所以 $\quad u_{i+kp}=0.$

对于固定的 $i>1$,

由 $u_{i+1}\equiv u_{i-1}u_i+1 \pmod p$

及③,可得 $u_{i+1}=1$.

同理 $u_{i+kp+1}=1$.

由 $u_i=u_{i+kp}=0$ 及 $u_{i+1}=u_{i+kp+1}=1$

利用②得 $u_{i+2}=u_{i+kp+2},u_{i+3}=u_{i+kp+3},\cdots$

显然,对于所有正整数 $l$,有 $u_{i+lkp}=0$. ④

利用①和④,有 $p\mid x_{i+lkp}$.

对应于 $x_i$ 的不同的素约数,用 $m$ 表示相应的全部$k_p$ 的最小公倍数,那么,对于所有正整数 $l$,$x_{i+lm}$整除 $x_i$ 的每个素约数.

用 $t$ 表示 $x_i$ 的素约数分解式中每个素约数的最高指数,选择正整数 $l$,使得 $j=i+lm>ti$,则 $x_i^i$ 整除 $x_j^i$.

(2)结论不一定正确,下面举一个反例.

取 $x_1=22,x_2=9,(22,9)=1$,

$22=2\times16$ 有 2 个素约数.

取 $p=2$. 由②式可求得

$u_1=0,u_2=1,u_3=1,u_4=0,u_5=1,u_6=1,u_7=0,u_8=1,u_9=1$

这是一个以 3 为周期的序列,其中一个周期序列是$\{0,1,1\}$.

再取 $p=11$,由②有

$$u_1^*=0,u_2^*=9,u_3^*=1,u_4^*=10,$$

$$u_5^*=0,u_6^*=1,u_7^*=1,u_8^*=2,$$

$$u_9^*=3,u_{10}^*=7,u_{11}^*=0,u_{12}^*=1,\cdots$$

从第 5 个数起,以 6 为周期,其中一个周期序列为$\{0,1,1,2,3,7\}$.

对于任意正整数 $n>1,u_n=0$,当且仅当 $n\equiv1 \pmod 3$,而 $u_n^*=0$,当且仅当 $n\equiv5 \pmod 6$.

而对于任意正整数 $k,l$,不会有 $3k+1=6l+5$,因此不存在 $x_j(j>1)$,它既能被 2 整除,又能被 11 整除.

所以,对任意正整数 $j>1,x_1\nmid x_j$,故不会有 $x_1\mid x_j^j$.

**1·97** 求最大整数 $n$,使$\dfrac{(n-2)^2(n+1)}{2n-1}$是整数.

(第 17 届美国数学邀请赛,1999 年)

**[解]** 设 $k$ 是 $2n-1$ 的一个素约数.即 $k\mid 2n-1$.

所以,$k$ 必为 $n-2$ 或 $n+1$ 的约数,

即 $k \mid n-2$ 或 $k \mid n+1$.



若 $k \mid n-2$,则 $k \mid (2n-1)-(n-2)=n+1$,

若 $k \mid n+1$,则 $k \mid (2n-1)-(n+1)=n-2$.

所以 $k \mid n-2$ 且 $k \mid n+1$.

从而又有 $k \mid (n+1)-(n-2)$,即 $k \mid 3$,

所以 $2n-1$ 是 3 的幂.

设 $2n-1=3^t$,则 $n=\frac{3^t+1}{2}$.

有 $\frac{(n-2)^2(n+1)}{2n-1}=\frac{\left(\frac{3^t-3}{2}\right)^2\left(\frac{3^t+3}{2}\right)}{3^t}$

$=\frac{3^3(3^{t-1}-1)^2(3^{t-1}+1)}{8\cdot 3^t}$.

所以 $t \leqslant 3$.

当 $t=3$ 时,$2n-1=27$,得 $n=14$.

此时,$\frac{(n-2)^2(n+1)}{2n-1}=\frac{12^2\cdot 15}{27}$是整数.

# 第二章　同　余



2·1　有 27 个国家参加的一次国际会议，每个国家有两名代表. 求证：不可能将 54 位代表安排在一张圆桌的周围就坐，使得任一国的两位代表之间都夹有 9 个人.

（前南斯拉夫数学竞赛，1988 年）

［证］　将 54 个座位按逆时针编号为

$$1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 53,\ 54.$$

如果满足要求的排法存在，由于任一国的两位代表之间都夹有 9 个人，则不妨设

1 和 11 是同一国的代表，

于是

11 和 21 不是同一国的代表，

21 和 31 是同一国的代表，

31 和 41 不是同一国的代表，

41 和 51 是同一国的代表，

51 和 61(＝7) 不是同一国的代表，

7 和 17 是同一国的代表，

因以上，$20k+1$ 和 $20k+11$ 是同一国的代表. 若 $20k+1$ 与 $20k+11$ 大于 54，则取它们被 54 除的余数为号码的位置.

特别地，$k=13$ 时，261 和 271 是同一国的代表，然而

$$261 \equiv 45 \pmod{54},$$

$$271 \equiv 1 \pmod{54},$$

则 1 和 45 是同一国的代表，与 1 和 11 是同一国的代表矛盾.

于是,不可能得到任一国的两位代表之间都夹有9个人的排法.

2·2　假设 $a,b,c,d$ 是四个整数,证明差

$$b-a,\quad c-a,\quad d-a,\quad d-c,\quad d-b,\quad c-b$$

的乘积能被12整除.

（匈牙利数学奥林匹克,1925年）

[证]　设 $p=(b-a)(c-a)(d-a)(d-c)(d-b)(c-b)$,

若四个整数 $a,b,c,d$ 被4除,有两个数的余数相等,不妨设 $a$ 和 $b$ 对4同余,则

$$4\mid b-a.$$

从而

$$4\mid p.$$

若四个整数 $a,b,c,d$ 被4除的余数都不相同,则这四个数必为两个奇数,两个偶数,设 $a$ 和 $b$ 为奇数, $c$ 和 $d$ 为偶数,则

$$2\mid b-a,\quad 2\mid d-c.$$

从而

$$4\mid p.$$

若四个整数 $a,b,c,d$ 被3除,则必有两数对3同余,设 $a$ 和 $b$ 对3同余,则

$$3\mid b-a,$$

于是

$$3\mid p.$$

又因为

$$(3,\ 4)=1,$$

则

$$3\cdot 4=12\mid p.$$

2·3　证明当且仅当指数 $n$ 不能被4整除时, $1^n+2^n+3^n+4^n$ 能被5整除,其中 $n$ 是正整数.

（匈牙利数学奥林匹克,1901年）

[证]　不难验证

$$1^4=1\equiv 1\pmod 5,$$
$$2^4=16\equiv 1\pmod 5,$$
$$3^4=81\equiv 1\pmod 5,$$
$$4^4=256\equiv 1\pmod 5,$$

假设 $n=4k+r,\quad r=0,1,2,3.$

由以上 $a^4\equiv 1\pmod 5,\quad a=1,2,3,4.$

则

$$a^{4k}\equiv 1\pmod 5.$$
$$a^n=a^{4k+r}\equiv a^r\pmod 5.$$

由此可得

$$\begin{aligned}S_n&=1^n+2^n+3^n+4^n\\&\equiv 1^r+2^r+3^r+4^r\pmod 5.\end{aligned}$$

当 $r=0,1,2,3$,依次有

当 $r=0$ 时, $S_n\equiv 4\equiv 4 \pmod 5$,

当 $r=1$ 时, $S_n\equiv 10\equiv 0 \pmod 5$,

当 $r=2$ 时, $S_n\equiv 30\equiv 0 \pmod 5$,

当 $r=3$ 时, $S_n\equiv 100\equiv 0 \pmod 5$.

因此,当且仅当 $n$ 不能被 4 整除时,$S_n$ 能被 5 整除.

2·4 证明 $n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n-1$ 对任何正整数 $n$ 都是整数,并且用 3 除时余 2.

(中国北京市高中数学竞赛,1956 年)

[证] 原式可化为

$$\begin{aligned}&n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n-1\\=&\frac{2n^3+3n^2+n}{2}-1\\=&\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}-1\\=&\frac{2n(2n+1)(2n+2)}{8}-3+2.\end{aligned}$$

由于 $2n,2n+1,2n+2$ 是三个连续整数,则这三个数中必有一个是 3 的倍数,从而乘积

$$2n(2n+1)(2n+2)$$

一定能被 3 整除,又

$$\frac{2n(2n+1)(2n+2)}{8}=\frac{n(n+1)}{2}(2n+1)$$

一定是整数,且由 3 和 8 互素,则

$$\frac{2n(2n+1)(2n+2)}{8}$$

是 3 的倍数,于是

$$n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n-1$$

对任何正整数 $n$ 都是整数,并且用 3 除时余 2.

2·5 假设 $a,b,c,d$ 和 $m$ 是这样的整数,使

$$am^3+bm^2+cm+d$$

能被 5 整除，且数 $d$ 不能被 5 整除.

证明总可以找到这样的整数 $n$，使得

$$dn^3+cn^2+bn+a$$

也能被 5 整除.

（匈牙利数学奥林匹克，1900 年）

［证］ 首先证明 $m$ 不可能被 5 整除.

事实上，如果 $m$ 能被 5 整除，那么由

$$5\mid am^3+bm^2+cm+d$$

可得 $5\mid d$，与题设 $5\nmid d$ 矛盾

于是 $m$ 只能写成 $m=5k+r,\quad r=1,2,3,4$ 的形式.

注意到
$$1\cdot 1\equiv 1\pmod 5,$$
$$2\cdot 3\equiv 1\pmod 5,$$
$$4\cdot 4\equiv 1\pmod 5.$$

于是当 $m$ 取 $5k+1,\quad 5k+2,\quad 5k+3,\quad 5k+4$ 时，相应的 $n$ 取 $5t+1,\quad 5t+3,\quad 5t+2,\quad 5t+4$，则必有

$$mn\equiv 1\pmod 5,$$
$$5\mid mn-1.$$

设
$$A=am^3+bm^2+cm+d,$$
$$B=dn^3+cn^2+bn+a.$$

从 $A,B$ 中消去 $d$，得

$$An^3-B=(mn-1)[a(m^2n^2+mn+1)+bn(mn+1)+cn^2].$$

于是
$$5\mid An^3-B.$$

再由
$$5\mid A,$$

可得
$$5\mid B=dn^3+cn^2+bn+a.$$

**2·6** 任给一个正整数 $N$，如 248，我们总可以用 1984 的四个数码经过适当交换得到一个四位数 $\overline{a_3a_2a_1a_0}$，如 8194，恰使得 $7\mid(248+8194)$. 请你证明对任给的一个自然数 $N$，总存在一个适当交换 1984 的数码所得的四位数 $\overline{a_3a_2a_1a_0}$，使得 $7\mid(N+\overline{a_3a_2a_1a_0})$.

（中国北京市初中二年级数学竞赛，1984 年）

［证］ 由于
$$1498=214\cdot 7+0, \quad ①$$
$$1849=264\cdot 7+1, \quad ②$$
$$1948=278\cdot 7+2, \quad ③$$

$$1984 = 283 \cdot 7 + 3, \quad ④$$
$$1894 = 270 \cdot 7 + 4, \quad ⑤$$
$$1489 = 212 \cdot 7 + 5, \quad ⑥$$
$$9148 = 1306 \cdot 7 + 6 \quad ⑦$$

对任给自然数 $N$,设 $N$ 被 7 除,则有

$$N = 7m + r \quad (0 \leqslant r < 7).$$

(1) 若 $r = 0$,则选$\overline{a_3a_2a_1a_0} = 1498$,则有

$7 \mid (N + 1498)$,即 $7 \mid (N + \overline{a_3a_2a_1a_0})$.

(2) 若$0 < r < 7$,则$0 < 7 - r < 7$.可以从②—⑦式中选取相应的余数为 $7 - r$ 的四位数为$\overline{a_3a_2a_1a_0}$,这个数可写为

$$\overline{a_3a_2a_1a_0} = 7p + (7 - r)$$

$$\begin{aligned} & N + \overline{a_3a_2a_1a_0} \\ = & (7m + r) + 7p + (7 - r) \\ = & 7(m + p + 1). \end{aligned}$$

因此,存在$\overline{a_3a_2a_1a_0}$,使得

$$7 \mid (N + \overline{a_3a_2a_1a_0}).$$

综合(1),(2)可得,对任给的一个自然数 $N$,总存在适当交换 1984 的数码得到的一个四位数$\overline{a_3a_2a_1a_0}$,使得 $7 \mid (N + \overline{a_3a_2a_1a_0})$.

2·7 证明对于任何整数 $k \geqslant 0, 2^{6k+1} + 3^{6k+1} + 5^{6k} + 1$ 能被 7 整除.

(基辅数学奥林匹克,1960 年)

[证] 设原式为 $M$,则

$$\begin{aligned} M &= 2 \cdot 2^{6k} + 3 \cdot 3^{6k} + 5^{6k} + 1 \\ &= 2 \cdot 64^k + 3 \cdot 729^k + 15625^k + 1 \\ &= 2[(7 \cdot 9 + 1)^k - 1] + 3[(7 \cdot 104 + 1)^k - 1] \\ &\quad + [(7 \cdot 2232 + 1)^k - 1] + 7. \end{aligned}$$

由于$(7a + 1)^k \equiv 1 \pmod 7$,则

$$7 \mid (7a + 1)^k - 1.$$

于是 $7 \mid M$.

2·8 $1971^{26} + 1972^{27} + 1973^{28}$ 能被 3 整除吗?

(基辅数学奥林匹克,1971 年)

[解] $1971 \equiv 0 \pmod 3$,所以

$$1971^{26} \equiv 0 \pmod 3.$$

又 $1972 \equiv 1 \pmod 3$,所以

$$1972^{27} \equiv 1^{27} \pmod 3,$$

$$1973 \equiv 2 \pmod 3,$$

$$1973^{28} \equiv 2^{28} \pmod 3.$$

于是有

$$1971^{26} + 1972^{27} + 1973^{28} \equiv 2^{28} + 1 \pmod 3.$$

又 $2^{28} = 4^{14} \equiv 1 \pmod 3$,所以

$$2^{28} + 1 \equiv 2 \pmod 3.$$

因此,$1971^{26} + 1972^{27} + 1973^{28}$ 不能被 3 整除.

2·9 能否把 1,2,⋯,1980 这 1980 个数分成四组,使得第二组各数的和比第一组各数的和多 10,第三组各数的和比第二组各数的和多 10,第四组各数的和比第三组各数的和多 10?

(基辅数学奥林匹克,1980 年)

[解] 设 1,2,⋯,1980 这 1980 个数的和为 $T$,第一组所有数的和为 $S$,则

$$\begin{aligned} T &= S + (S+10) + (S+20) + (S+30) \\ &= 4S + 60 \\ &\equiv 0 \pmod 4. \end{aligned} \quad ①$$

另一方面,对这 1980 个数直接求和有

$$\begin{aligned} T &= 1 + 2 + 3 + \cdots + 1980 \\ &= \frac{1980 \cdot 1981}{2} \\ &= 990 \cdot 1981 \\ &\equiv 2 \pmod 4. \end{aligned} \quad ②$$

① 式与 ② 式矛盾.

因此,不能把 1,2,⋯,1980 这 1980 个数,按照题意要求分成四部分.

2·10 在已知数列 1,4,8,10,16,19,21,25,30,43 中,相邻若干数之和能被 11 整除的数组共有多少组.

(中国高中数学联赛,1985 年)

[解]　记该数列各对应项为 $a_i, i=1,2,\cdots,10$. 并记

$$S_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k.$$

由此可计算数列 $S_1, S_2, \cdots, S_{10}$ 为

$$1,5,13,23,39,58,79,104,134,177.$$

它们被 11 除的余数依次为

$$1,5,2,1,6,3,2,5,2,1.$$

由此可得

$$S_1 \equiv S_4 \pmod{11},$$
$$S_1 \equiv S_{10} \pmod{11},$$
$$S_4 \equiv S_{10} \pmod{11},$$
$$S_2 \equiv S_8 \pmod{11},$$
$$S_3 \equiv S_7 \pmod{11},$$
$$S_7 \equiv S_9 \pmod{11},$$
$$S_3 \equiv S_9 \pmod{11}.$$

由于 $S_k - S_j (k > j)$ 是数列 $\{a_i\}$ 的相邻项之和，并且当 $S_k \equiv S_j \pmod{11}$ 时，$11 \mid S_k - S_j$，于是符合题目要求的数组共有 7 组.

2·11　有三堆石子的个数分别为 19,8,9. 现进行如下操作：每次从三堆中的任意两堆中分别取出 1 个石子，然后把这 2 个石子都加到另一堆上去. 试问：能否经过若干次这样的操作使得

(1) 三堆的石子数分别为 2,12,22;

(2) 三堆的石子数均为 12.

如能达到要求，请用最小的操作次数完成它，如不能达到，说明理由.

(中国广州、重庆、洛阳、福州、武汉初中数学竞赛，1989 年)

[解]　(1) 能达到.

因为原来最少的一堆 8 个石子，要使它变为 2，至少要经过 6 次操作，事实上，6 次可以成功：

$(19,8,9) \to (21,7,8) \to (23,6,7,) \to (22,5,9) \to (24,4,8) \to (23,3,10) \to (22,2,12)$.

(2) 不能达到.

由于每次操作后，每堆石子数或者减 1，或者加 2，不妨写为

第二章　同余

$$(a,b,c)\rightarrow(a-1,b-1,c+2).$$

若 $a,b,c$ 被3除的余数均不相等,设为0,1,2,则操作后得到的三个数 $a-1,b-1,c+2$ 被3除的余数为2,0,1.



于是,每次操作之后,不改变三个数被3除的余数互不相等的关系.

由于开始给出的石子数为19,8,9,它们被3除的余数为1,2,0,而若变成12,12,12,则它们被3除的余数都为0,因此不论如何操作,都不能使三堆石子数均为12.

2·12　有1987片玻璃片,每片上涂有红、黄、蓝三色之一,进行下列操作:将不同颜色的两块玻璃片擦净,然后涂上第三种颜色(例如将一块蓝玻璃和红玻璃片上的红色与蓝色擦掉,然后在两片上涂上黄色).证明

(1) 无论开始时,红、黄、蓝玻璃片各有多少片,总可以经过有限次操作而使所有玻璃片涂有同一种颜色;

(2) 最后变成哪一种颜色,与操作顺序无关.

(第2届中国东北三省数学邀请赛,1987年)

[证]　设红片、黄片和蓝片的数目分别为 $x,y,z$,则 $x,y,z$ 被3除的余数必有两个是相等的.

事实上,不妨设　$x=3a+1,\quad y=3b+2,\quad z=3c,\quad a,b,c$ 为整数,又

$$x+y+z=3(a+b+c+1)\neq 1987.$$

若 $x,y,z$ 被3除的余数都相同,也导致矛盾.

假设 $y$ 和 $z$ 被3除同余,设

$$x=3a+m,\quad y=3b+n,\quad z=3c+n.$$

并不妨设　$c\geqslant b.$

若 $c=b$,则本题得证.

若 $c>b$,取黄片 $3b+n$,蓝片 $3b+n$.按规则操作得红片数为 $3a+6b+m+2n$,黄片数为0,蓝片数为 $3(c-b)$.

接着,各取1红片,1蓝片,产生2黄片;再各取2黄片,2蓝片,产生4片红片,这时黄片仍为零,而蓝片减少了3片,即蓝片为 $3(c-b-1)$,如果 $c-b-1=0$ 本题得证,否则类似再操作 $k$ 次,直至 $c-b-1-k=0$.

最后,所有玻璃片都涂上了红色.

最后产生 1987 片红片是因为红片数除以 3 的余数与蓝片、黄片除以 3 的余数不同，不论如何操作，都不可能改变三者的余数之间的关系，即两个相等而异于第三个，故最后变成哪一种颜色，与操作顺序无关.

2·13　表甲是一个英文字母电子显示盘，每一次操作可以使某一行 4 个字母同时改变，或者使某一列 4 个字母同时改变，改变的规则是，按照英文字母表的顺序，每个英文字母变成它的下一个字母(即 $A$ 变成 $B$，$B$ 变成 $C$，…，最后字母 $Z$ 变成 $A$).

| | | | |
|---|---|---|---|
| $S$ | $O$ | $B$ | $R$ |
| $T$ | $Z$ | $F$ | $P$ |
| $H$ | $O$ | $C$ | $N$ |
| $A$ | $D$ | $V$ | $X$ |

表甲

| | | | |
|---|---|---|---|
| $K$ | $B$ | $D$ | $S$ |
| $H$ | $E$ | $X$ | $G$ |
| $R$ | $T$ | $B$ | $S$ |
| $C$ | $F$ | $Y$ | $A$ |

表乙

问：能否经过若干次操作，使表甲变成表乙？如果能，请写出变化过程，如果不能，说明理由.

（第 4 届祖冲之杯初中数学邀请赛，1991 年）

［解］　为方便计，将表中的英文字母用它在字母表中的序号代替(即 $A$ 用 1 代替，$B$ 用 2 代替，…，$Z$ 用 26 代替)，这样表甲与表乙就相当于两个 $4 \times 4$ 的数表，而每一次操作就相当于使数表中某一行或某一列的每一个数被 26 除时的余数加 1(因为共有 26 个字母．$Z$ 是 26，其被 26 除时的余数为 0，也可看作 26).

我们只要证明表甲的左上角的 4 个字母永远变不成表乙的左上角的 4 个字母就可以了.

为此考察 $2 \times 2$ 数表 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，记

$$k = (a + d) - (b + c).$$

每次操作 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 变成 $\begin{pmatrix} a+1 & b+1 \\ c & d \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} a+1 & b \\ c+1 & d \end{pmatrix}$，或 $\begin{pmatrix} a & b \\ c+1 & d+1 \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} a & b+1 \\ c & d+1 \end{pmatrix}$ 或不变．这时，变化后的 $2 \times 2$ 表中

的 $k$ 值是不变的，即不论进行多少次操作，$2\times2$ 表的 $k$ 值是一个不变量.



表甲左上角$\begin{pmatrix} S & O \\ T & Z \end{pmatrix}$是 $\begin{pmatrix} 19 & 15 \\ 20 & 26 \end{pmatrix}$，其中的 $k=45-35=10$，表乙左上角$\begin{pmatrix} K & B \\ H & E \end{pmatrix}$是 $\begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$ 其中的 $k=16-10=6$，两者不同，表甲不能变成表乙.

**2·14** 在黑板上写上三个整数，然后将其中一个擦去，换上其他两数之和与 1 的差，将这个过程重复若干次之后，得到(17,1967,1983). 问：一开始在黑板上写出的三个数能否是：

(1)(2,2,2)；

(2)(3,3,3).

（第 17 届全苏数学奥林匹克，1983 年）

[解] 我们进行倒推：

$$1983=1967+17-1,$$

$$1967=1951+17-1,$$

于是 $(17,1967,1951)\to(17,1967,1983).$

又 $1951=1935+17-1,$

即 $(17,1935,1951)\to(17,1967,1951).$

由此可得

$$\begin{aligned}1983&=1967+17-1\\&=1951+2\cdot17-2\\&=1935+3\cdot17-3.\end{aligned}$$

如此倒推下去，由于

$$1983=31+122\cdot17-122,$$

$$1967=15+122\cdot17-122.$$

所以经过 123 次变换，有

$$(17,1967,1983)\leftarrow(17,15,31).$$

继续这种变换有

$(17,15,31)\leftarrow(17,15,3)\leftarrow(13,15,3)\leftarrow(13,11,3)\leftarrow(9,11,3)\leftarrow(9,7,3)\leftarrow(7,5,3)\leftarrow(5,3,3)\leftarrow(3,3,3).$

于是，在一开始，黑板上可能写(3,3,3) 而不可能写(2,2,2).

2·15　在黑板上写上数 1,2,3,…,1986,1987,每一步是从写出的数中擦去某些数,而代替它们,写上它们的和除以 7 的余数,若干步之后,在黑板上剩下两个数,其中之一是 987,剩下的第二个数是什么?

(第 13 届全俄数学奥林匹克,1987 年)

[解]　显然,每一步中保留着写出的数的和除以 7 的余数.

设剩下的数为 $x$,则 $x+987$ 等于和

$$1+2+\cdots+1986+1987=1987\cdot 7\cdot 142$$

除以 7 的余数,即等于 0.

由于 987 能被 7 整除,则 $x$ 也能被 7 整除.

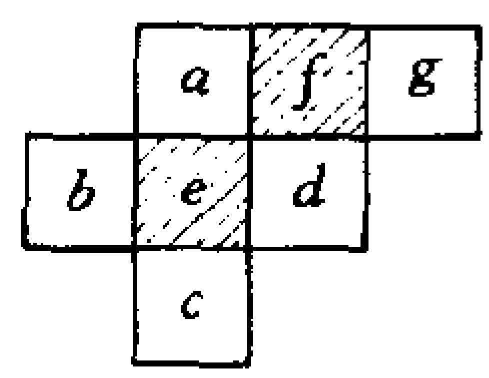
又因为数 987 不是除以 7 的余数,所以 $x$ 是被 7 除的余数,即满足 $0\leqslant x<6$,所以

$$x=0.$$

2·16　是否能够将自然数 1,2,…,64 分别填入 $8\times 8$ 的国际象棋棋盘的 64 个方格内,使得形如图的任意四个格(方向可以任意转置)内的数之和能被 5 整除.

(列宁格勒数学奥林匹克,1980 年)

[解]　若能按要求填入 64 个数,如图,则




$$5\mid a+b+c+e,$$

$$5\mid d+b+c+e,$$

所以有　$5\mid a-d$.

同理可证

$$5\mid d-c,\quad 5\mid a-b,\quad 5\mid f-e.$$

又　$5\mid a+b+d+e,$

$5\mid a+d+g+f.$

所以有　$5\mid (b-g)+(e-f).$

因为 $5\mid e-f$,所以

$$5\mid b-g.$$

于是所有白格中的数被 5 除的余数相同,设为 $r_1$,所有黑格中的数被 5 除的余数相同,设为 $r_2$.

因此,在 64 个格子中所填的数被 5 除的余数只有两个 $r_1$ 和 $r_2$.而 1,2,…,64 被 5 除的余数有 5 个.产生矛盾.

因此,不能有满足题目要求的填数法.

2·17　甲、乙、丙、丁四人分别按下面的要求作一个解为 $x_1, x_2$ 的一元二次方程 $x^2+px+q=0$.

甲：$p, q, x_1, x_2$ 都取被 3 除余 1 的整数；

乙：$p, q, x_1, x_2$ 都取被 3 除余 2 的整数；

丙：$p, q$ 取被 3 除余 1 的整数，$x_1, x_2$ 取被 3 除余 2 的整数；

丁：$p, q$ 取被 3 除余 2 的整数，$x_1, x_2$ 取被 3 除余 1 的整数.

问：甲、乙、丙、丁是否能按上述要求各自作出方程，若可以作出，请你写出一个这样的方程，若不能作出，请你说明理由.

（中国北京市初中二年级数学竞赛，1982 年）

[解]　若 $x_1$ 和 $x_2$ 都取形如 $3n+1$ 的整数，设 $x_1=3n_1+1, x_2=3n_2+1$，这里 $n_1$ 和 $n_2$ 是整数.

由韦达定理

$$p=-[(3n_1+1)+(3n_2+1)]=-3(n_1+n_2+1)+1,$$

$$q=(3n_1+1)(3n_2+1)=3(3n_1n_2+n_1+n_2)+1.$$

即 $p$ 和 $q$ 也都是形如 $3n+1$ 的整数，而不能为形如 $3n+2$ 的整数.

所以丁不能作出方程，而甲可以作出方程. 比如 $x_1=1, x_2=1$，则 $p=-2, q=1$，方程 $x^2-2x+1=0$ 即合于对甲的要求.

若 $x_1$ 和 $x_2$ 都取形如 $3n+2$ 的整数. 设 $x_1=3n_1+2,\quad x_2=3n_2+2$，这里 $n_1$ 和 $n_2$ 是整数.

由韦达定理

$$p=-[(3n_1+2)+(3n_2+2)]=-3(n_1+n_2+2)+2,$$

$$q=(3n_1+2)(3n_2+2)=3(3n_1n_2+2n_1+2n_2+1)+1.$$

于是，当 $x_1$ 和 $x_2$ 为形如 $3n+2$ 的整数时，$p$ 为形如 $3n+2$ 的数，$q$ 为形如 $3n+1$ 的数，因此，乙和丙作不出符合所要求的方程.

2·18　对于任意的整数 $n\geqslant 1$，证明数列 $2, 2^2, 2^{2^2}, 2^{2^{2^2}}, \cdots$ 自某项起，各项对 $n$ 同余.

（第 20 届美国数学奥林匹克，1991 年）

[证 1]　为方便计，令 $a_0=1,\quad a_k=2^{a_{k-1}},\quad k\in N$.

显然，当 $i\leqslant j$ 时，

$$a_i \mid a_j.$$

由于在 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 这 $n+1$ 个数中，必有两个数对模 $n$ 同余，因

此存在 $0 \leqslant i < j \leqslant n$,使得

$$a_i \equiv a_j \pmod n.$$

若自然数 $s \geqslant j$,则有

$$s - i - 1 \geqslant j - i - 1 \geqslant 0,$$

$$a_{j-i-1} \mid a_{s-i-1},$$

所以

$$a_{j-i-1} \mid a_{s-i}.$$

因此

$$a_{j-i-1} \mid a_{s-i} - a_{s-i-1},$$

即有

$$2^{a_{j-i-1}} - 1 \mid 2^{a_{s-i} - a_{s-i-1}} - 1.$$

此式又可化为

$$a_{j-i} - 1 \mid \frac{a_{s-i+1}}{a_{s-i}} - 1.$$

所以

$$a_{j-i} - a_0 \mid a_{s-i+1} - a_{s-i}.$$

又有

$$2^{a_{j-i} - a_0} - 1 \mid 2^{a_{s-i+1} - a_{s-i}} - 1.$$

即

$$\frac{2^{a_{s-i+1} - a_{s-i}} - 1}{2^{a_{j-i} - a_0} - 1} \in N.$$

$$\frac{a_{s-i+1}}{a_1} \cdot \frac{2^{a_{s-i+1} - a_{s-i}} - 1}{2^{a_{j-i} - a_0} - 1}$$

$$= \frac{2^{a_{s-i}} \cdot 2^{a_{s-i+1} - a_{s-i}} - a_{s-i+1}}{2^{a_0} \cdot 2^{a_{j-i} - a_0 - a_1}}$$

$$= \frac{a_{s-i+2} - a_{s-i+1}}{a_{j-i+1} - a_1} \in N.$$

重复上述过程,可得

$$\frac{a_{s-i+3} - a_{s-i+2}}{a_{j-i+2} - a_2} \in N.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{a_{s+1} - a_s}{a_j - a_i} \in N.$$

从而 $a_{s+1} - a_s = k(a_j - a_i) \equiv 0 \pmod n$.
其中 $k$ 为自然数.

取 $s = j, j + 1, \cdots$ 则得

$$a_j \equiv a_{j+1} \equiv a_{j+2} \equiv \cdots \pmod n.$$

所以自第 $j$ 项起,每一项 $a_k$ 都对模 $n$ 同余.

**[证 2]** 用数学归纳法.

当 $n=1$ 时,要证的结论显然成立.

对于 $n>1$,假设对于所有小于 $n$ 的自然数,要证的结论成立.

令 $n=2^k q$,其中 $q$ 为奇数.

如果 $q=1$,则要证的结论也显然成立.

不妨设 $q$ 是大于 1 的奇数,记

$$a_0=1, a_{i+1}=2^{a_i}, \quad i=0,1,2,\cdots.$$

由于 $$2^t\not\equiv 0 \pmod q, \quad 0\leqslant t\leqslant q-1.$$

所以存在 $0\leqslant i<j<q-1$,使得

$$2^i\equiv 2^j \pmod q,$$

即 $$q\mid 2^j-2^i=2^i(2^{j-i}-1).$$

于是 $$q\mid 2^{j-i}-1.$$

记 $r=j-i$,则

$$1\leqslant r<q\leqslant n, \text{且}$$
$$2^r\equiv 1 \pmod q.$$

由归纳假设,存在自然数 $i_1$,使得

$$a_i\equiv a_{i_1} \pmod r, \quad \text{对所有 } i\geqslant i_1,$$

于是 $$a_i=a_{i_1}+rh.$$

从而对任何 $i\geqslant i_1$,有

$$\begin{aligned}a_{i+1}&=2^{a_i}\\&=2^{a_{i_1}}\cdot(2^r)^h\\&\equiv 2^{a_{i_1}}\\&=a_{i_1+1} \pmod q.\end{aligned}$$

又显然存在 $i_2$,使得当 $i\geqslant i_2$ 时,$2^k\mid a_i$.

令 $$i_0=\max(i_1+1,i_2).$$

则对于任何 $i,j\geqslant i_0$,都有

$$a_i\equiv a_j \pmod{2^k q},$$

即 $$a_i\equiv a_j \pmod n.$$

于是对于 $n$,要证的结果也成立.

因此,对所有自然数 $n$,命题成立.

2·19　设集合 $A=\{0,1,2,3,4,5,6\}$.设 $f:A\to A$ 是 $A$ 到 $A$ 上的

函数,对于 $i \in A$.把 $i - f(i)$ 被7除所得的余数记作 $d_i(0 \leqslant d_i < 7)$,如果 $d_0, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6$ 两两不同,则称 $f$ 是 $A$ 到 $A$ 上的 $D$ 函数.

(1) 判断下面两个 $A$ 到 $A$ 上的函数 $f_1, f_2$ 是不是 $D$ 函数:

| $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_1(i)$ | 0 | 4 | 6 | 5 | 1 | 3 | 2 |

| $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_2(i)$ | 1 | 6 | 4 | 2 | 0 | 5 | 3 |

(2) 设 $f$ 是 $A$ 到 $A$ 上的 $D$ 函数,$d_i$ 表示 $i - f(i)$ 被7除所得的余数 $(0 \leqslant d_i < 7)$,令 $F(i) = d_i, i \in A$,证明 $F$ 也是 $A$ 到 $A$ 上的 $D$ 函数.

(3) 证明所有 $A$ 到 $A$ 上的不同的 $D$ 函数的个数是奇数.

(理科实验班入学数学复试,1987年)

**[解]** (1) 由定义列出下表

| $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_1(i)$ | 0 | 4 | 6 | 5 | 1 | 3 | 2 |
| $i - f_1(i)$ | 0 | $-3$ | $-4$ | $-2$ | 3 | 2 | 4 |
| $d_i$ | 0 | 4 | 3 | 5 | 3 | 2 | 4 |

由于 $d_1 = d_6$, $d_2 = d_4$,所以 $f_1$ 不是 $D$ 函数.

| $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_2(i)$ | 1 | 6 | 4 | 2 | 0 | 5 | 3 |
| $i - f_2(i)$ | $-1$ | $-5$ | $-2$ | 1 | 4 | 0 | 3 |
| $d_i$ | 6 | 2 | 5 | 1 | 4 | 0 | 3 |

因为 $d_i$ 两两不等,所以 $f_2$ 是 $D$ 函数.

(2) 由题设,$f$ 是 $A$ 到 $A$ 上的函数,且

$$F(i) = d_i,$$

则

$$0 \leqslant F(i) < 7.$$

所以 $F$ 是 $A$ 到 $A$ 上的函数.

又 $i-f(i)=7k_i+d_i$，所以

$$i-d_i=i-F(i)=7k_i+f(i).$$

因为 $f(i)(i=0,1,\cdots,6)$ 两两不同，所以 $F$ 是 $A$ 到 $A$ 上的 $D$ 函数.

(3) 由于 $A$ 是有限集合，所以 $A$ 到 $A$ 上的函数数目为有限个，因此从 $A$ 到 $A$ 上的 $D$ 函数也是有限个.

由(2)知，对于每一个 $A$ 到 $A$ 上的 $D$ 函数 $f$ 一定有一个 $A$ 到 $A$ 上的 $D$ 函数 $F$，关键在于 $F\neq f$ 的有多少个？$F=f$ 的有多少个？

首先计算满足 $F\neq f$ 的 $D$ 函数的数目.

设 $f$ 是 $A$ 到 $A$ 上的 $D$ 函数，$F(i)=d(i)$，即 $F$ 是按(2)得到的 $D$ 函数，对于 $F$ 用同样的方法可以得到一个 $D$ 函数 $G$，即 $G(i)$ 是 $i-F(i)$ 被 7 除的余数，由(2)知，$i-F(i)$ 被 7 除的余数就是 $f(i)$，所以

$$G(i)=f(i),\quad 0\leqslant i<6.$$

这就是说，从 $F$ 出发得到 $D$ 函数 $G$，而 $G$ 就是 $f$，因此满足 $F\neq f$ 的 $D$ 函数是两两配对的.

所以，$F\neq f$ 的 $D$ 函数数目为偶数.

下面再求 $F=f$ 的 $D$ 函数的数目.

设 $F(i)=f(i)$，又 $F(i)=d_i$，则

$$i-f(i)=7k_i+d_i=7k_i+f(i).$$

$$f(i)=\frac{i-7k_i}{2},\quad 0\leqslant f(i)<7.$$

下面求 $f(i)$.

$i=0$ 时，

$$f(0)=\frac{0-7k_0}{2}=-\frac{7}{2}k_0.$$

因为 $0\leqslant-\frac{7}{2}k_0<7$，所以

$$-2<k_0\leqslant 0.$$

$k_0=0$ 或 $k_0=-1$.

$k_0=0$ 时，$f(0)=0$.

$k_0=-1$ 时，$f(0)=\frac{7}{2}$ 不是整数.

所以 $k_0=0$，$f(0)=0$.

$i=1$ 时，

$$f(1)=\frac{1-7k_1}{2},\quad 0\leqslant\frac{1-7k_1}{2}<7.$$

$$-\frac{13}{7} < k_1 \leqslant \frac{1}{7}.$$

所以　　$k_1 = -1$　或　$k_1 = 0$.

$k_1 = -1$ 时，$f(1) = \dfrac{1 - 7 \cdot (-1)}{2} = 4$.

$k_1 = 0$ 时，$f(1) = \dfrac{1}{2}$ 不是整数.

所以　$k_1 = -1$，$f(1) = 4$.

$i = 2$ 时,由

$$0 \leqslant \frac{2 - 7k_2}{2} < 1,$$

得　　　$k_2 = -1$ 或 $k_2 = 0$.

$k_2 = 0$ 时，$f(2) = \dfrac{2 - 7 \cdot 0}{2} = 1$.

$k_2 = -1$ 时，$f(2) = \dfrac{9}{2}$ 不是整数.

所以 $k_2 = 0$，$f(2) = 1$.

同法可求 $f(3) = 5$，$f(4) = 2$，$f(5) = 6$，$f(6) = 3$.

由以上可得下表.

| $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(i)$ | 0 | 4 | 1 | 5 | 2 | 6 | 3 |
| $i - f(i)$ | 0 | $-3$ | 1 | $-2$ | 2 | $-1$ | 3 |
| $d_i$ | 0 | 4 | 1 | 5 | 2 | 6 | 3 |

所以经验证,$f(i) = F(i) = d_i$ 为 $D$ 函数,且是惟一一个 $F = f$ 的 $D$ 函数.

于是 $A$ 到 $A$ 上的 $D$ 函数个数为奇数.

2·20　设 $n$ 是奇数.试证存在 $2n$ 个整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n; b_1, b_2, \cdots, b_n$,使得对任意一个整数 $k(0 < k < n)$,下列 $3n$ 个数 $a_i + a_{i+1}$，$a_i + b_i$, $b_i + b_i + k$.($i = 1, 2, \cdots, n$;其中 $a_{n+1} = a_1$，$b_{n+j} = b_j$，$0 < j < n$)被 $3n$ 除所得的余数互不相同.

（第 8 届中国中学生数学冬令营,1993 年）

[证]　设 $a_i = 3i - 2$，$b_i = 3i - 3$　($i = 1, 2, \cdots, n$),则有

$$a_i + a_{i+1} = 3i - 2 + 3(i+1) - 2$$
$$= 6(i-1) + 5 \equiv 2 \pmod 3, \qquad ①$$
$$a_i + b_i = 3i - 2 + 3i - 3$$
$$= 6(i-1) + 1 \equiv 1 \pmod 3, \qquad ②$$
$$b_i + b_{i+k} = 3i - 3 + 3(i+k) - 3$$
$$= 6(i-1) + 3k \equiv 0 \pmod 3, \qquad ③$$

由此可见,①,②,③三组数对模3不同余,因此对模$3n$也不同余,亦即任何来自不同组的两个数被$3n$除所得的余数不相同.

下证同一组内任何两数对模$3n$不同余.

事实上,若同一组内有两数对模$3n$同余,即存在$p,q$, $1 \leqslant p < q \leqslant n$,使得

$$6(p-1) + r \equiv 6(q-1) + r \pmod{3n},$$

其中$r = 1,2$或$3k$,则

$$6(p-1) \equiv 6(q-1) \pmod{3n},$$
$$6p \equiv 6q \pmod{3n},$$
$$2p \equiv 2q \pmod{n},$$
$$2(p-q) \equiv 0 \pmod{n}.$$

因为$n$是奇数,则$2 \nmid n$,又$|p-q| < n$,故必有 $2(p-q) = 0$.

于是有$p = q$,与$p < q$矛盾.

所以无论第一组($r = 2$),第二组($r = 1$)或第三组($r = 2k$),组内任何两数对模$3n$不同余.

综上所述,所取的$2n$个数

$$a_1, a_2, \cdots, a_n; \quad b_1, b_2, \cdots, b_n$$

为符合题目要求的$2n$个整数.

**2·21** 已给整数$a_1, a_2, \cdots, a_n (n \geqslant 3)$,设

$$n \nmid a_i, \ i = 1,2,\cdots,n, \qquad ①$$
$$n \nmid a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

求证至少存在$n$个由0或1组成的不同数列$(e_1, e_2, \cdots, e_n)$,使得总有

$$n \mid e_1a_1 + e_2a_2 + \cdots + e_na_n. \qquad ②$$

（第 32 届国际数学奥林匹克预选题，1991 年）

**［证］** 显然，$e_1 = e_2 = \cdots = e_n = 0$ 满足 ②，因此，只须找出 $n-1$ 个不同的非全零数列 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 使之满足 ②

可以证明满足条件的数列 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 一定存在. 事实上，令

$$b_0 = 0,$$

$$b_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

对 $n+1$ 个数 $b_0, b_1, \cdots, b_n$ 被 $n$ 除，必有两个数对 mod $n$ 同余，即存在 $0 \leqslant t < k \leqslant n$，使得

$$b_k - b_t \equiv 0 \pmod n,$$

即

$$n \mid a_{t+1} + \cdots + a_k.$$

因此可以有

$$n \mid e_1 a_1 + e_2 a_2 + \cdots + e_{t+1} a_{t+1} + \cdots + e_k a_k + \cdots + e_n a_n.$$

设已有 $k$ 个有上述性质的不同数列

$$(e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_n}), \quad i = 1, 2, \cdots, k.$$

其中 $1 \leqslant k \leqslant n-2$. 每一个数列均满足 ②，且其元素不全为 0.

于是，由 ① 可知，其元素至少存在 1 个 0，两个 1.

我们用数学归纳法证明：

存在 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的一个排列 $\{\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n\}$，使得每一个 $(e_{i\sigma_1}, e_{i\sigma_2}, \cdots, e_{i\sigma_n})$ 中的元素"1"不全相连 $(i = 1, 2, \cdots, k)$. 即对每一个 $i = 1, 2, \cdots, k$，不存在 $1 \leqslant m_i < t_i \leqslant n$，使得

$$e_{i\sigma_j} = \begin{cases} 1, & m_i \leqslant j \leqslant t_i, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

下面证明这个命题.

当 $k = 1$ 时，显然，上述命题对任意 $n \geqslant 3$ 成立.

假设当 $1 \leqslant k \leqslant s$ 时，命题对任意 $n \geqslant k+2$ 成立.

下面考虑 $k = s+1$ 的情况：

对任何 $n \geqslant s+3$，在 $(e_{i1}, e_{i2}, \cdots, e_{in})$ 中，如果仅有 1 个元素为"0"，或者仅有两个元素为"1"，称这种元素是"坏"的. 每一个数列至多有两个"坏"元素，于是坏元素的总数 $\leqslant 2k = 2s+2$.

由于 $n \geqslant k+2 = s+3$，从而存在 $1 \leqslant m \leqslant n$，使得 $e_{1m}, e_{2m}, \cdots, e_{(s+1)m}$ 中至多有一个"坏"元素. 不妨设 $m = 1$，且 $e_{21}, e_{31}, \cdots, e_{(s+1)1}$ 都

不是“坏”元素，于是对任意$2\leqslant i\leqslant s+1$，$(e_{i2},e_{i3},\cdots,e_{in})$中至少有一个元素“0”，同时至少有两个元素“1”，且$n-1\geqslant s+2$.

由归纳假设，存在$\{2,3,\cdots,n\}$的一个排列$\{\sigma_2',\cdots,\sigma_n'\}$，使得每一个$(e_{i\sigma_2'},e_{i\sigma_3'},\cdots,e_{i\sigma_n'})$ $(2\leqslant i\leqslant s+1)$的元素“1”不全相连.如果数列$(e_{11},e_{1\sigma_2'},\cdots,e_{1\sigma_n'})$中元素“1”全相连，当$e_{11}=1$时，令

$$\sigma_i=\begin{cases}\sigma_{i+1}', & 1\leqslant i\leqslant n-1,\\ 1, & i=n.\end{cases}$$

则$(e_{i\sigma_1},e_{i\sigma_2},\cdots,e_{i\sigma_n})$，$1\leqslant i\leqslant s+1$的所有元素“1”不全相连.

当$e_{11}=0$时，则存在$2\leqslant k<t\leqslant n$，使

$$e_{i\sigma_j'}=\begin{cases}1, & k\leqslant j\leqslant t,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

此时可令

$$\sigma_i=\begin{cases}\sigma_{i+1}', & 1\leqslant i\leqslant k-1,\\ 1, & i=k,\\ \sigma_i' & k<i\leqslant n.\end{cases}$$

则对所有$1\leqslant i\leqslant s+1$，$(e_{i\sigma_1},e_{i\sigma_2},\cdots,e_{i\sigma_n})$中的元素“1”不全相连.

回到原来的问题.令

$$c_0=0,\quad c_i=a_{\sigma_1}+a_{\sigma_2}+\cdots+a_{\sigma_i},\qquad i=1,2,\cdots,n.$$

则存在$0\leqslant t<k\leqslant n$，使

$$c_k-c_t\equiv 0\pmod n.$$

即
$$n\mid a_{\sigma_{t+1}}+\cdots+a_{\sigma_k}.$$

令
$$e_{k+1\sigma_j}=\begin{cases}1, & t+1\leqslant j\leqslant k,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

显然，$(e_{k+1\,\sigma_1},e_{k+1\,\sigma_2},\cdots,e_{k+1\,\sigma_n})$满足②且不同于$(e_{i\sigma_1},e_{i\sigma_2},\cdots,e_{i\sigma_n})$，$\quad i=1,2,\cdots,k$.

由此即知存在$n-1$个不同的非全零数列$(e_1,e_2,\cdots,e_n)$满足②.

**2·22** 设正整数$k$，使集合

$$X=\{3^{31},3^{31}+1,\cdots,3^{31}+k\}$$

可以分解为三个不相交的子集$A$，$B$和$C$的并集，且这三个集的元素之和等于同一个值.

求证$k\not\equiv 1\pmod 3$，试找出一列具有这样性质的$k$.

（中国浙江省高中数学夏令营，1990年）

［证］ 由题意知

$$3 \mid 3^{31}+(3^{31}+1)+(3^{31}+2)+\cdots+(3^{31}+k),$$

$$3 \left| \left[(k+1)3^{31}+\frac{k(k+1)}{2}\right]\right. .$$

于是 $$3 \left| \frac{k(k+1)}{2}\right. .$$

从而 $$3 \mid k(k+1).$$

即 $$3 \mid k \quad 或 \quad 3 \mid k+1.$$

即 $$k \not\equiv 1 \pmod 3.$$

取 $k+1=6m$，即 $k=6m-1 \quad (m \in N)$ 就可得到符合题意的一列数.

令 $A_i=\{3^{31}+i,\ \ 3^{31}+i+1\ \ ,\cdots,\ \ 3^{31}+i+5\}$，由于

$$\begin{aligned}&(3^{31}+i)+(3^{31}+i+5)\\=&(3^{31}+i+1)+(3^{31}+i+4)\\=&(3^{31}+i+2)+(3^{31}+i+3),\end{aligned}$$

所以只要把 $A_0,A_6,A_{12},\cdots,A_{6m-6}$ 每个集合中最大和最小的元素作为 $A$ 的元素，第二大和第二小的元素作为 $B$ 的元素，余下的作为 $C$ 的元素即可得到所需的子集 $A,B,C$.

2·23 证明对于任何素数 $p$ 和自然数 $n$，$n \geqslant p$. 如下的数均可被 $p$ 整除.

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{p}\right]}(-1)^k C_n^{pk}$$

（全苏数学冬令营，1991年）

［证］ 设 $n=pq+r,\quad 0 \leqslant r<p$，则

$$\begin{aligned}C_n^{pk}&=\frac{n(n-1)\cdots(n-pk+1)}{(pk)!}\\&=\frac{(pq+r)(pq+r-1)\cdots(pq+r-pk+1)}{pk(pk-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}\\&\equiv\frac{q(q-1)\cdots(q-k+1)}{k!}\\&\equiv C_q^k \qquad \pmod p.\end{aligned}$$

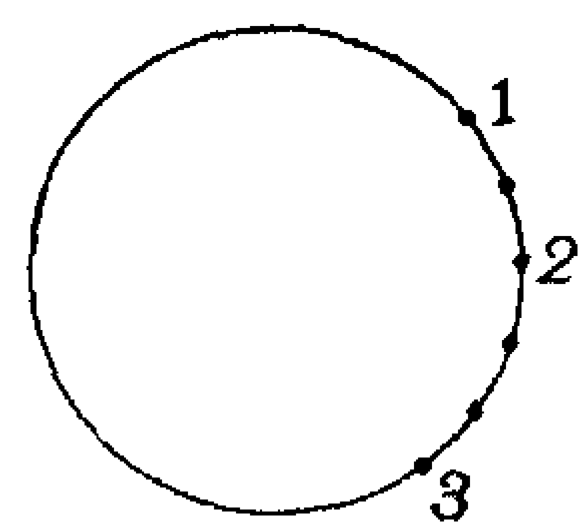
所以

$$\sum_{k=0}^{[\frac{n}{p}]}(-1)^k C_n^{pk} \equiv \sum_{k=0}^{q}(-1)^k C_q^k \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\ p).$$

故 $$p \mid \sum_{k=0}^{[\frac{n}{p}]}(-1)^k C_n^{pk}.$$



2·24 在一个圆周上给定 2000 个点，取其中一点标记上数 1，从这点开始按顺时针方向数到第二个点标记上数 2，从标记上数 2 的点开始按顺时针方向数到第三个点标记上数 3（如图），继续这个过程直到 1，2，3，…，1993 都被标记到点上. 圆周上这些点中有一些会标记上不止一个数，也有一些点未被标记上任何数，标上 1993 的那一个点上标记的最小整数是什么？




（第 11 届美国数学邀请赛，1993 年）

［解］ 将 2000 个点按顺时针方向依次记为 1，2，3，…，2000.

依题意的标数为 $a_1, a_2, \cdots, a_{1993}$.

于是 $a_1 = 1$， $a_2 = 3$， $a_3 = 6, \cdots$.

$$a_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$a_3 = \frac{1993 \cdot 1994}{2} = 1987021 \equiv 1021 \quad (\mathrm{mod}\ 2000).$$

故 $a_{1993}$ 位于第 1021 号位置.

下面求最小的正整数 $i$，使得

$$a_i = \frac{i(i+1)}{2} \equiv 1021 \quad (\mathrm{mod}\ 2000).$$

即求最小的正整数 $k$，使得

$$\frac{i(i+1)}{2} = 1021 + 2000k,$$

$$i^2 + i - 2042 - 4000k = 0,$$

$$i = \frac{-1 \pm \sqrt{16000k + 8169}}{2}.$$

使 $i$ 是最小正整数的最小的 $k = 3$.

此时 $i = 118$，即标上 1993 那一点（第 1021 号）上标记的最小正整数是 118.

2·25　(1) 确定所有的正整数 $n$,使得 $2^n-1$ 能被 7 整除.

(2) 证明对于所有的正整数 $n$, $2^n+1$ 不能被 7 整除.

(第 6 届国际数学奥林匹克,1964 年)

[解]　(1) 如果 $n$ 是 3 的倍数,设 $n=3k$($k$ 是正整数),则

$$\begin{aligned}2^n-1&=2^{3k}-1\\&=8^k-1\\&=(8-1)(8^{k-1}+8^{k-2}+\cdots+8+1).\end{aligned}$$

显然,$2^n-1$ 能被 7 整除.

如果 $n$ 不是 3 的倍数,则可设 $n=3k+1$, $n=3k+2$($k$ 为非负整数).

当 $n=3k+1$ 时,

$$\begin{aligned}2^n-1&=2^{3k+1}-1\\&=2\cdot 8^k-1\\&=2(7+1)^k-1.\end{aligned}$$

由 $(7+1)^k$ 被 7 除时余 1,则 $2(7+1)^k-1$ 被 7 除时余 1,于是 $2^n-1$ 被 7 除时余 1.

因此,当 $n=3k+1$($k$ 为非负整数)时,$2^n-1$ 不能被 7 整除.

当 $n=3k+2$ 时,

$$\begin{aligned}2^n-1&=2^{3k+2}-1\\&=4\cdot 8^k-1\\&=4(7+1)^k-1\end{aligned}$$

于是 $2^n-1$ 被 7 除时余 3.

因此,当 $n=3k+2$ ($k$ 为非负整数)时,$2^n-1$ 不能被 7 整除.

由以上,当且仅当 $n$ 是 3 的整数倍时,$2^n-1$ 能被 7 整除.

(2)　由(1)可知,当 $n=3k$, $3k+1$, $3k+2$ 时,$2^n-1$ 被 7 除的余数依次为 0,1,3.

因此,$2^n+1=2^n-1+2$ 被 7 除的余数为 2,3,5.

于是,对任意正整数 $n$, $2^n+1$ 总不能被 7 整除.

2·26　求一对正整数 $a,b$,满足

(1) $ab(a+b)$ 不能被 7 整除;

(2) $(a+b)^7-a^7-b^7$ 能被 $7^7$ 整除.验证你的答案.

(第 25 届国际数学奥林匹克,1984 年)

**[解 1]** 设正整数 $a,b$ 满足题目要求,并令 $b=1$,由于

$$(a+b)^7-a^7-b^7=7ab(a+b)(a^2+ab+b^2)^2.$$

因为 $7\nmid ab(a+b)$,则应有 $7^3\mid a^2+ab+b^2$.

为此我们寻找 $a$,使 $7^3\mid a^2+a+1$.

设 $a=7k+r,\ r=0,\pm1,\pm2,\pm3$.

由 $7\nmid a(a+1)$,则 $r\neq0,-1$.

$a^2+a+1=49k^2+7k(2r+1)+r^2+r+1$.

易知 $r=-3$ 时,$7\mid r^2+r+1$,从而 $7\mid a^2+a+1$.

此时 $a^2+a+1=7(7k^2-5k+1),\quad a=7k-3$.

再设 $k=7h+r_1,\quad r_1=0,\pm1,\pm2,\pm3$,则

$$\begin{aligned}&7k^2-5k+1\\=&7(49h^2+14hr_1)-35h+7r_1^2-5r_1+1.\end{aligned}$$

易知 $r_1=3$ 时,$7\mid-5r_1+1$,从而 $7\mid 7k^2-5k+1$.

此时 $7k^2-5k+1=7(7^2h^2+37h+7),\quad k=7h+3$.

为使 $7\mid7^2h^2+37h+7$,只须 $7\mid h$,令 $h=7t$,则必有

$7\mid7^2h^2+37h+7,\quad 7^2\mid7k^2-5k+1,\quad 7^3\mid a^2+a+1$,

此时 $a=7^3t+18,\quad b=1$.

特别地取 $t=0$ 时,$a=18,\quad b=1$ 是所求的一组解.

**[解 2]** 由 $7^7\mid(a+b)^7-a^7-b^7=7ab(a+b)(a^2+ab+b^2)^2$,

及 $7\nmid ab(a+b)$,

可知,应有 $7^3\mid a^2+ab+b^2$.

下面我们求满足方程 $a^2+ab+b^2=7^3=343$ 的正整数对,

由于 $(a+b)^2-ab=a^2+ab+b^2\geqslant3ab$,则

$$3ab\leqslant343,$$
$$ab\leqslant114.$$

于是有 $343\leqslant(a+b)^2\leqslant343+114=457$.

解得 $19\leqslant a+b\leqslant21$.

令 $a+b=19$,此时可得 $ab=18$,解得 $a=18,b=1$,容易验证这是一对满足题设条件的正整数.

2·27 设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 是具有整数系数 $a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n$ 的多项式.

证明如果 $f(0),f(1),f(2),\cdots,f(1992)$ 都不能被 1992 整除,则

$f(x)$ 没有整数根.

(乌克兰数学奥林匹克,1992 年)

[证] 假设 $f(x)$ 有整数根 $m$,且

$$m \equiv r \pmod{1992} \qquad 0 \leqslant r < 1992. \qquad ①$$

由题设 $f(r)$ 不能被 1992 整除.

由于 $f(m)=0$,则 $f(r)-f(m)=f(r)$,

$$\begin{aligned} & f(r)-f(m) \\ = & a_0(r^n-m^n)+a_1(r^{n-1}-m^{n-1})+\cdots+a_{n-1}(r-m). \end{aligned}$$

由 ① 可知 $\quad r^i-m^i \equiv 0 \pmod{1992}$,

其中 $i=1,2,\cdots,n$.从而

$$1992 \mid f(r)-f(m)=f(r).$$

与 $f(r)$ 不能被 1992 整除矛盾.

因此,$f(x)$ 没有整数根.

2·28 证明任何不超过 $n!$ 的自然数至多可以表示为 $n$ 个数之和.并且这些数中任何两个都不相等,同时每个数都是 $n!$ 的约数.

(第 2 届全苏数学奥林匹克,1968 年)

[证] 对 $n$ 施用数学归纳法.

(1) $n=1$ 时,$1!=1$,结论成立;

(2) 假设结论对 $\leqslant n!$ 的自然数成立.

设 $\quad a \leqslant (n+1)!$,则

$$a=(n+1)d+r, \quad d \leqslant n!, \quad 0 \leqslant r < n+1.$$

由于 $d \leqslant n!$,由归纳假设,$d$ 可以表示为不超过 $n$ 个数之和,且这些数两两不等,每个数又都是 $n!$ 的因数.即

$$d=d_1+d_2+\cdots+d_l,$$

这里 $d_i$ 是 $n!$ 的不同因数($i=1,2,\cdots,l$),且 $l \leqslant n$.

那么有

$$a=d_1(n+1)+d_2(n+1)+\cdots+d_l(n+1)+r.$$

显然这个和中的加数不多于 $n+1$ 个,且每一个加数都是 $(n+1)!$ 的因数,任两个加数都不相同.

于是,结论对 $n+1$ 成立.

由(1),(2),对所有自然数 $n$,结论成立.

2·29 证明五次多项式

$$P(x) = x^5 - 3x^4 + 6x^3 - 3x^2 + 9x - 6$$

不能表示成两个次数低于 5 的整系数多项式之积的形式.

（波兰数学竞赛,1962 年）



［证］ 首先注意下面的事实:如果首项系数为 1 的多项式能表示成两个整系数多项式的积的形式,那么可以认为这两个多项式的首项系数为 1.

事实上,如果乘积等于原多项式的两个多项式的首项是 $a_0x^k$, $b_0x^l$,则由 $a_0b_0 = 1$ 可知,或者 $a_0 = b_0 = 1$,或者 $a_0 = b_0 = -1$,当 $a_0 = b_0 = -1$ 时,只需将这两个多项式各项都变号就变成 $a_0 = b_0 = 1$ 的情形.

若多项式 $P(x)$ 能分解成两个次数低于 5 的整系数多项式的积的形式,那么只有两种可能:一种是分解为一次多项式$(x + a)$与四次多项式 $Q(x)$ 的积,一种是分解为二次多项式$(x^2 + a_1x + a_2)$与三次多项式$(x^3 + b_1x^2 + b_2x + b_3)$的积.

(1) 假定

$$x^5 - 3x^4 + 6x^3 - 3x^2 + 9x - 6 = (x + a)Q(x). \qquad ①$$

若 ① 式成立,则对所有实数 $x$ 都成立,特别地,令 $x = -a$,① 式也应成立,此时有

$$-a^5 - 3a^4 - 6a^3 - 3a^2 - 9a - 6 = 0. \qquad ②$$

若 $a$ 是 3 的倍数,则 $-a^5 - 3a^4 - 6a^3 - 9a$ 是 9 的倍数,而 6 不是 9 的倍数,所以 ② 式左边不是 9 的倍数,因而它不可能是 0.

若 $a$ 不是 3 的倍数,当 $a$ 被 3 除余 1 时,$a^5 + 3a^4 + 6a^3 + 3a^2 + 9a + 6$ 被 3 除余 1,当 $a$ 被 3 除余 2 时,$a^5 + 3a^4 + 6a^3 + 3a^2 + 9a + 6$ 被 3 除余 2,因此,② 的左边不能为 0.

于是,① 式不可能成立.

(2) 假定

$$x^5 - 3x^4 + 6x^3 - 3x^2 + 9x - 6$$
$$= (x^2 + a_1x + a_2)(x^3 + b_1x^2 + b_2x + b_3). \qquad ③$$

比较 ③ 式两边 $x$ 同次幂的系数,得

$$a_2b_3 = -6, \qquad ④$$

$$a_1b_3 + a_2b_2 = 9, \qquad ⑤$$

$$a_1b_2 + a_2b_1 + b_3 = -3, \quad ⑥$$

$$a_1b_1 + a_2 + b_2 = 6, \quad ⑦$$

$$a_1 + b_1 = -3, \quad ⑧$$

从 ④ 式可以看出, $a_2$ 和 $b_3$ 中有一个且仅有一个是 3 的倍数.

若 $3 \mid a_2$, 且 $3 \nmid b_3$, ⑨

则由 ⑤ 可知 $3 \mid a_1$,

由 ⑥ 可知 $3 \mid b_3$. ⑩

⑩ 与 ⑨ 矛盾.

若 $3 \nmid a_2$, 且 $3 \mid b_3$. ⑪

则由 ⑤ 知 $3 \mid b_2$,

由 ⑥ 知 $3 \mid b_1$,

由 ⑦ 知 $3 \mid a_2$, ⑫

⑪ 与 ⑫ 矛盾.

于是 ③ 式不可能成立.

由(1),(2), $P(x)$ 不能表示成两个次数低于 5 的整系数多项式之积的形式.

**2·30** 求具有以下性质的最小正整数 $n$, 使得对于任意选定的 $n$ 个整数, 至少存在两个数, 它们的和或差能被 1991 整除.

(澳大利亚数学通讯竞赛, 1991 年)

**[解]** 取 996 个整数的集合

$$M = \{a_i \mid a_i = 0,1,2,\cdots,995\}.$$

则对于所有的 $i \neq j$, $i,j = 0,1,2,\cdots,995$.

$$a_i + a_j \leqslant 995 + 994 = 1989,$$

$$0 < |a_i - a_j| \leqslant 995.$$

所以 $M$ 中任意两数的和与差都不是 1991 的倍数.

设 $n = 997$, $a_1, a_2, \cdots, a_{997}$ 是任意给定的 997 个整数.

若 $a_i \not\equiv a_j \pmod{1991}$, 对所有 $i \neq j$, 则由于

$$-995, -994, \cdots, 0, 1, 2, \cdots, 995$$

是 1991 的完全剩余类, 故不妨假设 $|a_i| \leqslant 995$.

此时, 由于 $n = 997 > 996$, 所以至少存在两个不同的数 $a_i$, $a_j$, 使得 $a_i = -a_j$, 于是有

$$1991 \mid (a_i + a_j).$$

2·31　100 个不大于100 的自然数之和等于 200,证明可以从中挑出若干个数来,使它们的和恰为 100.

（第 37 届莫斯科数学奥林匹克,1974 年）

[证]　设这 100 个自然数为

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{100}.$$

若 $a_1 = a_2 = \cdots = a_{100}$,则结论显然.

若 $a_1, a_2, \cdots, a_{100}$ 中至少有两个数互不相等,不妨设 $a_1 \neq a_2$.

我们考察下列这 100 个数:

$$a_1,\ a_2,\ a_1 + a_2,\ a_1 + a_2 + a_3,\ \cdots,\ a_1 + a_2 + \cdots + a_{99}.$$

这 100 个数被 100 除得到 100 个余数,若有一个余数为 0,则这个余数所对应的数能被 100 整除.若没有一个余数为 0,则这 100 个余数中只有 1,2,…,99 这 99 种可能,于是必有两个余数相等,于是这两个数的差能被 100 整除.

因此,上述 100 个数中或者有一个数能被 100 整除,或者有两个数的差能被 100 整除.

由于这个数或这个差大于 0 而小于 200,于是这个数或这个差恰好等于 100.

若这个数等于 100,则结论得证.若有两个数的差等于 100,则这两个数的末两位相同,因此由 $a_i < 100$ 可知,这两个数不可能是 $a_1$ 和 $a_2$,于是只能是

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_i \text{ 与 } a_1 + a_2 + \cdots + a_j \quad (i > j),$$

或
$$a_1 \text{ 与 } a_1 + a_2 + \cdots + a_i,$$

或
$$a_2 \text{ 与 } a_1 + a_2 + \cdots + a_i.$$

此时,它们的差:$a_{j+1} + a_{j+2} + \cdots + a_i$,或 $a_2 + \cdots + a_i$,或 $a_1 + a_3 + \cdots + a_i$ 恰好等于 100.

由以上可知,恰有若干数之和等于 100.

2·32　证明在 $2^1 - 1, 2^2 - 1, 2^3 - 1, \cdots, 2^{n-1} - 1$ 中至少有一个数能被 $n$ 整除,其中 $n$ 为大于 1 的奇数.

（第 6 届全俄数学奥林匹克,1980 年）

[证]　考察数

$$2^0, 2^1, 2^2, \cdots, 2^{n-1},$$

它们被 $n$ 除的余数设为

$$r_0, r_1, r_2, \cdots, r_{n-1}.$$

因为 $n$ 为大于 1 的奇数，所以 $n \nmid 2^i \quad (i = 0, 1, \cdots, n-1)$.

所以，$r_0, r_1, r_2, \cdots, r_{n-1}$ 这 $n$ 个余数只有 $1, 2, \cdots, n-1$ 这 $n-1$ 种情形，因而有两个余数相等，不妨设为

$$r_k = r_l, \qquad 0 \leqslant k < l \leqslant n-1.$$

于是 $$n \mid 2^l - 2^k.$$

即 $$n \mid 2^k(2^{l-k} - 1).$$

因为奇数 $n$ 与偶数 $2^k$ 互素，则

$$n \mid 2^{l-k} - 1.$$

由于 $0 < l - k \leqslant n - 1$，则 $2^{l-k} - 1$ 是 $2^1 - 1,\ 2^2 - 1,\ \cdots,\ 2^{n-1} - 1$ 中的一个，于是问题得证.

2·33　对任给的 97 个互异的正整数 $a_1, a_2, \cdots, a_{97}$，试证其中一定存在四个正整数，仅用减号、乘号和括号将它们适当组合为一个算式，其结果是 1984 的倍数.

（中国北京市初中三年级数学竞赛，1984 年）

［证］　因为 $$1984 = 64 \cdot 31.$$

故在 $a_1, a_2, \cdots, a_{65}$ 这 65 个互异的正整数中，至少有两数被 64 除的余数相同，不妨设

$$a_1 = 64k_1 + r,\ a_2 = 64k_2 + r,\ 0 \leqslant r < 64.$$

则 $$64 \mid (a_1 - a_2).$$

在 $a_{66}, a_{67}, \cdots, a_{97}$ 这 32 个互异正整数中，至少有两数被 31 除的余数相同，不妨设

$$a_{66} = 31m_1 + r, a_{67} = 31m_2 + r, 0 \leqslant r < 31,$$

则 $$31 \mid (a_{66} - a_{67}).$$

因为 $(64, 31) = 1$，所以

$$1984 \mid (a_1 - a_2)(a_{66} - a_{67}).$$

于是 $a_1, a_2, a_{66}, a_{67}$ 即为所求的四个互异正整数.

2·34　设自然数 $n$ 有下面性质：从 $1, 2, \cdots, n$ 中任取 50 个不同的数，这 50 个数中必有两个数之差等于 7，求这样的 $n$ 的最大值.

（中国初中数学联赛，1987 年）

[**解**] 因为 $50=7\cdot7+1$,由抽屉原则,从 1,2,3,…,97,98 这 98 个数中,任取 50 个数,必有 8 个数被 7 除所得的余数相同,设余数为 $r$, $r\in\{0,1,2,\cdots,6\}$.

数论卷

又因为 $98=14\cdot7$,所以在 1,2,3,…,98 中恰有 14 个数被 7 除余 $r$,这 14 个数中,任意 8 个不同的数,必有两数之差等于 7,即 98 具有题中的性质.

另一方面,在 1,2,3,…,99 中,可取下列这 50 个数.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,
15, 16, 17, 18, 19, 20, 21,
29, 30, 31, 32, 33, 34, 35,
43, 44, 45, 46, 47, 48, 49,
57, 58, 59, 60, 61, 62, 63,
71, 72, 73, 74, 75, 76, 77,
85, 86, 87, 88, 89, 90, 91,
99.

它们之中任两个数之差都不是 7,所以 1,2,…,99 这 99 个数没有题中的性质.

因此,满足要求的 $n$ 的最大值为 98.

2·35 证明从任意 200 个整数中,可以选出 100 个,使这 100 个数的和能被 100 整除.

(第 4 届全苏数学奥林匹克,1970 年)

[**证**] 用 $P_m$ 表示下面这个一般的命题:从任意 $2m-1$ 个整数中,可以选出 $m$ 个数,使它们的和能被 $m$ 整除.

(1) 首先证明 $P_2$ 成立.

即从任意 3 个整数中,可以选出 2 个数,使它们的和能被 2 整除.

事实上,任意 3 个整数中一定有 2 个数的奇偶性相同,选取这两个数,它们的和即能被 2 整除.

(2) 其次证明 $P_5$ 成立.

即从任意 9 个整数中,可以选出 5 个数,使它们的和能被 5 整除.

把 9 个整数分别除以 5 得到 9 个余数 $r_i$,满足 $r_i\in\{0,1,2,3,4\}$, $i=1,2,\cdots,9$.

在 $r_i$ 中若有 5 个相同,则选取这 5 个 $r_i$ 对应的整数,它们的和一定

能被 5 整除；

在 $r_i$ 中若没有三个相同，则0，1，2，3，4均出现在 $r_i$ 中，取五个余数不同的整数，则它们的和一定能被 5 整除.

若某个余数 $r$ 在 $r_i$ 中或者出现3次，或者出现4次，我们可以认为这个 $r=0$，否则若 $r\neq0$，可以把 $5-r$ 补到9个余数中，此时仍可保持5个数的和能被 5 整除.

可以证明在任意 $q$ 个整数中，一定可以选择若干个数，使它们的和能被 $q$ 整除.

这是因为，对于 $a_1,a_2,\cdots,a_q$ 这 $q$ 个整数，构造和

$$a_1,a_1+a_2,\quad a_1+a_2+a_3,\quad \cdots,\quad a_1+a_2+\cdots+a_q$$

这 $q$ 个和数，若有一个能被 $q$ 整除，则命题得证，若没有一个能被 $q$ 整除，则有 $q-1$ 个余数，显然有两个和被 $q$ 除的余数相同，于是这两个和的差能被 $q$ 整除.

因此，从 5 个非零余数 $r_i$ 中可以挑选若干个(2 至 5 个)，它们的和能被 5 整除，再把余数增补到 5 个(如添加 $r=0$ 的数).

由以上，$P_5$ 得证.

下面再证明：

(3) 如果命题 $P_k$ 和 $P_m$ 成立，那么命题 $P_{km}$ 也成立.

设给定 $2km-1$ 个整数，按照 $P_m$，可以从中选择一组 $m$ 个数，使它们的和能被 $m$ 整除，从剩下的 $2km-m-1$ 个数中，照样再选出同样一组 $m$ 个数，接着再从剩下的 $2km-2m-1$ 个数中选出 $m$ 个数，等等，共选 $2k-1$ 次，此时还剩下 $2km-(2k-1)m-1=m-1$ 个数.

再考察所选出的 $2k-1$ 组的算术平均值，它是一个整数，按照 $P_k$，从中可以选择 $k$ 个数，它们的和能被 $k$ 整除. 于是这相应 $k$ 组中共 $km$ 个数显然能被 $km$ 整除. 因此，命题 $P_{km}$ 得证.

因为 $100=2\cdot2\cdot5\cdot5$，由(1)，(2)和(3)，就可以得到 $P_{100}$，从而证明了从 199 个整数中可以选出 100 个数，它们的和能被 100 整除，从而本题得证.

**2·36** 试证对每一个正整数都存在一个它的倍数，该数包含全部十个阿拉伯数字.

(第 16 届美国普特南数学竞赛，1956 年)

**[证 1]** 设 $p=1234567890\cdot10^k$，$n$ 为给定的正整数，$k$ 是使

$10^k > n$ 的一个整数.

则 $p+1, p+2, \cdots, p+n$ 是$n$ 个以 1234567890 开始的十进制数，这 $n$ 个数中必有一个是 $n$ 的倍数.

[证 2]　设 $n$ 是给定的正整数.

又设　$A = \overline{1234567890}$

并记　$\underbrace{AA\cdots A}_{i个} = \underbrace{12345678901234567890\cdots1234567890}_{i组}$,

则在数列

$$A,\quad AA,\quad \cdots,\quad \underbrace{AA\cdots A}_{n+1组}$$

中,必有两数对 $n$ 同余.设为$\underbrace{AA\cdots A}_{i组}$,$\underbrace{AA\cdots A}_{j组}$对 $n$ 同余,则

$$\underbrace{AA\cdots A}_{i组} - \underbrace{AA\cdots A}_{j组}$$

是 $n$ 的倍数,而这个数由全部十个阿拉伯数字组成.

2·37　已知整数 $a_1, a_2, \cdots, a_{10}$.证明存在一个非零数列

$$\{x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{10}\},$$

使得所有 $x_i \in \{-1,0,1\}$,并且和$\sum_{i=1}^{10} x_i a_i$ 被 1001 整除.

（第 29 届国际数学奥林匹克候选题,1988 年）

[证]　考虑形如

$$y = \sum_{i=1}^{10} t_i a_i,\quad t_i \in \{0,1\}$$

的数.

这样的数共有 $2^{10} = 1024$ 个,因此必有两数(设为 $y_1 = \sum_{i=1}^{10} t_i' a_i$, $y_2 = \sum_{i=1}^{10} t_i'' a_i$)除以 1001 之后得到相同的余数,则这两个数的差 $y_1 - y_2$ 能被 1001 整除.

$$y_1 - y_2 = \sum_{i=1}^{10} (t_i' - t_i'') a_i.$$

令 $x_i = | t_i' - t_i'' |$,则由 $t_i', t_i'' \in \{0,1\}$ 可知

$$x_i \in \{-1,0,1\},$$

且 $1001 \mid \sum_{i=1}^{10} x_i a_i$， 其中 $x_1, x_2, \cdots, x_{10}$ 不全为 0.

2·38 设 $n \geqslant 4$ 是整数，$a_1, a_2, \cdots, a_n \in (0, 2n)$ 是 $n$ 个不同的整数. 证明集合 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 有一个子集，其元素的和被 $2n$ 整除.

（第 31 届国际数学奥林匹克候选题，1990 年）

[证] (1) 若 $n \notin \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，则

$$a_1, \quad a_2, \quad \cdots, \quad a_n, \quad 2n - a_1, \quad 2n - a_2, \quad \cdots, \quad 2n - a_n$$

是 $2n$ 个小于 $2n$ 的正整数，因此，其中必有两数相等，又因为 $a_1$, $a_2, \cdots, a_n$ 彼此不等，所以有 $i, j$ 使

$$a_i = 2n - a_j,$$

因为 $n \notin \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，所以 $i \neq j$，即 $a_i$ 和 $a_j$ 是两个不同的整数，且满足

$$a_i + a_j = 2n.$$

于是 $\{a_i, a_j\} \subset \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，且 $a_i + a_j = 2n$.

(2) 若 $n \in \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$.

令 $a_n = n$.

考虑 $n - 1$ 个($\geqslant 3$) 整数

$$a_1, \quad a_2, \quad \cdots, \quad a_{n-1}$$

则其中至少有两个数的差不能被 $n$ 整除.

这是因为，若每两个数的差能被 $n$ 整除，则由这两个数不等，它们的差必不小于 $n$，这时有三个数 $a_i < a_j < a_k$，

$$a_k - a_i = (a_k - a_j) + (a_j - a_i) \geqslant 2n,$$

则 $a_k \geqslant 2n + a_i$ 不属于区间$(0, 2n)$，导致矛盾.

设 $a_1$ 与 $a_2$ 的差不能被 $n$ 整除，考虑下面 $n$ 个整数

$$a_1, \quad a_2, \quad a_1 + a_2, \quad a_1 + a_2 + a_3, \quad \cdots, \quad a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1},$$

若它们被 $n$ 除的余数都不相同，则其中必有一个能被 $n$ 整除.

若有某两个数对模 $n$ 同余，则它们的差能被 $n$ 整除，显然不能是 $a_2 - a_1$，因此这个差必定是 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$ 中某些数构成的和.

因此，集合 $\{a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}\}$ 必有一子集，其元素之和等于 $kn$.

若 $k$ 为偶数，则结论已成立.

若 $k$ 为奇数，则将 $a_n = n$ 加入这个子集，其和就为 $k$ 的偶数倍，结

论也成立.

2·39　设 $a_1,a_2,\cdots,a_{100}$ 是 $1,2,\cdots,100$ 的一个排列，对于 $1\leqslant i\leqslant 100$，令 $b_i=a_1+a_2+\cdots+a_i$，　$r_i$ 是 $b_i$ 除以 100 所得的余数.

证明 $r_1,r_2,\cdots,r_{100}$ 至少取 11 个不同的值.

（加拿大数学奥林匹克训练题，1991 年）

[证]　若 $r_1,r_2,\cdots,r_{100}$ 只取 $n$ 个值，且 $n\leqslant 10$，则由

$$a_k=b_k-b_{k-1}$$
$$\equiv r_k-r_{k-1}\pmod{100}.$$

知 $r_k$ 至多有 10 种取法，$r_{k-1}$ 至多有 10 种取法，且 $r_k$ 与 $r_{k-1}$ 取相同值时其差均为 0，此时有 9 种可能，所以

$a_k$ 至多取

$$n\cdot n-n+1\leqslant 10\cdot 10-10+1=91.$$

与 $a_k$ 有 100 个相矛盾.

所以 $r_1,r_2,\cdots,r_{100}$ 至少取 11 个不同的值.

2·40　试求出一切可使 $n\cdot 2^n+1$ 被3 整除的自然数 $n$.

（第 45 届莫斯科数学奥林匹克，1982 年）

[解]　若　$3\mid n\cdot 2^n+1$，则

$$n\cdot 2^n\equiv 2\pmod 3.$$

当 $n=6k+1\quad(k=0,1,2,\cdots)$ 时，

$$\begin{aligned}n\cdot 2^n&=(6k+1)\cdot 2^{6k+1}\\&=(12k+2)\cdot 4^{3k}\\&=(12k+2)(3+1)^{3k}\\&\equiv 2\pmod 3.\end{aligned}$$

当 $n=6k+2\quad(k=0,1,2,\cdots)$ 时，

$$\begin{aligned}n\cdot 2^n&=(6k+2)\cdot 2^{6k+2}\\&=(24k+8)\cdot(3+1)^{3k}\\&\equiv 2\pmod 3.\end{aligned}$$

当 $n=6k+3\quad(k=0,1,2,\cdots)$ 时，

$$\begin{aligned}n\cdot 2^n&=(6k+3)\cdot 2^{6k+3}\\&\equiv 0\pmod 3.\end{aligned}$$

当 $n=6k+4\quad(k=0,1,2,\cdots)$ 时，

$$\begin{aligned} n\cdot 2^n &= (6k+4)\cdot 2^{6k+4} \\ &= (96k+64)\cdot 2^{6k} \\ &= (96k+64)(3+1)^{3k} \\ &\equiv 1 \pmod 3. \end{aligned}$$

当 $n=6k+5\quad(k=0,1,2,\cdots)$ 时,

$$\begin{aligned} n\cdot 2^n &= (6k+5)\cdot 2^{6k+5} \\ &= (6\cdot 32k+160)(3+1)^{3k} \\ &\equiv 1 \pmod 3. \end{aligned}$$

当 $n=6k\quad(k=1,2,\cdots)$ 时,

$$\begin{aligned} n\cdot 2^n &= 6k\cdot 2^{6k} \\ &\equiv 0 \pmod 3. \end{aligned}$$

由以上,当且仅当 $n=6k+1,6k+2$ 时,$n\cdot 2^n$ 能被 3 整除.

**2·41** 沿着圆周写了 1953 个数码,现知,如果从某个确定的位置开始,依顺时针方向逐个读出这些数码,所得到的 1953 位数可被 27 整除.证明:不论从哪个位置开始,依顺时针方向逐个读出这些数码,所得到的 1953 位数全都可以被 27 整除.

(第 16 届莫斯科数学奥林匹克,1953 年)

[证] 设从某个位置开始的 1953 位数为

$$A=\overline{a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n}\quad(n=1953),$$

则由已知, $27\mid A$.

我们只要证明 $B=\overline{a_na_1a_2\cdots a_{n-1}}$ 能被 27 整除,以后,每次将 1 个数码从数尾移至首位,就可得到全部数能被 27 整除.

考察 $10B+a_n$

$$\begin{aligned} 10B+a_n &= a_n\cdot 10^n+A \\ &= a_n\cdot \underbrace{99\cdots 9}_{1953个}+A+a_n. \end{aligned}$$

由于 $\underbrace{99\cdots 9}_{1953}$ 和 $A$ 都能被 27 整除,则

$$10B+a_n\equiv a_n \pmod{27},$$

$$10B\equiv 0 \pmod{27}.$$

又 $(10,27)=1$,则 $B\equiv 0 \pmod{27}$.

于是 $B$ 能被 27 整除.

**2·42** 有一个120位的数,将它的头12位数码以一切可能的方式重新排列,然后从按这种方法所得到的120位数中随意挑出120个数来,证明它们的和可以被120整除.

(第30届莫斯科数学奥林匹克,1967年)

**[证]** 设这120个120位数的前12个数码分别组成的数为

$$A_1,\quad A_2,\quad \cdots,\quad A_{120},$$

而每一个数的剩余的108个数码组成了数 $B$.

这时,这120个数的和为

$$S=(A_1+\cdots+A_{120})\cdot 10^{108}+120B.$$

由于每一个 $A_i$ 被3除时的余数都相同,则 $A_1+\cdots+A_{120}$ 能被3整除,而 $10^{108}$ 能被40整除,又因为 $(3,40)=1$,则 $(A_1+\cdots+A_{120})\cdot 10^{108}$ 能被120整除,从而 $S$ 能被120整除.

**2·43** 在每张卡片上各写着从11111到99999的五位数,然后把这些卡片按任意顺序排成一排.证明所得到的444445位数不可能是2的幂.

(第4届全苏数学奥林匹克,1970年)

**[证]** 注意到 $10^5$ 除以11111时,有余数1,即

$$10^5\equiv 1 \pmod{11111}.$$

记五位数11111,11112,…,99998,99999的任意一个排列为

$$a_1,a_2,\cdots,a_{88889}.$$

把这88889个五位数排成一个444445位数 $A$,则

$$A=a_1\cdot 10^{444440}+a_2\cdot 10^{444435}+\cdots+a_{88888}\cdot 10^5+a_{88889}.$$

由 $\qquad 10^5\equiv 1 \pmod{11111},$

得 $\qquad 10^{5k}\equiv 1 \pmod{11111}\quad k\in N.$

于是有

$$A\equiv a_1+a_2+\cdots+a_{88889} \pmod{11111}.$$

由于 $\quad a_1+a_2+\cdots+a_{88889}$

$$=11111+11112+\cdots+99999$$

$$=\frac{11111+99999}{2}\cdot 88889$$

$$=11111\cdot 5\cdot 88889.$$

所以 $\quad A\equiv a_1+a_2+\cdots+a_{88889}\equiv 0 \pmod{11111}.$

于是数 $A$ 能被 11111 整除,因而不可能是 2 的幂.

**2·44** 接连写出 19 至80 的两位数.问:所得到的数

$$19202122\cdots787980$$

能被 1980 整除吗?

(第 14 届全苏数学奥林匹克,1980 年)

[解] 设 $A=19202122\cdots7980$.

显然 $$20\mid A.$$

由于 $$100^k=(99+1)^k=99M+1.$$

其中 $M$ 为正整数,$k$ 为正整数.

所以 $$100^k\equiv1\pmod{99}.$$

于是有

$$\begin{aligned}A&=19\cdot100^{61}+20\cdot100^{60}+\cdots+79\cdot100+80\\&\equiv(19+20+21+\cdots+79+80)\\&\equiv31\cdot99\\&\equiv0\pmod{99}.\end{aligned}$$

于是 $$99\mid A.$$

又因为$(20,99)=1$.所以

$$20\cdot99=1980\mid A.$$

**2·45** 将所有可能的由 7 个数码所构成的序列(即由 0000000 到 9999999)按某种顺序一个接一个地写出来,证明所得到的 70000000 位数可被 239 整除.

(列宁格勒数学奥林匹克,1989 年)

[证] 显然有

$$10^7\equiv1\pmod{239}.$$

设 $A$ 和 $B$ 是两个七位数,则

$$\overline{AB}=A\cdot10^7+B\equiv A+B\pmod{239}.$$

于是所得到的 70000000 位数与这 10000000 个 7 位数之和对模 239 同余.

这 10000000 个 7 位数之和为

$$1+2+3+\cdots+9999999=\frac{1}{2}\cdot10^7(10^7-1).$$

由于 $$239\mid10^7-1.$$

则所得到的 70000000 位数能被 239 整除.



**2·46** 按公元纪年,(1) 年数不能被 4 整除是平年;(2) 年数能被 4 整除,但不能被 100 整除是闰年;(3) 年数能被 100 整除,但不能被 400 整除是平年;(4) 年数能被 400 整除是闰年;(5) 闰年 366 天,平年 365 天.证明圣诞节在星期三的概率不是$\frac{1}{7}$.

(第 10 届美国普特南数学竞赛,1950 年)

**[证]** 任何接连 400 个阳历年中,有 303 个平年,97 个闰年,共有

$$365\cdot 400+97(\text{天})$$

由于

$$365\equiv 1\pmod 7,$$

$$400\equiv 1\pmod 7$$

$$97\equiv -1\pmod 7,$$

则

$$7\mid 365\cdot 400+97.$$

在 400 年内共有整数个星期,即 20871 个星期.

因此,圣诞节在星期中轮流出现的日子是 400 次.

如果 $N$ 年的圣诞节是在星期三,则圣诞节在星期三的概率是$\frac{N}{400}$,但

$$\frac{N}{400}\neq\frac{1}{7}.$$

**2·47** 在小于 10000 的正整数中,有多少个整数 $x$,可使 $2^x-x^2$ 能被 7 整除?

(第 6 届莫斯科数学奥林匹克,1940 年)

**[解]** 首先我们证明

$$2^{21+r}-(21+r)^2\equiv 2^r-r^2\pmod 7. \quad ①$$

其中 $r\in\{1,2,3,\cdots,21\}$

事实上,由

$$2^{21}=(2^3)^7=8^7\equiv 1\pmod 7,$$

则

$$2^{21+r}\equiv 2^r\pmod 7.$$

又

$$(21+r)^2=21^2+42r+r^2\equiv r^2\pmod 7,$$

从而 ① 式成立.

由 ① 式可知,$2^x-x^2$ 被 7 除的余数以 21 为周期呈周期性变化.

令 $x=1,2,\cdots,21$ 可求出 $2^x-x^2$ 中有 6 个数能被 7 整除.

即 $x=2,4,5,6,10,15$ 时,$2^x-x^2$ 被 7 整除.

由于

$$10000=476\cdot21+4,$$

于是从 1 到 10000 中有

$$476\cdot6+1=2857$$

个 $x$,使 $2^x-x^2$ 能被 7 整除.

**2·48** 试求 $10^{10}+10^{10^2}+10^{10^3}+\cdots+10^{10^{10}}$ 被 7 除的余数.

(第 5 届莫斯科数学奥林匹克,1939 年)

**[解]** 设 $A=10^{10}+10^{10^2}+10^{10^3}+\cdots+10^{10^{10}}$.

首先我们证明,若 $6\mid n-r$,则 $7\mid10^n-10^r,(n>r)$.

事实上,

$$10^n-10^r=10^r(10^{n-r}-1)=10^r(10^{6k}-1)$$
$$=((10^6)^k-1)\cdot10^r.$$

因为 $10^6\equiv1\pmod7$,所以

$$(10^6)^k-1\equiv0\pmod7.$$

即

$$7\mid10^n-10^r.$$

另一方面, $6\mid10^k-10\quad(k\geqslant1)$, 则

$A-10\cdot10^{10}+10\cdot10^{10}$

$$=(10^{10}-10^{10})+(10^{10^2}-10^{10})+\cdots+(10^{10^{10}}-10^{10})+10\cdot10^{10}.$$

由于

$$6\mid10^k-10,\quad 则$$

$$7\mid10^{10^k}-10^{10}.$$

于是有

$$A\equiv10\cdot10^{10}\pmod7.$$
$$=10^{11}$$
$$=(7+3)^{11}$$
$$\equiv3^{11}$$
$$\equiv3^5\cdot3^6.\pmod7$$

由于

$$3^5\equiv5\pmod7,$$
$$3^6\equiv1\pmod7.$$

于是

$$A\equiv5\pmod7.$$

即 $A$ 被 7 除的余数是 5.

2·49　设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为 $n$ 个整数，$k$ 为小于 $n$ 的整数，令

$S_1=x_1+x_2+\cdots+x_k$，　　$T_1=x_{k+1}+x_{k+2}+\cdots+x_n$，

$S_2=x_2+x_3+\cdots+x_{k+1}$，　　$T_2=x_{k+2}+x_{k+3}+\cdots+x_n+x_1$，

$S_3=x_3+x_4+\cdots+x_{k+2}$，　　$T_3=x_{k+3}+x_{k+4}+\cdots+x_1+x_2$，

…………………

$S_n=x_n+x_1+\cdots+x_{k-1}$，　　$T_n=x_k+x_{k+1}+\cdots+x_{n-1}$.

（$x_i$ 循环出现，在 $x_n$ 的后面 $x_1$ 重新出现），又令 $\mathrm{m}(a,b)$ 为 $i$ 的个数，使得 $S_i$ 除以 3 余 $a$，$T_i$ 除以 3 余 $b$，这里 $a,b$ 为 0,1 或 2.

证明 $\mathrm{m}(1,2)$ 与 $\mathrm{m}(2,1)$ 除以 3 时余数相同.

（第 28 届国际数学奥林匹克候选题，1987 年）

［证］　注意到

$$S_i+T_i=x_1+x_2+\cdots+x_n.$$

(1) 若 $x_1+x_2+\cdots+x_n\not\equiv 0\pmod 3$，则

$$\mathrm{m}(2,1)=\mathrm{m}(1,2)=0.$$

(2) 若 $x_1+x_2+\cdots+x_n\equiv 0\pmod 3$，则

$$\sum_{i=1}^{n}S_i=k(x_1+x_2+\cdots+x_n)\equiv 0\pmod 3.$$

于是，在 $S_i$ 中，被 3 除余 1 的个数与被 3 除余 2 的个数之差能被 3 整除，则

$$3\mid \mathrm{m}(2,1)-\mathrm{m}(1,2).$$

即 $\mathrm{m}(1,2)$ 与 $\mathrm{m}(2,1)$ 被 3 除时余数相同.

2·50　令 $a$ 为方程 $x^3-3x^2+1=0$ 的最大正根. 证明 $[a^{1788}]$ 与 $[a^{1988}]$ 均能被 17 整除（记号 $[x]$ 表示不超过 $x$ 的最大整数）.

（第 29 届国际数学奥林匹克预选题，1988 年）

［证］　设三次方程

$$x^3-3x^2+1=0$$

的三个根为 $\alpha<\beta<a$.

令　$f(x)=x^3-3x^2+1$.

我们首先估计 $\alpha,\beta,a$ 的范围，由于

$$f(-1)<0,\ f\left(-\frac{1}{2}\right)>0,$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)>0,\ f(1)<0,$$
$$f(2)<0,\ f(2\sqrt{2})<0,\ f(3)>0,$$

则有

$$-1<\alpha<-\frac{1}{2},\quad \frac{1}{2}<\beta<1,\quad 2\sqrt{2}<a<3.$$

下面再估计 $\alpha^n+\beta^n$ 的范围.

因为

$$\begin{aligned}&(-\alpha)^3-3(-\alpha)^2+1\\=&-2\alpha^3+(\alpha^3-3\alpha^2+1)\\=&-2\alpha^3>0,\end{aligned}$$

又因为 $\frac{1}{2}<-\alpha<1$ 及 $f\left(\frac{1}{2}\right)>0$,

所以有 $-\alpha<\beta$.

从而 $|\alpha|<\beta$.

于是 $\alpha^n+\beta^n>0\quad(n\geqslant 1)$.

又因为 $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$,

以及 $\alpha+\beta+a=3,\quad \alpha\beta a=-1$,则

$$\begin{aligned}&\alpha^2+\beta^2\\=&(3-a)^2+\frac{2}{a}\\=&9+a^2-6a+\frac{2}{a}\\=&\frac{2(-3a^2+1)}{a}+9+a^2\\=&\frac{-2a^3}{a}+9+a^2\\=&9-a^2\\=&1+(8-a^2).\end{aligned}$$

由 $a>2\sqrt{2}$ 知 $8-a^2<0$.

所以 $\alpha^2+\beta^2<1$.

当 $n\geqslant 2$ 时,

$$\begin{aligned}&\alpha^n+\beta^n-(\alpha^2+\beta^2)\\=&\alpha^2(\alpha^{n-2}-1)+\beta^2(\beta^{n-2}-1)\end{aligned}$$

$\leqslant 0.$

所以 $\qquad \alpha^n + \beta^n \leqslant \alpha^2 + \beta^2 < 1.$

于是 $\qquad 0 < \alpha^n + \beta^n < 1.$

对于所有正整数 $n$,我们定义

$$u_n = \alpha^n + \beta^n + a^n.$$

容易求出

$$u_0 = \alpha^0 + \beta^0 + a^0 = 3,$$

$$u_1 = \alpha + \beta + a = 3,$$

$$u_2 = \alpha^2 + \beta^2 + a^2 = 9 - a^2 + a^2 = 9.$$

$$\begin{aligned}&u_{n+3} - 3u_{n+2} + u_n\\&= \alpha^{n+3} - 3\alpha^{n+2} + \alpha^n + \beta^{n+3} - 3\beta^{n+2} + \beta^n + a^{n+3} - 3a^{n+2} + a^n\\&= \alpha^n(\alpha^3 - 3\alpha^2 + 1) + \beta^n(\beta^3 - 3\beta^2 + 1) + a^n(a^3 - 3a^2 + 1)\\&= 0.\end{aligned}$$

所以 $\qquad u_{n+3} - 3u_{n+2} + u_n = 0,$

$$u_{n+3} = 3u_{n+2} - u_n.$$

由数学归纳法可知,$u_n$ 是整数.

又 $\qquad a^n = \alpha^n + \beta^n + a^n - (\alpha^n + \beta^n)$

$\qquad = u_n - (\alpha^n + \beta^n).$

因为 $\quad 0 < \alpha^n + \beta^n < 1$,则

$$[a^n] = u_n - 1.$$

问题归结为证明 $u_{1788} - 1$ 和 $u_{1988} - 1$ 能被 17 整除

由递推公式

$$u_{n+3} = 3u_{n+2} - u_n,$$

可依次求出以 17 为模,$u_i$ 的值.

$u_0 \equiv 3, \quad u_1 \equiv 3, \quad u_2 \equiv 9, \quad u_3 \equiv 7, \quad u_4 \equiv 1,$

$u_5 \equiv 11, \quad u_6 \equiv 9, \quad u_7 \equiv 9, \quad u_8 \equiv 16, \quad u_9 \equiv 5,$

$u_{10} \equiv 6, \quad u_{11} \equiv 2, \quad u_{12} \equiv 1, \quad u_{13} \equiv 14, \quad u_{14} \equiv 6,$

$u_{15} \equiv 0, \quad u_{16} \equiv 3, \quad u_{17} \equiv 3, \quad u_{18} \equiv 9, \quad u_{19} \equiv 7,$

$u_{20} \equiv 1.$

由以上可知

$$u_{16} \equiv u_0,\ u_{17} \equiv u_1,\ u_{18} \equiv u_2,\ u_{19} \equiv u_3.$$

可以用数学归纳法证明：

对一切非负整数 $n$，

$$u_{n+16} \equiv u_n \pmod{17}.$$

对于 $n = 0,1,2$ 成立是显然的.

设 $u_{k+16} \equiv u_k, u_{k+14} \equiv u_{k-2}, \pmod{17}$，则

$$\begin{aligned} u_{k+17} &= 3u_{k+16} - u_{k+14} \\ &\equiv 3u_k - u_{k-2} \\ &\equiv u_{k+1} \pmod{17}. \end{aligned}$$

即 $u_{k+17} \equiv u_{k+1} \pmod{17}$.

因此 $u_{n+16} \equiv u_n \pmod{17}$.

因为

$$1788 = 16 \cdot 111 + 12,$$

$$1988 = 16 \cdot 124 + 4,$$

所以

$$u_{1788} \equiv u_{12} \equiv 1 \pmod{17},$$

$$u_{1988} \equiv u_4 \equiv 1 \pmod{17}.$$

于是

$$u_{1788} - 1 \equiv 0 \pmod{17},$$

$$u_{1988} - 1 \equiv 0 \pmod{17}.$$

所以 $[a^{1788}]$ 及 $[a^{1988}]$ 均能被 17 整除.

2·51　已知存在正整数 $n$，能使数 $\underbrace{11\cdots11}_{n个}$ 被 1987 整除. 求证数

$$p = \underbrace{11\cdots11}_{n个}\underbrace{99\cdots99}_{n个}\underbrace{88\cdots88}_{n个}\underbrace{77\cdots77}_{n个}$$

和

$$q = \underbrace{11\cdots11}_{n+1个}\underbrace{99\cdots99}_{n+1个}\underbrace{88\cdots88}_{n+1个}\underbrace{77\cdots77}_{n+1个}$$

都能被 1987 整除.

（中国初中数学联赛，1987 年）

［证］　数 $p$ 可化为

$$p = \underbrace{11\cdots11}_{n个}(10^{3n} + 9 \cdot 10^{2n} + 8 \cdot 10^n + 7)$$

由已知 $1987 \mid \underbrace{11\cdots11}_{n个}$，则

$$1987 \mid p.$$

数 $q$ 可化为

$$q = \underbrace{11\cdots11}_{n+1个}[10^{3(n+1)} + 9 \cdot 10^{2(n+1)} + 8 \cdot 10^{n+1} + 7].$$

由 $$10^n = 9 \cdot \underbrace{11\cdots11}_{n个} + 1$$

及 $$\underbrace{11\cdots11}_{n个} \equiv 0 \pmod{1987},$$

则 $$10^n \equiv 1 \pmod{1987}.$$

又由
$$10^{3(n+1)} = (10^n)^3 \cdot 1000,$$
$$10^{2(n+1)} = (10^n)^2 \cdot 100,$$
$$10^{n+1} = 10^n \cdot 10,$$

可得
$$10^{3(n+1)} \equiv 1000 \pmod{1987},$$
$$10^{2(n+1)} \equiv 100 \pmod{1987},$$
$$10^{n+1} \equiv 10 \pmod{1987}.$$

从而可有

$$10^{3(n+1)} + 9 \cdot 10^{2(n+1)} + 8 \cdot 10^{n+1} + 7 \equiv 1987 \equiv 0 \pmod{1987}.$$

于是 $$1987 \mid q.$$

2·52 证明 $P_{pa}^{pb} \equiv C_a^b \pmod p$ 对所有整数 $p$，$a$ 和 $b$ 都成立，这里 $p$ 为素数，$a \geqslant b \geqslant 0$.

（第 38 届美国普特南数学竞赛，1977 年）

［证］ 可以证明
$$C_p^i \equiv 0 \pmod p$$
对素数 $p$ 及 $i = 1,2,\cdots,p-1$ 成立.

从而对整数 $x$，
$$(1+x)^p \equiv 1 + x^p \pmod p.$$
$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{pa} C_{pa}^k x^k \\ &= (1+x)^{pa} \\ &= [(1+x)^p]^a \\ &\equiv (1+x^p)^a \\ &\equiv \sum_{j=0}^{a} C_a^j x^{jp}. \pmod p \end{aligned}$$

因为在等式
$$\sum_{k=0}^{pa} C_{pa}^k x^k \equiv \sum_{j=0}^{a} C_a^j x^{jp} \pmod p.$$
中同次幂的系数必对于模 $p$ 同余，所以在 $k = pb$ 及 $j = b$ 时，有

$$C_{pa}^{pb} \equiv C_a^b \pmod p.$$

2·53　证明在形如$2^n + n^2 (n \in N)$的数当中，有无穷多个可以被100整除.

（第12届全俄数学奥林匹克，1986年）

［证］　设　$A_n = 2^n + n^2$.

若$100 \mid A_n = 2^n + n^2$，则

$$4 \mid A_n \text{ 且 } 25 \mid A_n.$$

因为$2^n$是偶数，所以当且仅当$n$是偶数时，$4 \mid A_n$.

为此设$n = 2m \quad (m \in N)$.

于是　$A_n = A_{2m} = 2^{2m} + (2m)^2 = 4(4^{m-1} + m^2)$.

这样，问题就转化为证明形如

$$B_m = 4^{m-1} + m^2 \quad (m \in N)$$

的数中，有无穷多个可被25整除.

设$m = 25k + l$，其中$k$和$l$为非负整数，且$l \in \{0,1,2,\cdots,24\}$.

$$\begin{aligned} B_m &= B_{25k+l} \\ &= (4^{25k} \cdot 4^{l-1} + l^2) + 25(25k^2 + 2kl). \end{aligned}$$

当$l = 3, k = 2p (p \in N)$时，

$$4^{25k} \cdot 4^{l-1} = 16(4^{10})^{5p}$$

的末两位数是16，这样

$$4^{25k} \cdot 4^{l-1} + l^2 = 16(4^{10})^{5p} + 9$$

的末两位数是25，于是

$$25 \mid B_m.$$

从而$n = 2m = 50k + 2l = 100p + 6 \quad (p \in N)$时，

$$100 \mid A_n,$$

这样的$A_n$有无穷多个.

2·54　证明如果三个连续自然数中中间一个是大于1的自然数的立方，那么它们的乘积能被504整除.

（波兰数学竞赛，1957年）

［证］　由题意可设$N = (a^3 - 1)a^3(a^3 + 1)$.

由于$504 = 7 \cdot 8 \cdot 9$，且7,8,9两两互素，于是问题归结为

$$7 \mid N, \quad 8 \mid N, \quad 9 \mid N,$$

同时成立.



(1) 设 $a = 7k + r$, $k$ 是非负整数, $0 \leqslant r \leqslant 6$.

由 $\quad a^3 = (7k + r)^3$

$$= 7^3k^3 + 3 \cdot 7^2k^2 + 3 \cdot 7kr^2 + r^3$$

可知 $a^3$ 与 $r^3$ 被 7 除的余数相同.

由于 $\quad r^3 = 0, 1, 8, 27, 64, 125, 216$,则 $r^3$ 被 7 除的余数等于 0,1,6.

若 $r^3$ 被 7 除余 0,则 $7 \mid a^3$,

若 $r^3$ 被 7 除余 1,则 $7 \mid a^3 - 1$,

若 $r^3$ 被 7 除余 6,则 $7 \mid a^3 + 1$.

于是 $\qquad 7 \mid N = (a^3 - 1)a^3(a^3 + 1)$.

(2) 当 $a$ 为偶数时, $8 \mid a^3$.

当 $a$ 为奇数时, $a^3 - 1$ 与 $a^3 + 1$ 是两个相邻偶数,其中必有一个能被 4 整除,因而 $8 \mid (a^3 - 1)(a^3 + 1)$.

于是 $\qquad 8 \mid N = (a^3 - 1)a^3(a^3 + 1)$.

(3) 设 $a = 3l + s$,其中 $l$ 为非负整数, $0 \leqslant s \leqslant 2$.

可以证明 $a^3$ 与 $s^3$ 被 9 除的余数相同,而由 $s^3 = 0,1,8$ 知 $s^3$ 被 9 除的余数也是 0,1,8.

若 $s^3 = 0$,则 $9 \mid a^3$.

若 $s^3 = 1$,则 $9 \mid a^3 - 1$.

若 $s^3 = 8$,则 $9 \mid a^3 + 1$.

于是 $\qquad 9 \mid N = (a^3 - 1)a^3(a^3 + 1)$.

由(1),(2) 和(3),以及 7,8,9 两两互素可知

$$504 = 7 \cdot 8 \cdot 9 \mid (a^3 - 1)a^3(a^3 + 1).$$

2·55　设 $p$ 是奇素数,证明 $\sum_{j=0}^{p} C_p^j C_{p+j}^j \equiv 2^p + 1 \pmod{p^2}$.

(第 52 届美国普特南数学竞赛,1991 年)

[解]　$\sum_{j=0}^{p} C_p^j C_{p+j}^j$

$$= \sum_{j=0}^{p} \frac{(p+j)!}{(j!)^2(p-j)!}$$

$$= 1 + \sum_{j=1}^{p-1} \frac{(p+j)!}{(j!)^2(p-j)!} + \frac{(2p)!}{(p!)^2}. \qquad ①$$

而

$$\frac{(2p)!}{(p!)^2} = 2 \cdot \frac{(p+1)(p+2)\cdots(p+p-1)}{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (p-1)}. \qquad ②$$

由于 $p$ 是奇素数,则表达式

$$\begin{aligned}&(x+1)(x+2)\cdots(x+p-1)\\&= \prod_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} (x+j)(x+p-j)\\&= \prod_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} [x^2 + px + j(p-j)]\\&= (p-1)! + \lambda px + x^2 f(x).\end{aligned}$$

这里,$\lambda$ 为某个正整数,$f(x)$ 为整系数多项式.

令 $x = p$,则

$$(p+1)(p+2)\cdots(p+p-1) \equiv (p-1)! \pmod{p^2}. \qquad ③$$

再由$\frac{(2p)!}{(p!)^2}$是整数,则由 ②,③ 式可得

$$\frac{(2p)!}{(p!)^2} \equiv 2 \pmod{p^2}. \qquad ④$$

另外,利用

$$p + j \equiv j \pmod{p},$$

$$\frac{(p+1)\cdots(p+j)}{j!} = 1 + \lambda_j p \quad (\lambda_j \text{ 为整数}),$$

以及 $C_{p+j}^j$ 为整数,可导出

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{p-1} \frac{(p+j)!}{(j!)^2(p-j)!}\\&= \sum_{j=1}^{p-1} \frac{p!}{j!(p-j)!} \cdot \frac{(p+1)\cdots(p+j)}{j!}\\&= \sum_{j=1}^{p-1} \frac{p!}{j!(p-j)!}(1 + \lambda_j p)\\&\equiv \sum_{j=1}^{p-1} \frac{p!}{j!(p-j)!}\end{aligned}$$

$$\equiv \sum_{j=1}^{p-1} C_p^j$$

$$\equiv 2^p - 2 \pmod{p^2}. \qquad ⑤$$



由 ①,④,⑤,问题得证.

2·56　设 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 是任意一个具有性质 $a_k < a_{k+1}(k \geqslant 1)$ 的正整数的无穷数列.求证可以把这个数列的无穷多个 $a_m$ 用适当的正整数 $x, y$ 表示为

$$a_m = xa_p + ya_q \quad (p \neq q).$$

（第 17 届国际数学奥林匹克,1975 年）

［证］　将数列 $\{a_n\}$ 中的所有项,按照以 $a_2$ 为模的不同剩余类分成若干个子数列(属于同一剩余类的各项构成同一个子数列).

由于以 $a_2$ 为模的不同剩余类只有有限个,即 $a_2$ 个,而数列 $\{a_n\}$ 有无穷多项,所以至少有一个子数列有无穷多项.

现在考察这个无穷子数列.

由于已知数列 $\{a_n\}$ 是严格递增的,所以在这个子数列中一定存在一项最小的 $a_p$,使得 $a_p > a_2$ 成立,同时还存在无限多个这样的 $a_m$,使得 $a_m > a_p$.

由于这个子数列的各项同属于以 $a_2$ 为模的同一剩余类,因此有

$$a_m \equiv a_p \pmod{a_2},$$

即

$$a_m - a_p = ya_2, (y \in N).$$

$$a_m = a_p + ya_2.$$

令 $x = 1$ 和 $a_q = a_2$,则有

$$a_m = xa_p + ya_q.$$

它显然满足题设的要求：　$x, y$ 是适当的自然数,因 $a_p > a_2$,则 $p \neq q$,而且使上述等式成立的 $a_m$ 是无限的.

2·57　连结正 $n$ 边形的顶点,获得一个闭的 $n$- 折线.证明若 $n$ 为偶数,则在连线中有两条平行线.若 $n$ 为奇数,连线中不可能恰有两条平行线.

（第 30 届国际数学奥林匹克候选题,1989 年）

［证］　依反时针顺序将正 $n$ 边形的顶点标上 $0, 1, 2, \cdots, n-1$.
因此,闭的 $n$- 折线可以用这 $n$ 个数的一个排列

$$a_0 = a_n, \quad a_1, \quad a_2, \quad \cdots, \quad a_{n-1}$$

来惟一地表示.

显然

$$a_ia_{i+1} \parallel a_ja_{j+1} \Longleftrightarrow \overset{\frown}{a_{i+1}a_j} = \overset{\frown}{a_{j+1}a_i}$$

$$\Longleftrightarrow a_i + a_{i+1} \equiv a_j + a_{j+1} \pmod n.$$

若 $n$ 为偶数,则

$$2 \nmid n-1.$$

所以完全剩余系的和

$$0+1+2+\cdots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2} \not\equiv 0 \pmod n.$$

而

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1}(a_i + a_{i+1}) &= \sum_{i=0}^{n-1}a_i + \sum_{i=0}^{n-1}a_{i+1}\\ &= 2\sum_{i=0}^{n-1}a_i\\ &= n(n-1)\\ &\equiv 0 \pmod n. \qquad ①\end{aligned}$$

所以 $a_i + a_{i+1}$, $i = 0,1,2,\cdots,n-1$,不是关于模 $n$ 的完全剩余系.

于是必有 $i \neq j$ $(0 \leqslant i,j \leqslant n-1)$,使

$$a_i + a_{i+1} \equiv a_j + a_{j+1} \pmod n,$$

因而必有一对边 $a_ia_{i+1} \parallel a_ja_{j+1}$.

若 $n$ 为奇数,并且恰有一对边平行,设

$$a_ia_{i+1} \parallel a_ja_{j+1}.$$

这时,在 $a_0+a_1, a_1+a_2, a_2+a_3, \cdots, a_{n-1}+a_0$ 中恰有一个剩余类 $r$ 出现两次,因而也恰少了一个剩余类 $s$.

又由 $2 \mid n-1$,则

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1}(a_i + a_{i+1}) &\equiv 0+1+\cdots+(n-1)+r-s\\ &= \frac{n(n-1)}{2} + r - s\\ &\equiv r - s \pmod n.\end{aligned}$$

再由 ① 式得

$$\sum_{i=1}^{n-1}(a_i + a_{i+1}) \equiv 0 \pmod{n}.$$

从而 $$r \equiv s \pmod{n}.$$

导致矛盾.

这表明,若 $n$ 为奇数,不可能恰有一对边平行.

2·58　某学校课间休息时,$n$ 个孩子围成一个圆坐下做游戏.

老师按顺时针方向一边走一边按照下面的规则给孩子们分发糖果:

选一个孩子,给他及下一个孩子各一块糖,然后,越过一个孩子,给下一个孩子一块糖,再然后,越过 2 个孩子,给下一个孩子一块糖,接着越过 3 个孩子,等等.

试确定 $n$ 的值,使得所有的孩子都至少得到(可能在老师转过很多圈之后)一块糖.

(第 31 届国际数学奥林匹克候选题,1990 年
亚洲太平洋地区数学竞赛,1991 年)

**[解]**　问题等价于求 $n$,使同余式

$$1 + 2 + 3 + \cdots + x \equiv a \pmod{n} \qquad (x \in N)$$

对一切整数 $a$ 都可解.

上式可化为 $$\frac{x(x+1)}{2} \equiv a \pmod{n},$$

此式等价于

$$(2x+1)^2 \equiv 8a + 1 \pmod{8n}. \qquad ①$$

我们证明:当且仅当 $n$ 为 2 的幂时,同余式方程 ① 恒有解.

首先设 $n$ 不是 2 的幂,则 $n$ 有一个奇素数约数 $p$.

由于$(\pm i)^2 = i^2$,所以以 $p$ 为模的剩余类中,只有$\frac{p+1}{2}$个可以写成平方.

取 $r$ 为 mod$p$ 的非平方剩余(即没有 $y$ 能使$y^2 \equiv r \pmod{p}$),然后,又取 $a$,使

$$8a + 1 \equiv r \pmod{p}.$$

(因为 $p$ 与 8 互素,所以这样的 $a$ 一定存在).

这时，同余式 ① 无解.

现在设 $n = 2^k \quad (k \geqslant 0)$.

令 $A = \{1,3,5,\cdots,2^{k+1}-1\}$.

若 $u,v$ 为 $A$ 中两个不同的数，则

$$u - v = 2^r m.$$

其中 $m$ 为奇数，$1 \leqslant r \leqslant k$，从而

$$u + v = u - v + 2v = 2^r m + 2v = 2(v + 2^{r-1}m).$$

若 $r > 1$，则由 $v$ 是奇数可知

$$2 \mid u + v \quad 且 \quad 2^2 \nmid u + v.$$

因而有

$$2^{r+1} \mid (u+v)(u-v), 且\ 2^{r+2} \nmid (u+v)(u-v).$$

若 $r = 1$，则

$$2 \mid u - v, 且\ 2^2 \nmid u - v,$$

又 $\qquad u + v < 2u \leqslant 2(2^{k+1}-1) < 2^{k+2}$.

无论哪一种情况都有

$$2^{k+3} \nmid u^2 - v^2,$$

从而 $$u^2 \not\equiv v^2 \pmod{2^{k+3}}.$$

所以，$1^2,3^2,5^2,\cdots,(2^{k+1}-1)^2$ 是 mod $8n$ 的 $2^k$ 个不同的剩余类.

对于 $A$ 中的数 $u = 2t+1$，则 $u^2 = 4t(t+1)+1$ 都是 $8a+1$ 型的数，因而，$1^2,3^2,5^2,\cdots,(2^{k+1}-1)^2$ 是 mod $8n$ 中的 $2^k$ 个形如 $8a+1$ 的互不相同的剩余类.

另一方面，如果 $a \equiv b \pmod{2^k}$，那么

$$8a + 1 \equiv 8b + 1 \pmod{8n}.$$

所以，mod $8n$ 的剩余类中恰有 $2^k$ 个形如 $8a+1$ 的剩余类（$a = 0,1,2,\cdots,2^k-1$）.

综合以上，每个形如 $8a+1$ 的剩余类（mod $8n$）均可表成 $t^2$（$t \in A$），即方程 ① 恒有解.

因此，当且仅当 $n$ 为 2 的幂时，方程 ① 恒有解.

即本题的 $n$ 为 2 的幂.

**2·59** 试证对于任何自然数 $n$，和数 $\sum\limits_{k=0}^{n} 2^{3k} C_{2n+1}^{2k+1}$ 不能被 5 整除.

（第 16 届国际数学奥林匹克，1974 年）

[证 1]　记 $x=\sum_{k=0}^{n}2^{3k}C_{2n+1}^{2k+1}$. 则

$$x=\frac{1}{\sqrt{8}}\sum_{k=0}^{n}(\sqrt{8})^{2k+1}C_{2n+1}^{2k+1},$$

$$\sqrt{8}x=\sum_{k=0}^{n}(\sqrt{8})^{2k+1}C_{2n+1}^{2k+1}. \qquad ①$$

又令 $y=\sum_{k=0}^{n}(\sqrt{8})^{2k}C_{2n+1}^{2k}=\sum_{k=0}^{n}2^{3k}C_{2n+1}^{2k}$. ②

① ± ②,并应用二项式定理,得

$$\begin{aligned}&\sqrt{8}x+y\\&=\sum_{k=0}^{n}(\sqrt{8})^{2k+1}C_{2n+1}^{2k+1}+\sum_{k=0}^{n}(\sqrt{8})^{2k}C_{2n+1}^{2k}\\&=(\sqrt{8}+1)^{2n+1}.\end{aligned} \qquad ③$$

$$\begin{aligned}&\sqrt{8}x-y\\&=\sum_{k=0}^{n}(\sqrt{8})^{2k+1}C_{2n+1}^{2k+1}-\sum_{k=0}^{n}(\sqrt{8})^{2k}C_{2n+1}^{2k}\\&=(\sqrt{8}-1)^{2n+1}.\end{aligned} \qquad ④$$

③ · ④ 得

$$8x^2-y^2=(\sqrt{8}+1)^{2n+1}(\sqrt{8}-1)^{2n+1}=7^{2n+1}. \qquad ⑤$$

考虑以 5 为模的余数.

$$8\equiv 3 \pmod 5,$$
$$7\equiv 2 \pmod 5,$$
$$7^2\equiv -1 \pmod 5,$$
$$7^{2n}\equiv (-1)^n \pmod 5,$$
$$7^{2n+1}\equiv (-1)^n\cdot 2 \pmod 5.$$

于是,由 ⑤ 式可得

$$3x^2-y^2\equiv(-1)^n\cdot 2 \pmod 5.$$
$$3x^2\equiv y^2+(-1)^n\cdot 2 \pmod 5. \qquad ⑥$$

又因为若 $5\mid a$,则　$a^2\equiv 0 \pmod 5$.

若 $5\nmid a$,则 $a^2\equiv\pm 1 \pmod 5$.

因而有　$y^2\not\equiv\pm 2 \pmod 5$.

于是由 ⑥ 式得 $3x\not\equiv 0 \pmod 5$.

于是 $$x \not\equiv 0 \pmod 5.$$

即对任何自然数 $n$，和数

$$x = \sum_{k=0}^{n} 2^{3k} C_{2n+1}^{2k+1}$$

不能被 5 整除.

**[证 2]** 设

$$x_m = \sum_k 2^{3k} C_m^{2k+1} \quad (0 < 2k+1 \leqslant m),$$

$$y_m = \sum_k 2^{3k} C_m^{2k} \quad (0 \leqslant 2k \leqslant m).$$

显然，当 $m$ 为大于 1 的奇数时，$x_m$ 即为题中的和数，

由组合数的性质公式 $C_m^{r+1} + C_m^r = C_{m+1}^{r+1}$，可得

$$\begin{cases} x_m + y_m = x_{m+1}, & ① \\ 8x_m + y_m = y_{m+1}. & ② \end{cases}$$

下面用数学归纳法证明：当 $m$ 为奇数时，$x_m$ 不能被 5 整除，当 $m$ 为偶数时，$y_m$ 不能被 5 整除.

因为 $x_1 = 1$，$x_3 = 11$，$y_2 = 9$，所以对一切 $m \leqslant 3$，结论成立.

设对一切 $m \leqslant i$ $(i \geqslant 3,\ i \in N)$ 结论成立，则由①，②式可得

$$\begin{aligned} x_{m+3} &= x_{m+2} + y_{m+2} \\ &= x_{m+1} + y_{m+1} + 8x_{m+1} + y_{m+1} \\ &= 9x_{m+1} + 2y_{m+1} \\ &= 9(x_m + y_m) + 2(8x_m + y_m) \\ &= 5(5x_m + 2y_m) + y_m. \qquad ③ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{m+3} &= 8x_{m+2} + y_{m+2} \\ &= 8x_{m+1} + 8y_{m+1} + 8x_{m+1} + y_{m+1} \\ &= 16x_{m+1} + 9y_{m+1} \\ &= 16(x_m + y_m) + 9(8x_m + y_m) \\ &= 5(17x_m + 5y_m) + 3x_m. \qquad ④ \end{aligned}$$

由归纳假设，$m$ 为偶数时，$y_m$ 不能被 5 整除，于是 $m+3$ 为奇数，由③式 $x_{m+3}$ 不能被 5 整除，$m$ 为奇数时，$x_m$ 不能被 5 整除，于是 $m+$

3 为偶数,由 ④ 式 $y_{m+3}$ 不能被 5 整除.

从而由数学归纳法,结论成立.

因此,对于任何自然数 $n$,和数

$$\sum_{k=0}^{n} 2^{3k} C_{2n+1}^{2k+1}$$

不能被 5 整除.

2·60　设 $\{x_n\}$,$\{y_n\}$ 为如下定义的两个整数列:

$$x_0 = 1,\quad x_1 = 1,\quad x_{n+1} = x_n + 2x_{n-1}\quad (n = 1,2,\cdots),$$

$$y_0 = 1,\quad y_1 = 7,\quad y_{n+1} = 2y_n + 3y_{n-1}\quad (n = 1,2,\cdots).$$

于是这两个数列的前几项为

$$x:\ 1,\ 1,\ 3,\ 5,\ 11,\ 21,\ \cdots$$

$$y:\ 1,\ 7,\ 17,\ 55,\ 161,\ 487,\ \cdots$$

证明除了 1 之外,这两个数列没有公共的项.

(第 2 届美国数学奥林匹克,1973 年)

[证 1]　由 $x_{n+1} = x_n + 2x_{n-1}$,得 $x_{n+1} - 2x_n = -(x_n - 2x_{n-1})$.

于是数列 $\{x_n - 2x_{n-1}\}$ 是以 $x_1 - 2x_0$ 为首项,$-1$ 为公比的等比数列.

又　$$x_1 - 2x_0 = 1 - 2 = -1,$$

所以　$$x_n - 2x_{n-1} = (-1)^n.$$

由此可得出

$$x_n - 2^n = (-1)^n \cdot \frac{1-(-2)^n}{3}.$$

$$x_n = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3}.$$

同法可得　$y_n = 2 \cdot 3^n - (-1)^n$.

假设除 1 之外,数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 还有公共元素,不妨设

$$x_m = y_n \qquad (m > 1, n > 1).$$

则有　$$\frac{2^{m+1} + (-1)^m}{3} = 2 \cdot 3^n - (-1)^n,$$

$$2 \cdot 3^{n+1} - 2^{m+1} = (-1)^m + 3(-1)^n,$$

$$2(3^{n+1} - 2^m) = (-1)^m + 3(-1)^n. \qquad ①$$

由此看出,$m$ 和 $n$ 的奇偶性一定不相同.

否则,若 $m$ 和 $n$ 的奇偶性相同,则 ① 式左边被 4 除余 2,而右边能

被 4 整除.

(1) 若 $m$ 是偶数, $n$ 是奇数.

设 $m=2k,\quad n=2t-1$, 则 ① 式化为

$$2(3^{2t}-2^{2k})=1+3(-1)=-2,$$

$$3^{2t}+1=2^{2k}=4^{k}. \qquad ②$$

由于 $3^{2t}+1=9^{t}+1$ 被 4 除余 2, 而由于 $m>1$, 则 $k\geqslant 1$, 所以 $4^{k}$ 能被 4 整除, 从而 ② 式不可能成立.

(2) 若 $m$ 是奇数, $n$ 是偶数

设 $m=2k+1,\quad n=2t$, 则 ① 式化为

$$2(3^{2t+1}-2^{2k+1})=-1+3\cdot 1=2,$$

$$3^{2t+1}-1=2^{2k+1}. \qquad ③$$

由于 $3^{2t+1}-1=(4-1)^{2t+1}-1$ 被 4 除余 2, 而由 $k\geqslant 1$, $2^{2k+1}$ 能被 4 整除, 从而 ③ 式不可能成立.

综合(1),(2), 没有这样的 $m,n(m>1,n>1)$, 使 $x_m=y_n$ 成立, 即两数列没有 1 之外的公共项.

**[证 2]** 考虑这两个数列中各项被 8 除的余数.

对于所给出的前几项, 它们被 8 除的余数依次是

$$x:\ 1,\ 1,\ 3,\ 5,\ 3,\ 5,\ \cdots$$

$$y:\ 1,\ 7,\ 1,\ 7,\ 1,\ 7,\ \cdots$$

我们用数学归纳法证明: 数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 被 8 除的余数数列是周期数列(对 $\{x_n\}$ 除前两项).

若
$$x_n\equiv 3 \pmod 8,$$
$$x_{n-1}\equiv 5 \pmod 8,$$

则
$$x_n+2x_{n-1}\equiv 3+2\cdot 5\equiv 5 \pmod 8,$$

即
$$x_{n+1}\equiv 5 \pmod 8.$$

若
$$x_n\equiv 5 \pmod 8,$$
$$x_{n-1}\equiv 3 \pmod 8,$$

则
$$x_n+2x_{n-1}\equiv 5+2\cdot 3\equiv 3 \pmod 8,$$

即
$$x_{n+1}\equiv 3 \pmod 8.$$

于是数列 $\{x_n\}$ 被 8 除的余数数列除前两项外是按 3,5,3,5,⋯ 进行周期变化的.

同样, 若 $\quad y_n\equiv 1 \pmod 8,$

$$y_{n-1}\equiv 7 \pmod 8,$$

则 $$y_{n+1}=2y_n+3y_{n-1}=2+3\cdot 7\equiv 7 \pmod 8.$$

若 $$y_n\equiv 7 \pmod 8,$$
$$y_{n-1}\equiv 1 \pmod 8,$$

则 $$y_{n+1}=2y_n+3y_{n-1}=2\cdot 7+3\cdot 1\equiv 1 \pmod 8.$$

于是数列$\{y_n\}$被 8 除的余数数列是按 1,7,1,7,⋯ 进行周期变化的.

由于$\{x_n\}$及$\{y_n\}$除第 1 项 $x_0=y_0=1$ 之外,其余各项中$\{x_n\}$的各项(除第 2 项)被 8 除均余 3 或 5,$\{y_n\}$的各项被 8 除均余 1 或 7,又因为$\{x_n\}$和$\{y_n\}$都是递增数列,所以只有 1 是惟一的公共项.

2·61　设函数 $f$ 对非负整数有定义,且满足条件:

$$f(0)=0,\quad f(1)=1,$$
$$f(n+2)=23f(n+1)+f(n),\quad n=0,1,2,\cdots.$$

试证对任意 $m\in N$,都存在 $d\in N$,使得

$$m\mid f(f(n))\Longleftrightarrow d\mid n.$$

(中国国家集训队选拔试题,1991 年)

[证]　(1) 首先证明对任意 $m\in N$,存在 $n\in N$,使得 $m\mid f(n)$.

不妨设 $m>1$,令 $g(n)$ 是 $f(n)$ 除以 $m$ 所得的余数,于是

$$g(n)\in\{0,1,2,\cdots,m-1\}$$

且 $$g(0)=0,\quad g(1)=1.$$

$$g(n+2)\equiv 23g(n+1)+g(n) \pmod m \quad n=0,1,2,\cdots. ①$$

考虑映射 $T$:

$$(f(n),\quad f(n+1))\xrightarrow{T}(g(n),\quad g(n+1)).$$

由于$(g(n),\ g(n+1))$仅有 $m^2$ 个不同的取值,于是存在 $n$ 与 $n'$ 满足 $1\leqslant n<n'\leqslant m^2+1$,且

$$(g(n),\quad g(n+1))=(g(n'),\quad g(n'+1))$$

即 $$\begin{cases}g(n+1)=g(n'+1),\\ g(n)=g(n').\end{cases}$$

由 ① 推得　$g(n-1)=g(n'-1)$.

递推可得　$g(0)=g(n'-n)$.

由于　$g(0)=0$,所以 $g(n'-n)=0$.

即 $$m \mid f(n'-n),\quad n'-n \in N.$$

(2) 令 $c = \min\{n;\quad n \in N,\quad m \mid f(n)\}$

下面证明 $m \mid f(n) \Longleftrightarrow c \mid n$. ②

当 $m = 1$ 时,显然 $c = 1$,从而 ② 成立;

当 $m > 1$ 时,由于 $f(1) = 1$,所以 $c > 1$.

从而有

$$m \mid f(0) = 0,$$

$$m \mid f(c),\text{但 } m \nmid f(n), n < c. \qquad ③$$

为证明 ②,我们用数学归纳法证明如下的命题:设 $k \in N$,且 $m \mid f(k)$,则

$$f(k+t) \equiv (-1)^{t+1} f(k-t) \pmod m \qquad ④$$

对任意 $t \in N$,且 $t \leqslant k$.

(i) 当 $t = 1$ 时,由于 $f(k) \equiv 0 \pmod m$,

从而由递推公式可知

$$f(k+1) = 23f(k) + f(k-1)$$
$$\equiv f(k-1) \pmod m.$$

即 $t = 1$ 时,④ 成立.

(ii) 设 $1 \leqslant t \leqslant s$ 时,④ 成立,其中 $s \in N$,且 $s < k$.

由递推公式及归纳假设知

$$f(k+s+1)$$
$$= 23f(k+s) + f(k+s-1)$$
$$\equiv (-1)^{s+1} 23 f(k-s) + (-1)^s f(k-(s-1)) \pmod m.$$

又 $$(-1)^{s+1} 23 f(k-s) + (-1)^s f(k-(s-1))$$
$$= (-1)^s [f(k-(s-1)) - 23f(k-s)]$$
$$= (-1)^{s+2} f(k-(s+1)).$$

所以 $f(k+s+1) \equiv (-1)^{s+2} f(k-(s+1)) \pmod m$.

因此,当 $t = s+1$ 时 ④ 成立.

综合 ③、④ 即可得 ②.

以下利用 ② 证明所要的结果.

事实上,对任意 $m \in N$,由 ② 知,存在 $c \in N$,使得

$$m \mid f(n) \Longleftrightarrow c \mid n.$$

对于 $c \mid n$,再由 ② 可知,存在 $d \in N$,使得

$$c \mid f(n) \Longleftrightarrow d \mid n.$$

于是 $\quad m \mid f(f(n)) \Longleftrightarrow c \mid f(n) \Longleftrightarrow d \mid n.$



2·62 已知一个数列 13, 25, 43, … ,它的第 $n$ 项是

$$a_n = 3(n^2 + n) + 7.$$

证明这个数列具有下列性质:

(1) 它的任意连续五项中只有一项能被 5 整除.

(2) 数列的任一项都不是整数的立方.

(波兰数学竞赛,1958 年)

[证] (1) 命题等价于:

在已知数列中,从第二项开始,项数每增加5的项都能被5整除,而其余的任何一项都不能被 5 整除.

由于 $a_2 = 25$ 能被5整除,为此只需证明当且仅当 $n = 5k + 2$($k$ 为非负整数)时,$a_n$ 能被 5 整除.

为此设 $n = 2 + m, m \in \{-1,0,1,2,\cdots\}$,于是

$$\begin{aligned} a_n &= 3(m+2)^2 + 3(m+2) + 7 \\ &= 3m^2 + 15m + 25 \end{aligned}$$

对整数 $m$, $15m + 25$ 能被 5 整除,因此当且仅当 $3m^2$ 能被 5 整除时,$a_n$ 能被 5 整除.

由于 3 和 5 互素,所以当且仅当 $m^2$ 能被 5 整除,即 $m$ 能被 5 整除时,$a_n$ 能被 5 整除.

于是当且仅当 $n = 5k + 2$($k$ 为非负整数)时,$a_n$ 能被 5 整除.

(2) 用反证法.

假设存在一个整数 $t$,使得对某个自然数 $n$,有

$$a_n = 3n^2 + 3n + 7 = t^3.$$

因为 $n(n+1)$ 是偶数,所以 $a_n$ 是奇数,因此 $t$ 是奇数.

设 $t = 2s + 1$(其中 $s$ 是整数),则

$$3n^2 + 3n + 7 = 8s^3 + 12s^2 + 6s + 1,$$

即 $$3n^2 + 3n + 6 = 8s^3 + 12s^2 + 6s.$$

在这个等式两边,除 $8s^3$ 一项之外,其余各项都是 3 的倍数,所以 $8s^3$ 能被 3 整除,又由于 3 和 8 互素,所以 $s$ 是 3 的倍数.

设 $s = 3r$,则有

$$3n^2+3n+6=8\cdot 27r^3+12\cdot 9r^2+6\cdot 3r,$$
$$n^2+n+2=72r^3+36r+6r. \quad ①$$

若 $n=3k$,则 $n^2+n+2$ 不能被 3 整除.

若 $n=3k+1$,则
$$n^2+n+2=9k^2+9k+4,$$
因而不能被 3 整除.

若 $n=3k+2$,则
$$n^2+n+2=9k^2+15k+6+2,$$
因而也不能被 3 整除.

于是,等式 ① 的左边不能被 3 整除,而右边能被 3 整除,即等式 ① 不成立.

因此,数列中的任何一项都不是整数的立方.

2·63　设 $f(0)=f(1)=0$,且
$$f(n+2)=4^{n+2}f(n+1)-16^{n+1}f(n)+n\cdot 2^{n^2}.$$
这里 $n=0,1,2,\cdots$.

试证 $f(1989),f(1990),f(1991)$ 都能被 13 整除.

(第 31 届国际数学奥林匹克预选题,1990 年)

[证]　令 $f(n)=g(n)\cdot 2^{n^2}$,则
$$g(n+2)\cdot 2^{(n+2)^2}=g(n+1)\cdot 2^{(n+1)^2+2n+4}-g(n)\cdot 2^{n^2+4n+4}+n\cdot 2^{n^2},$$
$$g(n+2)\cdot 2^{(n+2)^2}=2g(n+1)\cdot 2^{(n+2)^2}-g(n)\cdot 2^{(n+2)^2}+n\cdot 2^{n^2},$$
$$g(n+2)=2g(n+1)-g(n)+n\cdot 2^{-4n-4},$$
$$g(n+2)=2g(n+1)-g(n)+n\cdot 16^{-n-1}.$$
$$g(n+2)-g(n+1)=g(n+1)-g(n)+n\cdot 16^{-n-1}.$$

取 $n=0,1,2,\cdots,n-1$,然后求和,得
$$g(n+1)-g(n)=16^{-1}\sum_{k=1}^{n-1}k\cdot 16^{-k}.$$

记　$F(n)=\sum_{k=1}^{n-1}k\cdot 16^{-k}$,　则
$$16F(n)=\sum_{k=1}^{n-1}k\cdot 16^{-k+1},$$
$$16F(n)-F(n)$$

$$= [1 + 16^{-1} + 16^{-2} + \cdots + 16^{-(n-2)}] - (n-1) \cdot 16^{-(n-1)},$$

$$15F(n) = \frac{1-(16^{-1})^{n-1}}{1-\frac{1}{16}} - (n-1)16^{-(n-1)}$$

$$= \frac{16}{15}[1 - 16^{-(n-1)}] - (n-1)16^{-(n-1)},$$

$$F(n) = \frac{16}{15^2}[1 - 16^{-(n-1)}] - \frac{1}{15}(n-1)16^{-(n-1)}.$$

所以 $g(n+1) - g(n) = \frac{1}{15^2}[1 - 16^{-(n-1)} - 15(n-1) \cdot 16^{-n}]$

$$= \frac{1}{15^2}[1 - (15n+1)16^{-n}].$$

再取 $n = 0,1,2,\cdots,n-1$,相加得

$$g(n) = \frac{n-1}{15^2} - \frac{1}{15^2}[(15n-14)16^{-(n-1)} + \cdots + 16 \cdot 16^{-1}]$$

$$= \frac{1}{15^3}[15n - 32 + (15n+2)16^{-n+1}].$$

所以 $f(n) = g(n) \cdot 2^{n^2}$

$$= \frac{1}{15^3}[15n + 2 + (15n-32)16^{n-1}]2^{(n-2)^2}$$

$$n = 0,1,2,\cdots.$$

对模 13,有

$$15n + 2 + (15n-32)16^{n-1}$$

$$\equiv 2[n + 1 + (n-3) \cdot 3^{n-1}] \pmod{13},$$

且 $\quad 15^3 f(1990)$

$$\equiv 2[1991 + 1987 \cdot 3^{1989}] \cdot 2^{1988^2} \pmod{13},$$

由 $\quad 1990 \equiv 1 \pmod{13},$

$$3^3 \equiv 1 \pmod{13},$$

则 $\quad 15^3 f(1990)$

$$\equiv 2^{1988^2+1}[2 - 2(3^3)^{663}]$$

$$\equiv 0 \pmod{13},$$

所以 $\quad 13 \mid 15^3 f(1990),$

又因为 $\quad (13, 15^3) = 1,$

所以 $\quad 13 \mid f(1990).$

类似地可以证明

$$13 \mid f(1989), 13 \mid f(1991).$$

2·64　若至少有一个正整数 $m$ 不能表为

$$m = \varepsilon_1 z_1^k + \cdots + \varepsilon_{2k} z_{2k}^k$$

的形式，其中 $z_i$ 为非负整数，$\varepsilon_i = 1$ 或 $-1(1 \leqslant i \leqslant 2k)$，$k$ 为正整数，则称 $k$ 具有性质 $p$. 证明有无穷多个 $k$ 具有性质 $p$.

（第 31 届国际数学奥林匹克候选题，1990 年）

[证]　先证明一个引理

设整数 $n \geqslant 2$，$z$ 为整数，则　$z^{2^n} \equiv 0$ 或 $1 \pmod{2^{n+2}}$.

我们用数学归纳法证明这个引理.

当 $n = 2$ 时，$z^{2^n}$ 对于 mod　16 有下表：

| $z$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z^4$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |

所以 $n = 2$ 时，引理成立.

假设 $2 \leqslant n = k$ 时，引理成立，即

$$Z^{2^k} = q \cdot 2^{k+2} \text{ 或 } z^{2^k} = q \cdot 2^{k+2} + 1, \quad q \in Z.$$

当 $n = k + 1$ 时

$$z^{2^{k+1}} = (q \cdot 2^{k+2})^2 = 2^{k+3}(2^{k+1} q^2),$$

或 $$Z^{2^{k+1}} = (q \cdot 2^{k+2} + 1)^2 = 2^{k+3}(q + q^2 \cdot 2^{k+1}) + 1.$$

即 $$z^{2^{k+1}} \equiv 0 \text{ 或 } 1 \pmod{2^{k+3}}.$$

所以对 $n = k + 1$，引理成立.

于是对一切自然数 $n \geqslant 2$，引理成立.

下面我们证明本题.

事实上，$k = 2^n (n \geqslant 2)$ 具有性质 $p$，

若 $6k = 6 \cdot 2^n$ 能表为题中所述的形式，即

$$6k = \varepsilon_1 z_1^k + \cdots + \varepsilon_{2k} z_{2k}^k,$$

则由引理，对模 $4k(= 2^{n+2})$ 有

$$2k \equiv \varepsilon_1 a_1 + \cdots + \varepsilon_{2k} a_{2k} \pmod{4k},$$

其中 $a_i = 0$ 或 1.

上式只有两种情况可能成立：

(1) 所有 $\varepsilon_i = -1$, $a_i = 1, i = 1,2,\cdots,2k$.

这时 $6k < 0$ 与 $6k > 0$ 矛盾.

(2) 所有 $\varepsilon_i = 1, a_i = 1$,从而

$$6k = z_1^k + \cdots + z_{2k}^k,$$

其中 $z_i$ 均不为 0.

若有某个 $z_i = 2$,则

$$z_i^k = 2^{2^n} \equiv 0 \pmod{2^{n+2}},$$

这可由 $n \geqslant 2$ 时,$2^n \geqslant n + 2$ 得出.

但这时与 $a_i = 1$ 矛盾.

因此必有某个 $z_i \geqslant 3$,(若 $z_i$ 全等于 1,则 $z_1^k + \cdots + z_{2k}^k = 2k$),但在 $k \geqslant 4$ 时,$3^k \geqslant 6k$.因而也导出矛盾.

于是 $k = 2^n$ 具有性质 $p$.

2·65 当整数 $x$ 和 $y$ 不同时为零时,求 $f = |5x^2 + 11xy - 5y^2|$ 的最小值.

(前苏联大学生数学竞赛,1977 年)

[解] 当 $x = 1$, $y = 0$ 时

$$f = |5 \cdot 1^2 + 11 \cdot 1 \cdot 0 - 5 \cdot 0^2| = 5.$$

当 $x, y$ 不同时为偶数时,$f$ 是奇数.

当 $x, y$ 同时为偶数时,$\frac{x}{2}, \frac{y}{2}$ 为整数,此时有

$$f(x, y) > f\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right).$$

若 $\frac{x}{2}$, $\frac{y}{2}$ 仍同时为偶数,可继续上述过程,由此,$f$ 的最小值在 $x$, $y$ 不同时为偶数时得到,此时 $f$ 是奇数,且 $f$ 的最小值只可能等于 1,3,5.

若 $f$ 的最小值等于 1,则有 $x_0, y_0$ 使

$$|5x_0^2 + 11x_0y_0 - 5y_0^2| = 1,$$

$$5x_0^2 + 11x_0y_0 - 5y_0^2 = \pm 1,$$

$$100x_0^2 + 220x_0y_0 - 100y_0^2 = \pm 20,$$

$$(10x_0 + 11y_0)^2 - 221y_0^2 = \pm 20.$$

由于 $221 = 13 \cdot 17, 20 = 13 + 7$,从而存在整数 $t = 10x_0 + 11y_0$,使得

$$13 \mid t^2 \pm 7.$$

鉴于
$$t^2 = (13k)^2 \equiv 0 \pmod{13},$$
$$t^2 = (13k \pm 1)^2 \equiv 1 \pmod{13},$$
$$t^2 = (13k \pm 2)^2 \equiv 4 \pmod{13},$$
$$t^2 = (13k \pm 3)^2 \equiv 9 \pmod{13},$$
$$t^2 \equiv (13k \pm 4)^2 \equiv 3 \pmod{13},$$
$$t^2 \equiv (13k \pm 5)^2 \equiv 12 \pmod{13},$$
$$t^2 \equiv (13k \pm 6)^2 \equiv 10 \pmod{13},$$

此时
$$t^2 \pm 7 \not\equiv 0 \pmod{13}.$$

故 $f$ 的最小值不能等于 1.

若 $f$ 的最小值等于 3,则有 $x_1, y_1$ 使

$$5x_1^2 + 11x_1y_1 - 5y_1^2 = \pm 3,$$

即
$$(10x_1 + 11y_1)^2 - 221y_1^2 = \pm 60.$$

于是存在整数 $r$,使得 $r = 10x_1 + 11y_1$,且

$$13 \mid t^2 \pm 8.$$

由以上可知,这也是不可能的.

因此,$f$ 的最小值等于 5.

2·66　设 $u_1, u_2, u_3, \cdots$ 是一个整数列,适合递推关系

$$u_{n+2} = u_{n+1}^2 - u_n,$$

设 $u_1 = 39,\quad u_2 = 45$. 求证 1986 可整除这个数列的无穷多项.

（第 18 届加拿大数学竞赛,1986 年）

[证]　设 $u_n = 1986q_n + r_n,\quad r_n = 0, 1, 2, \cdots, 1985$.

考察数对 $(r_n, r_{n+1})$.

由于已知数列 $\{u_n\}$ 有无穷多项,因此对应的余数列 $\{r_n\}$ 也有无穷多项.

由于数对 $(r_n, r_{n+1})$ 最多有 $1986^2$ 对,因此必然存在正整数 $m$ 和 $k$,使得数对 $(r_m, r_{m+1})$ 与 $(r_{m+k}, r_{m+k+1})$ 相同.

由已知

$$u_{m+2} = u_{m+1}^2 - u_m,$$

以及 $$(r_m, r_{m+1}) = (r_{m+k}, r_{m+k+1}),$$
可得 $$(r_{m+2}, r_{m+3}) = (r_{m+k+2}, r_{m+k+3}).$$

又由于

$$u_{m-1} = u_m^2 - u_{m+1},$$

可得 $$(r_{m-1}, r_m) = (r_{m+k-1}, r_{m+k}).$$

由以上可知,数列$\{r_n\}$是以 $k$ 为周期的周期数列.

由 $u_1 = 39$, $u_2 = 45$ 得

$$u_3 = 45^2 - 39 = 1986 \equiv 0 \pmod{1986}.$$

于是 $r_3 = 0$.

所以 $u_3$, $u_{3+k}$, $u_{3+2k}$,… 对应的余数列

$$r_3, \quad r_{3+k}, \quad r_{3+2k}, \quad \cdots$$

都等于0.

于是有无数个余数 $r_n = 0$.

因此有无数多个 $u_n$ 是1986的倍数.

2·67 已知 $v_0 = 0, v_1 = 1, v_{n+1} = 8v_n - v_{n-1}$. $n = 1,2,\cdots$.

求证在数列$\{v_n\}$中没有形如 $3^\alpha \cdot 5^\beta$($\alpha,\beta$ 为正整数)的项.

(中国国家集训队选拔考试,1989年)

[证] 直接计算$\{v_n\}$的前几项:

$$v_0 = 0, \quad v_1 = 1, \quad v_2 = 8, \quad v_3 = 63,$$
$$v_4 = 496, \quad v_5 = 3905, \quad v_6 = 30744, \cdots$$

从中可以发现 $v_3 = 63$, $v_6 = 30744$ 都是3和7的倍数,且其余的项 $v_1, v_2, v_4, v_5$ 都不是3或7的倍数.

我们猜测:

$$3 \mid v_n \Longleftrightarrow 7 \mid v_n. \qquad ①$$

下面证明这个猜测.

先考虑模3.

数列$\{v_n\}$被3除的余数($n = 0,1,2,\cdots$)前几项为

$$0,1,-1,0,1,-1,\cdots$$

于是有

$$v_3 \equiv v_0 \pmod 3,$$
$$v_4 \equiv v_1 \pmod 3.$$

假设有 $$v_{k+3} \equiv v_k \pmod 3 \quad (k \leqslant n).$$

则由 $$v_{n+1} = 8v_n - v_{n-1},$$

可得

$$\begin{aligned} v_{k+4} &= 8v_{k+3} - v_{k+2} \\ &\equiv 8v_k - v_{k-1} \\ &= v_{k+1} \pmod 3. \end{aligned}$$

因此由数学归纳法证明了

$$v_{n+3} \equiv v_n \pmod 3, \quad n = 0,1,2,\cdots.$$

即$\{v_n\}$以 3 为模的余数列为以 3 为周期的周期数列,且由它的前三项为 0,1, −1(从 $v_0$ 开始),所以有

$$3 \mid v_n \Longleftrightarrow 3 \mid n. \qquad ②$$

再考虑模 7.

$\{v_n\}$被 7 除的余数列的前几项为

$$v_0 \equiv 0, \quad v_1 \equiv 1, \quad v_2 \equiv 1, \quad v_4 \equiv 0,$$
$$v_5 \equiv -1, \ v_6 \equiv -1, \ v_7 \equiv 0, \quad v_8 \equiv 1 \pmod 7.$$

仿上可以用数学归纳法证明,$\{v_n\}$以 7 为模的余数列是以 6 为周期的周期数列,且有

$$7 \mid v_n \Longleftrightarrow 3 \mid n, \qquad ③$$

由 ②,③ 可得 ①.

由 ① 可知,数列$\{v_n\}$没有形如 $3^\alpha \cdot 5^\beta$ 的项,其中 $\alpha,\beta$ 为正整数.

2·68 由 0 和 1 所构成的任意一个有限序列都称为一个单词.将单词 $A$ 重复三遍所得到的 $AAA$ 称为 $A$ 的三倍化.例如,如果 $A$ = 101,那么 $A$ 的三倍化就是 101101101.对于单词,可以进行如下两种手术:

(1) 可在它的任何一个位置上(包括词首和词尾)添加任何一个词的三倍化;

(2) 可从中任意划去一个词的三倍化.

例如,可由单词 0001 得到 0111001,也可得到 1,等等.

试问:能否通过若干次上述手术,由单词 10 得到单词 01?

(列宁格勒数学奥林匹克,1988 年)

**[解]** 对于每个单词

$$A = a_1a_2\cdots a_n,\quad a_i \in \{0,1\},\quad i = 1,2,\cdots,n.$$

我们令其对应一个数

$$f(A) = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n.$$

于是,若单词 $B$ 是由单词 $A$ 通过题目所述手术之一得到的,则有

$$f(B) \equiv f(A) \pmod 3.$$

由于

$$f(01) = 1\cdot 0 + 2\cdot 1 = 2,$$

$$f(10) = 1\cdot 1 + 2\cdot 0 = 1,$$

则

$$f(01) = 2 \not\equiv 1 = f(10) \pmod 3.$$

因此,不能通过所述手术,由单词 10 得到单词 01.

**2·69** 设 $a,b$ 是给定的正整数.现有一机器人沿着一个有 $n$ 级的楼梯上下升降.机器人每上升一次恰好上升 $a$ 级楼梯;每下降一次,恰好下降 $b$ 级楼梯,为使机器人经若干次升降之后,可以从地面达到楼梯顶,然后再返回地面.问 $n$ 的最小值是多少?证明你的结论.

(第 31 届国际数学奥林匹克预选题,1990 年)

**[解]** 为了方便,我们称地面为楼梯的第 0 级,从下往上数的第 $r$ 级位置,称为楼梯的第 $r$ 级.

先设 $a \geqslant b$.

(1) 若 $b \mid a$,设 $a = sb.\quad s \in N.$

取 $n = a$,则机器人(以后简称机器人为 $G$) 上升一次从地面到楼顶,再下降 $s$ 次,返回地面.

显然,若 $n < a$, $G$ 无法上升,所以这时 $n$ 的最小值为 $a$.

(2) 若 $b \nmid a$,且 $(a,b) = 1$.

为使 $n$ 的值尽可能地小,$G$ 上升一次就应下降.

设所能达到的最低位置是楼梯的第 $r_1$ 级,显然,$r_1$ 是 $a$ 被 $b$ 除的余数,即

$$a = bs_1 + r_1,\quad 1 \leqslant r_1 \leqslant b - 1. \qquad ①$$

因为 $r_1 < b$,所以 $G$ 处于第 $r_1$ 级的位置后,已经不能再下降,而只能上升,并到达第 $a + r_1$ 级的位置,为使这种上升成为可能,必须有

$$n \geqslant a + r_1,$$

若

$$a + r_1 = bs_2 + r_2,\quad 0 \leqslant r_2 \leqslant b - 1. \qquad ②$$

则 $G$ 下降后的最低位置是楼梯的第 $r_2$ 级.

$G$ 继续升降.

一般地，对已给的 $r_i$（第 $i$ 次升降后，$G$ 的最低位置），有整数 $r_{i+1}$，$s_{i+1}$，使得

$$a+r_i=bs_{i+1}+r_{i+1},\quad 0\leqslant r_{i+1}\leqslant b-1. \qquad ③$$

显然，要使上述升降成为可能，必须满足

$$n\geqslant a+r_i,\quad i=1,2,\cdots,\quad 0\leqslant r_i\leqslant b-1.$$

由 ① 知，

$$a\equiv r_1 \pmod b,$$

由 ② 知，

$$r_2\equiv 2r_1 \pmod b,$$

再由 ③，可以依次证明

$$r_i\equiv ir_1 \pmod b,\quad i=1,2,\cdots.$$

由于 $(r_1,\ b)=(a,\ b)=1$，

所以当 $i$ 通过 $1,2,\cdots,b$ 时，$r_i$ 将通过 mod $b$ 的完全剩余系.

注意到，$0\leqslant r_i\leqslant b-1$，

因而 $r_1,r_2,\cdots,r_b$ 仅仅是 $0,1,2,\cdots,b-1$ 的一个排列.

特别地，由

$$r_b\equiv br_1 \pmod b,$$

可得

$$r_b=0.$$

此外，存在惟一的整数 $j$，$j<b$，使得

$$r_j=b-1.$$

于是

$$n\geqslant a+b-1.$$

若 $n=a+b-1$，由 $r_i$ 的意义可知，$G$ 在升降过程中，可逐次达到第 $r_1,r_2,\cdots,r_b$ 级的位置.

当 G 到达 $r_j$ 时，由

$$a+r_j=a+b-1=n.$$

由此可知，$G$ 到达楼顶，此时 $G$ 继续升降，又可以到达 $r_b$ 级的位置，而 $r_b=0$，所以 $G$ 返回地面.

由此可知，$n$ 的最小值为 $a+b-1$.

(3) 若 $b\nmid a$，且 $(a,b)=d>1$，设 $a=a_1d$，$b=b_1d$，则 $(a_1,b_1)=1$.

对 $a_1,b_1$ 作(2)的讨论，再把结果扩大 $d$ 倍，则

$$n = d(a_1 + b_1 - 1) = a + b - d.$$

由 $a, b$ 的对称性，$b > a$ 时结论仍成立.

由(1),(2),(3)， $n$ 的最小值为 $a + b - (a,\ b)$.

2·70　设 $f(x) = x^8 + 4x^6 + 2x^4 + 28x^2 + 1$， $p > 3$ 为素数，并设存在整数 $z$，使得 $p$ 整除 $f(z)$.

证明存在整数 $z_1, z_2, \cdots, z_8$，使得对于

$$g(x) = (x - z_1)(x - z_2)\cdots(x - z_8),$$

多项式 $f(x) - g(x)$ 的所有系数均可被 $p$ 整除.

（第 33 届国际数学奥林匹克预选题，1992 年）

［证］　首先注意到

$$f(x) = (x^4 + 2x^2 - 1)^2 + 32x^2.$$

由于　$p \mid f(z) = (z^4 + 2z^2 - 1)^2 + 32z^2$，

故知存在整数 $t$，使得

$$t^2 \equiv -2 \pmod{p}. \qquad ①$$

于是可以写作

$$z^4 + 2z^2 - 1 \equiv 4zt \pmod{p}. \qquad ②$$

这是因为由 ① 有

$$(z^4 + 2z^2 - 1)^2 + 32z^2 \equiv 16z^2t^2 + 32z^2 \equiv 0 \pmod{p}.$$

对 ②，必要时可用 $-t$ 代换 $t$，从而

$$\begin{aligned}
&(z^2 + 1 + t)^2 \\
&= z^4 + 2z^2 + 1 + t^2 + 2t(z^2 + 1) \\
&\equiv 2 + 4zt + t^2 + 2t(z^2 + 1) && (\text{由 ②}) \\
&\equiv 2t(z + 1)^2 \pmod{p}. && (\text{由 ①})
\end{aligned}$$

如果 $z \equiv -1 \pmod{p}$，则

$$(1 + 1 + t)^2 \equiv 2t(z + 1)^2 \equiv 0 \pmod{p}.$$

即　$t \equiv -2 \pmod{p}$.

再由 ① 有

$$-2 \equiv 4 \pmod{p}.$$

这意味着素数 $p \leqslant 3$，与已知条件相矛盾，所以 $z \not\equiv -1 \pmod{p}$.

因此，存在整数 $s$，使得

$$4s^2 \equiv 2t \pmod{p}.$$

$$16s^4 \equiv 4t^2 \pmod{p}.$$

$$4s^4 \equiv -2 \qquad (\bmod p).$$

从而 $r = ts$ 满足

$$r^4 \equiv -2 \qquad (\bmod p).$$

于是我们可写作

$$z^2 + 1 + t \equiv 2s(z+1) \qquad (\bmod p),$$

从而 $$(z-s)^2 \equiv -(s-1)^2 \qquad (\bmod p).$$

由于 $$s \not\equiv 1 \qquad (\bmod p),$$

故知存在整数 $m$,使得

$$m^2 \equiv -1 \qquad (\bmod p).$$

注意到

$$\begin{aligned}&[(x-m)^4 + r^4][(x+m)^4 + r^4]\\ \equiv\ &(x^2+1)^4 + r^4[(x-m)^4 + (x+m)^4] + r^8\\ \equiv\ &(x^2+1)^4 - 2[2x^4 - 12x^2 + 2] + 4\\ \equiv\ &f(x) \qquad (\bmod p).\end{aligned}$$

故知

$$f(x) \equiv [(x-m)^4 - 2][(x+m)^4 - 2] \qquad (\bmod p).$$

由于 $mt \not\equiv 0 \ (\bmod p)$,所以存在整数 $u$,使得

$$mtu \equiv m + 1 \qquad (\bmod p),$$

因此 $$u^2 \equiv m \qquad (\bmod p),$$

$$u^4 \equiv -1 \qquad (\bmod p).$$

故知 $v = ur$ 满足

$$v^4 \equiv 2 \qquad (\bmod p).$$

令 $z_1 = m + v$, $z_2 = m + mv$, $z_3 = m - v$, $z_4 = m - mv$, $z_5 = -m + v$, $z_6 = -m + mv$, $z_7 = -m - v$, $z_8 = -m - mv$

就有

$$\begin{aligned}&(x-z_1)(x-z_2)(x-z_3)(x-z_4)\\ \equiv\ &(x-m)^4 - 2 \quad (\bmod p),\\ &(x-z_5)(x-z_6)(x-z_7)(x-z_8)\\ \equiv\ &(x+m)^4 - 2 \quad (\bmod p).\end{aligned}$$

从而得到要证的结论.

2·71 设 $n$ 为不小于 2 的 整数,$a_1, a_2, a_3, a_4$ 为满足下列两个条

件的正整数：

(1) $(n,\ a_i)=1,\quad i=1,2,3,4$；

(2) 对于 $k=1,2,\cdots,n-1$，都有

$$(ka_1)_n+(ka_2)_n+(ka_3)_n+(ka_4)_n=2n.$$

证明这时 $(a_1)_n,(a_2)_n,(a_3)_n,(a_4)_n$ 可分成和为 $n$ 的两组. 其中 $(a)_n$ 表示正整数 $a$ 除以 $n$ 所得的余数.

（日本数学奥林匹克，1992 年）

[证] 由于 $(n,\ a_1)=1$，所以存在 $k$，使得 $(ka_1)_n=1$ 不失一般性，设

$$1=a_1\leqslant a_2\leqslant a_3\leqslant a_4\leqslant n-1. \qquad ①$$

由题设可知

$$1+a_2+a_3+a_4=2n, \qquad ②$$

$$2+(2a_2)_n+(2a_3)_n+(2a_4)_n=2n. \qquad ③$$

首先我们证明 $a_2<\frac{1}{2}n,\quad a_3>\frac{1}{2}n$.

否则，若 $a_2\geqslant\frac{1}{2}n$，则由 ③

$$2+2a_2-n+2a_3-n+2a_4-n=2n,$$

$$2(1+a_2+a_3+a_4)=5n.$$

与 ② 式矛盾.

若 $a_3\leqslant\frac{1}{2}n$，则由 ③

$$2+2a_2+2a_3+2a_4=2n,$$

或

$$2+2a_2+2a_3+2a_4-n=2n,$$

即

$$1+a_2+a_3+a_4=n,$$

或

$$1+a_2+a_3+a_4=\frac{3}{2}n.$$

均与 ② 式矛盾.

从而有 $1=a_1\leqslant a_2<\frac{1}{2}n<a_3\leqslant a_4\leqslant n-1$.

又由题设，对于 $k=1,2,\cdots,n-1$，有

$$\begin{aligned}&k+(ka_2)_n+(ka_3)_n+(ka_4)_n\\=&(k+1)+((k+1)a_2)_n+((k+1)a_3)_n+((k+1)a_4)_n\end{aligned}$$

$= 2n.$

注意到 $(k+1)a_i - ka_i = a_i \leqslant n-1, \qquad i = 2,3,4.$

$$\sum_{i=1}^{4}[(k+1)a_i - ka_i]$$
$$= \sum_{i=1}^{4} a_i = 2n.$$

从而可得 $a_4 = n - 1.$

于是 $a_1 + a_4 = a_2 + a_3 = n.$

2·72 设 $a, a_0, a_1, \cdots, a_n$ 是任意整数，试问：整数 $\sum_{k=0}^{n}(a^2+1)^{3k}a_k$ 被 $a^2+a+1$（或被 $a^2-a+1$）整除的必要且充分条件是整数 $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$ 被 $a^2+a+1$（或被 $a^2-a+1$）整除. 对否?

（美国纽约数学奥林匹克，1976 年）

［证］ 设 $b = a^2 + a + 1$，则

$$(a^2+1)^3 = (b-a)^3 \equiv -a^3 \pmod b, \qquad ①$$
$$-a^3 = -ab + a^2 + a$$
$$= -ab + b - 1$$
$$\equiv -1 \pmod b. \qquad ②$$

于是由 ①，② 可得

$$(a^2+1)^3 \equiv -1 \pmod b,$$

因此有

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(a^2+1)^{3k}$$
$$\equiv \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k \pmod b.$$

于是 $\sum_{k=0}^{n} a_k(a^2+1)^{3k}$ 能被 $b = a^2 + a + 1$ 整除的充分必要条件是 $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$ 能被 $a^2 + a + 1$ 整除.

若设 $c = a^2 - a + 1$，同样也可证明结论正确.

2·73 两个罐子中共有 $2p+1$ 个球，每一秒钟都将放有偶数个球

的罐子里的一半球投入另一个罐子. 设 $k$ 为小于 $2p+1$ 的自然数,并设 $p$ 和 $2p+1$ 都是素数. 证明或迟或早在其中一个罐子中恰有 $k$ 个球.

(圣彼得堡市数学选拔考试,1993 年)

**[证]** 按 mod $2p+1$ 的余数进行运算.

设第一罐中有 $x$ 个球,第二罐中有 $y$ 个球.

则 $x\equiv -y \pmod{2p+1}$,

于是每一秒钟,数对 $(x,y)$ 都变为数对 $\left(\frac{x}{2},\frac{y}{2}\right)$.

设 $m$ 是使得 $2^m\equiv 1 \pmod{2p+1}$ 的最小正整数.

故可将余数 $1,2,\cdots,2p$ 按如下方式每 $m$ 个分为一组:

$$\left\{x,\frac{x}{2},\frac{x}{4},\cdots,\frac{x}{2^{m-1}}\right\},\frac{x}{2^m}=x.$$

这表明 $2p$ 可被 $m$ 整除,亦即 $m\in\{1,2,p,2p\}$.

当 $m=1,2$ 时,情况显然.

当 $m=2p$ 时,则数 $x$ 与 $k$ 同在一组. 这表明只要经过若干秒钟,在第一个罐中就刚好会有 $k$ 个球.

当 $m=p$ 时,我们证明余数 $-1\equiv 2p$ 与 1 不在同一组.

事实上,如果对于某个自然数 $r$,有 $2^r\equiv -1 \pmod{2p+1}$,则 $2^{2r}\equiv 1 \pmod{2p+1}$. 此时 $2r$ 可被 $m=p$ 整除,即 $r$ 可被 $p$ 整除,

于是 $2^r\equiv 2^p\equiv 1 \pmod{2p+1}$ 与 $2^r\equiv -1 \pmod{2p+1}$ 矛盾.

由此可知,余数 $k$ 与 $(-k)$ 被分在不同组,因此,余数 $x$ 必与它们中的一个同在一组.

**2·74** 设 $m$ 是给定的整数. 求证存在整数 $a,b$ 和 $k$,其中 $a,b$ 均不能被 2 整除,$k\geqslant 0$,使得 $2m=a^{19}+b^{99}+k\cdot 2^{1999}$.

(第 14 届中国中学生数学冬令营,1999 年)

**[证]** (1)设 $r$ 和 $s$ 是正整数,其中 $r$ 是奇数. $x$ 和 $y$ 是 mod $2^r$ 互不同余的奇数. 由于

$$x^s-y^s=(x-y)(x^{s-1}+x^{s-2}y+\cdots+y^{s-1}).$$

并且 $x^{s-1}+x^{s-2}y+\cdots+y^{s-1}$ 是奇数,

则 $x^s$ 和 $y^s$ 也是使 mod $2^r$ 互不同余的奇数.

因此，当 $t$ 取遍 $\bmod 2^r$ 的缩剩余系，则 $t^s$ 也取遍 $\bmod 2^r$ 的缩剩余系.

(2)由(1)的讨论，对于奇数 $2m-1$，必有奇数 $a$ 使得

$$2m-1=a^{19}+q\cdot 2^{1999}.$$

于是，对于 $b=1$，有 $2m=a^{19}+b^{99}+q\cdot 2^{1999}$.

如果 $q\geqslant 0$，那么题目已经得证.

如果 $q<0$，那么分别以

$\overline{a}=a-h\cdot 2^{1999}$,

$$\overline{q}=\frac{a^{19}-(a-h\cdot 2^{1999})^{19}}{2^{1999}}+q=\frac{(h\cdot 2^{1999})^{19}+a^{19}}{2^{1999}}+q$$

代替 $a$ 和 $q$，仍有 $2m=\overline{a}^{19}+b^{99}+\overline{q}\cdot 2^{1999}$.

取足够大的 $h$，可以使 $\overline{q}\geqslant 0$. 于是本题得证.

**2·75** 一个正整数无穷等差数列，含一项是整数的平方，另一项是整数的立方. 证明此数列含一项是整数的六次幂.

（第 38 届国际数学奥林匹克预选题，1997 年）

**[证]** 设正整数无穷等差数列 $\{a+sh\}$，$s=0,1,2,\cdots$ 含 $x^2$ 项和 $y^3$ 项，其中 $x,y$ 是整数.

对公差 $h$ 施行数学归纳法.

$h=1$ 时，数列 $a,a+1,a+2,\cdots$ 一定含整数的六次幂项.

假设对所有小于 $h(h>1)$ 的公差，满足题设条件的等差数列一定含一项是整数的六次幂.

现在考察公差为 $h$ 时的情形. 令 $d=(a,h)$，$h=de$.

对 $(d,e)$ 分两种情况讨论.

(1)当 $(d,e)=1$ 时.

由 $\qquad a+sh=x^2,\quad a+sh=y^3$

及 $h=de$，$(d,e)=1$ 可知

$$x^2\equiv a\equiv y^3 \pmod h,$$
$$x^2\equiv a\equiv y^3 \pmod e.$$

由 $(d,e)=1$，则 $(a,e)=1$. 故 $e$ 与 $x,y$ 都互素. 所以有整数 $t$，使 $ty\equiv x \pmod e$. 则 $(ty)^6\equiv x^6 \pmod e$.

即 $\qquad t^6a^2\equiv a^3 \pmod e$，$t^6\equiv a \pmod e$.

由 $(d,e)=1$，则存在某个整数 $k$，有

$(t+ke)\equiv 0 \pmod d \quad (t+ke)^6\equiv 0\equiv a \pmod d$

由 $t^6\equiv a \pmod e$，则 $(t+ke)^6\equiv a \pmod e$.



又$(d,e)=1,h=de$，由以上两个同余式，有

$$(t+ke)^6\equiv a \pmod h.$$

显然，$k$ 可取任意大整数. 故上式说明已知数列中含一个整数的六次幂.

(2)当$(d,e)>1$时. 令素数 $p, p\mid d, p\mid e, p^{\alpha}\parallel a, p^{\beta}\parallel h$.

因为 $h=de,(e,a)=1$，有 $\beta>\alpha\geqslant 1$. 因而对已知数列中的每一项，能整除它的最高次幂是 $p^{\alpha}$.

因为 $x^2,y^3$ 是数列的两项，则 $2\mid\alpha,3\mid\alpha$，故 $\alpha=6r$，因此 $\alpha\geqslant 6$. 则整数数列

$$p^{-6}(a+sh),s=0,1,2,\cdots$$

的公差$\frac{h}{p^6}<h$，且含有$\left(\frac{x}{p^3}\right)^2,\left(\frac{y}{p^3}\right)^3$，由归纳假设，它含有 $z^6(z\in N)$，所以$(pz)^6$是原数列的一项.

2·76　一个整数有限序列 $a_0,a_1,\dots,a_n$ 称为一个二次序列，是指对每个 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$，均成立等式　$|a_i-a_{i-1}|=i^2$.

(1)证明对任何两个整数 $b$ 和$c$，都存在一个自然数 $n$ 和一个二次序列满足$a_0=b,a_n=c$.

(2)求满足下述条件的最小自然数 $n$：存在一个二次序列，且在该序列中 $a_0=0,a_n=1996$.

（第 37 届国际数学奥林匹克预选题，1996 年）

[解]　(1)由于 $a_i-a_{i-1}=\pm i^2,i\in\{1,2,\cdots,n\}$，

而　$c-b=a_n-a_0=\sum_{i=1}^{n}(a_i-a_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}(\pm i^2)$.

设 $d=c-b$，只需证明，对任何整数 $d$，存在自然数 $n$，使得可以在

$$\square\ 1^2\ \square\ 2^2\ \square\ \cdots\ \square\ n^2 \qquad ①$$

的"□"适当填上"+"或"-"，使其运算结果等于 $d$. 由于对任何自然数 $k$，有

$$k^2-(k+1)^2-(k+2)^2+(k+3)^2=4,$$
$$-k^2+(k+1)^2+(k+2)^2+(k+3)^2=-4.$$

所以对于①中任意连续的 4 项，可适当填上"+"号或"-"号，使其

运算结果等于 4 或者 $-4$.

于是,对 $d$ 以 4 为模进行讨论.

(i)$d\equiv 0 \pmod 4$.

此时取 $n=4\cdot\frac{|d|}{4}$,显然满足要求.

由于 $n$ 是自然数,所以当 $d=0$ 时,可取 $n=8$,使前 4 项之和为 4,后 4 项之和为 $-4$.

(ii)$d\equiv 1 \pmod 4$.

取 $n=1+|d-1|$,在 $1^2$ 的前面填"+",而使后面的 $4\cdot\frac{|d-1|}{4}$ 项的和为 $d-1$,这时 $n$ 项和为 $d$.

(iii)$d\equiv 2 \pmod 4$.

取 $n=3+|d-14|$,使前三项为"$+1^2+2^2+3^2$"(等于 14),后面的 $4\cdot\frac{|d-14|}{4}$ 项的和为 $d-14$,这时 $n$ 项和为 $d$.

(iv)$d\equiv 3 \pmod 4$.

取 $n=1+|d+1|$,在 $1^2$ 前取"$-$",而使后面的 $4\cdot\frac{|d+1|}{4}$ 项的和为 $d+1$,这时 $n$ 项和为 $d$.

综上,对任意整数 $c-b=d$,总可找到 $n$,满足题目要求.

(2)首先若 $n\leqslant 17$,则

$$\begin{aligned}a_n&=\sum_{i=1}^{n}(a_i-a_{i-1})+a_0\\&\leqslant\sum_{i=1}^{n}|a_i-a_{i-1}|+a_0\\&=\sum_{i=1}^{n}|a_i-a_{i-1}|=\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\&\leqslant\frac{17\times18\times35}{6}=1785<1996.\end{aligned}$$

这不可能.

再者若 $n=18$,则

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{18\times19\times37}{6}\\&=3\times19\times37\neq1996.\end{aligned}$$

于是 $n\geqslant 19$. 由于 $(1^2+2^2+\cdots+19^2)-2(1^2+2^2+6^2+14^2)=1996$.

这样,只要对 $i=1,2,6,14$ 取 $a_i-a_{i-1}=-i^2$,对其余的 $1\leqslant i\leqslant 19$,取 $a_i-a_{i-1}=i^2$.则 $a_0=0$ 时,$a_{19}=1996$.

因此,满足条件的最小自然数为 $n=19$.

2·77 设 $A=\{1,2,3,\cdots,17\}$.对于一一映射 $f:A\to A$,记 $f^{[1]}(x)=f(x)$,$f^{[k+1]}(n)=f(f^{[k]}(x))$,$k\in N$.

又 $f$ 满足条件:存在自然数 $M$,使得:

(1)当 $m<M$,$1\leqslant i\leqslant 16$ 时,有

$$f^{[m]}(i+1)-f^{[m]}(i)\not\equiv\pm1 \pmod{17},$$
$$f^{[m]}(1)-f^{[m]}(17)\not\equiv\pm1 \pmod{17}.$$

(2)当 $1\leqslant i\leqslant 16$ 时,

$$f^{[M]}(i+1)-f^{[M]}(i)\equiv 1 \text{ 或 } -1 \pmod{17},$$
$$f^{[M]}(1)-f^{[M]}(17)\equiv 1 \text{ 或 } -1 \pmod{17}.$$

试对满足上述条件的一切 $f$,求所对应的 $M$ 的最大可能值,并证明你的结论.

(第 12 届中国中学生数学冬令营,1997 年).

**[解]** 所求的 $M_0=8$,先证 $M_0\geqslant 8$.

事实上,可令映射 $f(i)\equiv 3i-2 \pmod{17}$

其中 $i\in A$,$f(i)\in A$.

若 $$f(i)\equiv f(j) \pmod{17},$$

则 $3i-2\equiv 3j-2 \pmod{17}$,即 $i\equiv j \pmod{17}$.

所以 $$i=j.$$

因此,映射 $f$ 是从 $A$ 到 $A$ 的一一映射.

又由映射 $f$ 的定义,易知

$$f^{[n]}(i)\equiv 3^n\cdot i-3^n+1 \pmod{17}.$$

若 $\begin{cases} f^{[M]}(i+1)-f^{[M]}(i)\equiv 1 \text{ 或 } -1 \pmod{17},\\ f^{[M]}(1)-f^{[M]}(17)\equiv 1 \text{ 或 } -1 \pmod{17}.\end{cases}$

$\begin{cases} [3^M(i+1)-3^M+1]-[3^M\cdot i-3^M+1]\equiv 1 \text{ 或 } -1 \pmod{17},\\ 1-[3^M\times 17-3^M+1]=1 \text{ 或 } -1 \pmod{17}\end{cases}$

即 $$3^M\equiv 1 \text{ 或 } -1 \pmod{17}.$$

但 $3^1\equiv 3$,$3^2\equiv 9$,$3^3\equiv 10$,$3^4\equiv 13$,$3^5\equiv 5$,$3^6\equiv 15$,$3^7\equiv 11$,$3^8\equiv -1 \pmod{17}$,

故 $M_0\geqslant 8$.

下面再证 $M_0\leqslant 8$.

任作一个凸 17 边形 $A_1A_2\cdots A_{17}$,记作 $G$.

我们规定:当 $i=17$ 时,取 $i+1=1$. 当 $i=1$ 时,取 $i-1=17$.

然后按如下规则连线段:若 $1\leqslant m<M_0$,当 $f^{[m]}(i)=a$,$f^{[m]}(i+1)=b$ 时,就连线段 $A_aA_b$.

显然,所连线段必为 $G$ 的对角线. 下面证明,所连的对角线没有重复.

若有两条对角线连线相同,即存在 $i,j$ 及 $M_0>p>q>0$,使

$$f^{[p]}(i)=f^{[q]}(j).$$

$$f^{[p]}(i+1)=f^{[q]}(j-1). \text{或 } f^{[p]}(i+1)=f^{[q]}(j+1).$$

于是,有 $f^{[p-q]}(i)=j$,

$$f^{[p-q]}(i+1)=j+1 \text{ 或 } f^{[p-q]}(i+1)=j-1.$$

且 $M_0>p-q>0$. 这与 $M_0$ 的定义矛盾.

故所连对角线没有重复,

但 $G$ 共有 $17\times 7$ 条对角线.

所以 $17\times(M_0-1)\leqslant 17\times 7$,即 $M_0\leqslant 8$.

故 $M_0=8$.

2·78 设 $n,p,q$ 都是正整数,且 $n>p+q$. 若 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 是满足下面条件的整数:

(1) $x_0=x_n=0$;

(2)对每个整数 $i(1\leqslant i\leqslant n)$,

或 $x_i-x_{i-1}=p$ 或 $x_i-x_{i-1}=-q$.

证明存在一对标号 $(i,j)$,使 $i<j$,$(i,j)\neq(0,n)$,且 $x_i=x_j$.

(第 37 届国际数学奥林匹克,1996 年)

[证] 首先,不妨设 $(p,q)=1$.

这是因为,若 $(p,q)=d>1$ 时,记 $p=dp_1$,$q=dq_1$,$(p_1,q_1)=1$,只要考虑 $\frac{x_0}{d},\frac{x_1}{d},\cdots,\frac{x_n}{d}$ 而相邻两项之差等于 $p_1$ 或 $-q$,且 $n>p_1+q_1$,一切条件都能满足.

由于 $x_i-x_{i-1}=p$ 或 $-q$ $(i=1,2,\cdots,n)$.

如果这 $n$ 个差 $x_i-x_{i-1}$ 中有 $a$ 个 $p$,$b$ 个 $-q$,则有 $x_n=ap-bq$,$a+b=n$.

从而，由 $x_n=0$，有 $ap=bq$.

由$(p,q)=1$，$a=kq$，$b=kp$.

则 $$n=a+b=k(p+q).$$



又 $n>p+q$，所以 $k\geqslant 2$.

记 $y_i=x_{i+p+q}-x_i$，$i=0,1,\cdots,(k-1)(p+q)$.

因为 $x_i-x_{i-1}=p$ 或 $-q\equiv p \pmod{p+q}$，

对 $i=0,1,\cdots$到某个 $i$ 相加，有 $x_i=ip \pmod{p+q}$，

于是有 $$x_j-x_i\equiv(j-i)p \pmod{p+q}.$$

由 $y_i$ 的定义 $y_i=x_{i+p+q}-x_i\equiv p+q\equiv 0 \pmod{p+q}$.

即每个 $y_i$ 都是 $p+q$ 的倍数.

又由于 $y_{i+1}-y_i=(x_{i+1+p+q}-x_{i+p+q})-(x_{i+1}-x_i)$

而括号中的数只能是 $p$ 或 $-q$，

所以 $y_{i+1}-y_i$ 只能等于 $p+q,0,-(p+q)$中的某一个.

由于 $y_0=x_{p+q}-x_0=n_{p+q}$，

$$y_{p+q}=x_{2(p+q)}-x_{p+q},$$

$$y_{2(p+q)}=x_{3(p+q)}-x_{2(p+q)},$$

$$\cdots\cdots$$

$$y_{(k-1)(p+q)}=x_{k(p+q)}-x_{(k-1)(p+q)}=x_n-x_{(k-1)(p+q)}$$

将以上诸式相加得

$$y_0+y_{p+q}+y_{2(p+q)}+\cdots+y_{(k-1)(p+q)}=x_n=0.$$

若 $y_0>0$，则上式中总有加数$<0$，

若 $y_0<0$，则上式中总有加数$>0$.

由 $y_i\equiv 0 \pmod{p+q}$，则

$$\frac{y_0}{p+q},\frac{y_1}{p+q},\cdots,\frac{y_{(k-1)(p+q)}}{p+q}$$

都是整数，且每相邻两项之差只能是 1，0 或 $-1$，而且不可能全是正数，也不可能全是负数，因此，必有一个是 0，即存在 $i_0$，使 $y_{i_0}=0$.

这时 $y_{i_0}=x_{i_0+p+q}-x_{i_0}=0$.

即存在一对标号$(i,j)$，$j=i_0+p+q$，$i=i_0$，使得 $x_i=x_j$.

2·79 确定最小的整数 $n\geqslant 4$，可以从任意 $n$ 个不同的整数中，选

出 4 个不同的整数 $a,b,c,d$,使得 $a+b-c-d$ 能被 20 整除.

（第 39 届国际数学奥林匹克预选题,1998 年）

**[解]** 由于 $C_7^2=\frac{7\times6}{2}=21$,

所以从 7 个不同整数中一定可以选出一对整数,这对整数对 mod 20 同余,设这对整数为 $a,c$,则 $a\equiv c \pmod{20}$ ①

当从 7 个不同整数中选出 $a,c$ 后还剩下 5 个不同整数,再添加 2 个与上述 7 个整数不同的 2 个整数,又构成 7 个不同整数的集合,按上面分析,又可从中选出一对整数(设为 $b,d$),使得 $b\equiv d \pmod{20}$ ②

由①,②得 $a+b\equiv c+d \pmod{20}$.

即 $a+b-c-d\equiv0 \pmod{20}$,

故 $20\mid a+b-c-d$.

所以,任意 9 个不同的整数中可以选取 4 个不同的数 $a,b,c,d$,使 $20\mid a+b-c-d$.

另一方面,可以找到 8 个数,例如

$$0,1,2,4,7,12,20,40$$

这 8 个数中任意 4 个数 $a,b,c,d$ 都不能使

$$20\mid a+b-c-d.$$

**2·80** 整数序列 $a_1,a_2,a_3,\cdots$定义如下:$a_1=1$,对 $n\geqslant1$,$a_{n+1}$是大于 $a_n$ 且使得对$\{1,2,\cdots,n+1\}$中的任意 $i,j,k$(不一定不同),$a_i+a_j\neq3a_k$ 的最小整数,确定 $a_{1998}$.

（第 39 届国际数学奥林匹克预选题,1998 年）

**[解]** 已知 $a_1=1$,则 $a_2=3,a_3=4,a_4=7$,满足题目要求.这是因为 1,3,4,7 任两数相加(可以相同)的和为 1,2,4,5,6,7,8,10,11,14,它们被 9 除的余数为 1,2,4,5,6,7,8,而对于 $3a_k$ 被 9 除的余数为 0,3.

设 $1,2,\cdots,9n$ 中恰有数列$\{a_m\}$的前 $4n$ 项,它们是 mod 9 余数为 1,3,4,7 的那些数,则 $9n+1$ 添入数列$\{a_m\}$的前 $4n$ 项之后,有

$$a_i+a_j\equiv1,2,4,5,6,7,8 \pmod 9,$$

$$3a_k\equiv0,9 \pmod 9,$$

于是 $$a_{4n+1}=9n+1.$$

由于 $(9n+2)+1=3(3n+1)$,

而 $3n+1\equiv 1,4,7 \pmod 9, 1\equiv 1 \pmod 9$

因此 $9n+2\notin \{a_m\}$.

同理可证 $9n+3, 9n+4, 9n+7\in \{a_m\}$,

又因为 $(9n+5)+7=3(3n+4)$,

即 $(9n+8)+4=3(3n+4)$,

或 $(9n+6)+(9n+6)=3(6n+4)$,

亦或 $(9n+9)+3=3(3n+4)$,

因为 $3n+4\equiv 1,4,7 \pmod 9$,

且 $6n+4\equiv 1,4,7 \pmod 9$,

所以 $3n+4, 6n+4\in \{a_n\}$,

从而 $9n+5, 9n+6, 9n+8, 9n+9\notin \{a_n\}$.

于是$\{a_m\}$由自然数列中,对 mod 9 余 1,3,4,7 的数组成.

因为 $1998=499\times 4+2$,所以 $a_{1998}=499\times 9+3=4494$.

# 第三章　素数与合数



3·1　若数 $p, p+10, p+14$ 都是素数，求 $p$.

（基辅数学奥林匹克，1981年）

[解]　若　$p \equiv 1 \pmod 3$，则

$$p+14 \equiv 15 \equiv 0 \pmod 3.$$

此时，$p+14$ 不是素数.

若 $p \equiv 2 \pmod 3$，则

$$p+10 \equiv 12 \equiv 0 \pmod 3.$$

此时，$p+10$ 不是素数.

所以　$p \equiv 0 \pmod 3$.

又由 $p$ 是素数，则 $p=3$.

此时 $p+10=13, p+14=17$ 都是素数.

所以本题只有惟一解：$p=3$.

3·2　求所有的素数 $p$，使 $4p^2+1$ 和 $6p^2+1$ 也是素数.

（波兰数学竞赛，1964年）

[解]　设 $u=4p^2+1,\quad v=6p^2+1$.

并设 $p=5k+r,\quad k \in Z,\quad r \in \{0,1,2,3,4\}$.

于是

$$u=100k^2+40kr+4r^2+1,$$
$$v=150k^2+60kr+6r^2+1.$$

若 $p \equiv 0 \pmod 5$，则

$$u \equiv 1,\quad v \equiv 1 \pmod 5;$$

若 $p \equiv 1 \pmod 5$，则

$$u \equiv 0, \quad v \equiv 2 \pmod 5;$$

若 $p \equiv 2 \pmod 5$,则

$$u \equiv 2, \quad v \equiv 0 \pmod 5;$$

若 $p \equiv 3 \pmod 5$,则

$$u \equiv 2, \quad v \equiv 0 \pmod 5;$$

若 $p \equiv 4 \pmod 5$,则

$$u \equiv 0, \quad v \equiv 2 \pmod 5.$$

因此,对任何整数 $p$,三个数 $p,u,v$ 之中有一个且仅一个能被5整除.

由于当 $p$ 不能被5整除时,$u$ 和 $v$ 之中有一个能被5整除,即 $u$ 和 $v$ 之中有一个不是素数,所以若使 $u$ 和 $v$ 都是素数,只有 $p$ 能被5整除时才有可能. 又由于 $p$ 是素数,所以 $p=5$.

不难验证,当 $p=5$ 时,$u=4\cdot 5^2+1=101$, $v=6\cdot 5^2+1=151$ 都是素数.

因此,本题只有惟一解.

3·3　整数 $C_{200}^{100}$ 的最大的两位数的素因数是多少?

(第1届美国数学邀请赛,1983年)

[解]　$n=C_{200}^{100}$

$$=\frac{200\cdot 199\cdot 198\cdot\cdots\cdot 102\cdot 101}{100!}$$

$$=2^{50}\cdot\frac{199\cdot 197\cdot 195\cdot\cdots\cdot 103\cdot 101}{50!}.$$

这是一个整数,且分子中 $199\cdot 197\cdot 195\cdot\cdots\cdot 103\cdot 101$ 是三位奇数之积,于是所求的两位数的素因子只能从三位奇合数中寻找.

由于小于200的合数一定含有小于 $\sqrt{200}$ 的素数为因子,因此在101到199之间的奇合数的素因子一定含有3,5,7,11,13中的一个.

由于 $\left[\frac{199}{3}\right]=66$,于是所求的最大的两位素因子一定小于66,而小于66的最大的素数为61,且 $61\cdot 3=183$ 恰为 $C_{200}^{100}$ 中的一个因子,于是所求的最大素因子为61.

3·4　求三个素数,使得它们的积为和的5倍.

(基辅数学奥林匹克,1973年)

[解]　设三个素数为 $p,q,r$,则

$$p \cdot q \cdot r = 5(p + q + r),$$

于是 $p,q,r$ 中必有一个等于5.不妨设 $r = 5$,则

$$5pq = 5(p + q + 5),$$

$$pq = p + q + 5,$$

$$(p-1)(q-1) = 6.$$

由 $p > 1$, $q > 1$ 可知

$$\begin{cases} p-1=2, \\ q-1=3, \end{cases} \quad \begin{cases} p-1=3, \\ q-1=2, \end{cases} \quad \begin{cases} p-1=1, \\ q-1=6, \end{cases} \quad \begin{cases} p-1=6, \\ q-1=1. \end{cases}$$

由于 $q = 4$ 或 $p = 4$ 不是素数,所以只有 $p = 2, q = 7$,或 $p = 7$, $q = 2$.于是所求三素数为2,5,7.

3·5　已知方程 $x^4 - px^3 + q = 0$ 有一整数根,求素数 $p$ 与 $q$.

(列宁格勒数学奥林匹克,1980年)

[解]　设整数 $x$ 使

$$q = x^3(p - x), \quad ①$$

于是　$x \mid q$.

因为 $q$ 是素数,因此只能有

$$x = \pm 1, \quad x = \pm q.$$

当 $x = \pm q$ 时,由①有

$$q^2 \mid 1,$$

这是不可能的(因为 $q$ 是素数).

当 $x = -1$ 时,有

$$p + q + 1 = 0,$$

这也不可能.

当 $x = 1$ 时,由①式得

$$p = q + 1.$$

因为 $p$ 和 $q$ 都是素数,则 $p = 3, q = 2$.

3·6　求最小的自然数 $a$ 和 $b(b > 1)$,使得 $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}} = b$.

(基辅数学奥林匹克,1978年)

[解]　由题意得

$$b^8 = \left(\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}\right)^8 = a^7. \quad ①$$

设素数 $p$ 能整除 $b$.(因为 $b > 1$,所以这样的素数是存在的)

由①，$p$ 也能整除 $a$.

设 $b = p^{\beta}\cdot c$，$a = p^{\alpha}\cdot d$，这里 $c$ 和 $d$ 都是与 $p$ 互素的自然数，$\alpha \geqslant 1, \beta \geqslant 1$. 从而有

$$p^{8\beta}\cdot c^{8} = p^{7\alpha}\cdot d^{7}. \quad ②$$

因为 $(c^{8}, p) = 1, (d^{7}, p) = 1$，则由②有

$$8\beta = 7\alpha.$$

又 $(7,8) = 1$，则 7 能整除 $\beta$，8 能整除 $\alpha$，因而有

$$\alpha \geqslant 8, \quad \beta \geqslant 7.$$

又因为 $c \geqslant 1$，$d \geqslant 1$，$p \geqslant 2$.

所以必有

$$a = p^{\alpha}\cdot d \geqslant p^{\alpha} \geqslant p^{8} \geqslant 2^{8} = 256.$$
$$b = p^{\beta}\cdot c \geqslant p^{\beta} \geqslant p^{7} \geqslant 2^{7} = 128.$$

因而 $a = 256$，$b = 128$ 是满足给定等式的最小自然数.

3·7　试求出所有不超过 1000 的素数 $p$，这些 $p$ 使 $2p+1$ 是自然数的方幂（亦即存在自然数 $m$ 和 $n$，$n \geqslant 2$，使得 $2p+1 = m^{n}$）.

（乌克兰数学奥林匹克，1992 年）

**[解]**　若 $2p+1$ 是自然数的方幂，即

$$2p+1 = m^{n},$$

则 $m$ 为奇数.

设 $m = 2k+1$，则

$$2p+1 = (2k+1)^{n}.$$

从而　　$$2p = 2k\cdot A,$$

其中 $p$ 是素数，$A$ 是大于 1 的整数，

即　　$$p = k\cdot A.$$

由 $p$ 是素数可知，$k = 1$，因而 $m = 3$，

即　　$$2p+1 = 3^{n}. \quad ①$$

由 $p \leqslant 1000$，则 $3^{n} \leqslant 2001$.

而不超过 2001 的 3 的幂仅有

$$3,\quad 3^{2},\quad 3^{3},\quad 3^{4},\quad 3^{5},\quad 3^{6},$$

代入①式逐个计算可得，仅有

$$2p+1 = 3^{3}$$

使 $p$ 为素数，此时 $p = 13$.

即符合题目要求的素数仅有一个，$p=13$.

3·8　求 8 个素数(不一定不同)，使得它们的平方和比它们的乘积的 4 倍小 992.

(基辅数学奥林匹克，1974 年)

[解]　设这 8 个素数为 $x_1, x_2, \cdots, x_8$.

设　$S = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_8^2$,

$P = x_1 x_2 \cdots x_8$.

由题意有

$$4P - S = 992. \qquad ①$$

首先，所有的 $x_i$ 不可能都是奇数.

由于奇数的平方被 8 除的余数为 1，则

$$S \equiv 0 \pmod 8.$$

又

$$4P \equiv 4 \pmod 8,$$

$$992 \equiv 0 \pmod 8.$$

则 ① 式不可能成立.

其次，所有的 $x_i$ 不可能有一部分是奇素数，另一部分是 2.

设有 $k$ 个奇素数，$8-k$ 个 $2(1 \leqslant k \leqslant 7)$，由于

$$4P \equiv 0 \pmod 8,$$

$$S \equiv k + 4(8-k) \equiv 32 - 3k \pmod 8,$$

$$992 \equiv 0 \pmod 8.$$

于是 ① 式也不可能成立.

由以上，所有的 $x_i (i = 1, 2, \cdots, 8)$ 都是 2.

经验证，$x_1 = x_2 = \cdots = x_8 = 2$ 符合要求.

3·9　试找出所有的位数不超过 19 的，具有形状 $p^p + 1$ 的素数($p$ 为自然数).

(第 28 届莫斯科数学奥林匹克，1965 年)

[解]　显然 $p < 19$.

如果 $p$ 是奇数，则 $p^p + 1$ 能被 2 整除，

于是仅当 $p = 1$ 时，$p^p + 1 = 2$ 是素数.

如果 $p$ 有奇数因子，设 $p = mk$，其中 $m$ 是奇数，则

$$p^p + 1 = p^{mk} + 1 = (p^k)^m + 1,$$

此时

$$p^k + 1 \mid p^p + 1,$$

因而 $p^p+1$ 不是素数.

于是 $p$ 仅可能是小于 19 的偶数,且只有偶数因子,即

$$p=2,4,8,16.$$

若 $p=16$,则

$$16^{16}=2^{64}=(2^{10})^6\cdot 16>1000^6\cdot 16=16\cdot 10^{18},$$

因此 $16^{16}+1$ 多于 19 位数.

若 $p=8$,则

$$\begin{aligned}8^8+1&=2^{24}+1\\&=(2^8)^3+1\\&=(2^8+1)(2^{16}-2^8+1)\end{aligned}$$

是合数.

若 $p=4$,则

$$4^4+1=257\ \text{是素数}.$$

若 $p=2$,则

$$2^2+1=5\quad \text{是素数}.$$

于是所求的素数为 2, 5, 257.

3·10　求使 $(n-1)!$ 不能被 $n^2$ 整除的一切奇自然数 $n$.

(第 4 届全俄数学奥林匹克,1964 年)

**[解]**　首先可以证明 $n$ 是奇素数和 $n=9$ 时,$(n-1)!$ 不能被 $n^2$ 整除.

当 $n$ 是奇素数时,则 $(n-1)!$ 中不含有约数 $n$,因此 $(n-1)!$ 不能被 $n^2$ 整除.

当 $n=9$ 时,显然 $8!$ 能被 9 整除,但不能被 $9^2=81$ 整除.

下面再证明当 $n$ 是奇合数,且 $n\neq 9$ 时,$(n-1)!$ 一定能被 $n^2$ 整除.

如果 $n$ 是奇合数,且不是奇素数的平方.

设 $n=ab$, $a\geqslant 3$, $b\geqslant 3$, $a\neq b$.

这时 $a$, $2a$, $b$, $2b$ 必定是乘积 $1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)$ 的因数,所以 $(n-1)!$ 能被 $a^2b^2=n^2$ 整除.

如果 $n$ 是不小于 5 的奇素数的平方.

设 $n=p^2$, $p$ 是素数,$p\geqslant 5$.

这时必有　$p^2-1\geqslant 4p$.

因而在$(n-1)!=(p^2-1)!$中一定有因数 $p$, $2p$, $3p$, $4p$. 因此$(n-1)!$能被$(p^2)^2=p^4$整除.

综上所知,符合题目要求的奇自然数为 $n$ 是奇素数和 $n=9$.

3·11　对于怎样的整数 $m$, 乘积 $1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot(m-1)$ 能被 $m$ 整除?

(匈牙利数学奥林匹克,1951 年)

[**解**]　(1) 如果 $m=p$ 是素数,显然

$$p\nmid 1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot(p-1).$$

(2) 如果 $m$ 可以分解为两个不同的整数的乘积,即可表示成

$$m=ab,\quad a\neq b.\quad a>1,\quad b>1.$$

显然　$a\leqslant m-1$, $b\leqslant m-1$,

于是　$m=ab\mid 1\cdot2\cdot\cdots\cdot(m-1)$.

(3) 如果 $m$ 只能分解为两个相同因子的乘积,即 $m$ 可表示为素数 $p$ 的平方的形式,设 $m=p^2$.

当 $p\neq2$ 时,则必有 $p^2>2p$,

于是在 $1,2,\cdots,p^2-1$ 中必有一数为 $p$,一数为 $2p$. 从而

$$2p^2\mid 1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot(p^2-1),$$

即
$$p^2\mid 1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot(p^2-1).$$

也就是
$$m\mid 1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot(m-1).$$

于是,对于除 $m=4$ 之外的任何合数 $m$,总有

$$m\mid 1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot(m-1).$$

3·12　设 $K$ 是这样的自然数的全体,其中每一个数由 0 与 1 两个数字相间而成,首位与末位都是 1,问 $K$ 中有多少个素数?

(第 50 届美国普特南数学竞赛,1989 年)

[**解**]　1 不是素数,而 101 是素数.

设 101010…01 中有 3 个或 3 个以上的 1.

这种数总可以表示为

$$1+100+100^2+\cdots+100^n=\frac{100^{n+1}-1}{100-1}\qquad(n\geqslant2).$$

由于

$$\frac{100^{n+1}-1}{100-1}=\frac{10^{2n+2}-1}{10^2-1}$$

$$= \frac{(10^{n+1}+1)(10^{n+1}-1)}{(10+1)(10-1)}$$

$$= \frac{(10^{n+1}+1)\cdot 99\cdots 9}{(10+1)\cdot 9}$$

$$= \frac{(10^{n+1}+1)}{(10+1)}\cdot 11\cdots 1.$$

如果 $n$ 为奇数,那么 $n+1$ 为偶数,这时 $\frac{11\cdots 11}{11}$ 是大于 1 的整数.

从而 $\frac{11\cdots 11}{11}\cdot(10^{n+1}+1)$ 是两个大于 1 的整数的乘积,即 $\frac{100^{n+1}-1}{100-1}$ 是合数.

如果 $n$ 为偶数,那么 $n+1$ 为奇数,这时 $10+1$ 能整除 $10^{n+1}+1$,并且商大于 1.

从而 $\frac{10^{n+1}+1}{10+1}\cdot 11\cdots 11$ 是两个大于 1 的整数的乘积,即 $\frac{100^{n+1}-1}{100-1}$ 是合数.

这就表明,当 $n\geqslant 2$ 时,这种数总是合数.

因此,$K$ 中的素数只有一个,即 101.

3·13　设 $a,b,c,d$ 是正整数,满足 $a^5=b^4$,　$c^3=d^2$,且 $c-a=19$.求 $d-b$.

(第 3 届美国数学邀请赛,1985 年)

**[解]**　由 $a^5=b^4$,　$c^3=d^2$.

注意到　$(5,\ 4)=1$,　$(3,\ 2)=1$,可知,存在两个正整数 $m$ 及 $n$,使

$$a=m^4, b=m^5,$$
$$c=n^2, d=n^3.$$

于是　$19=c-a=n^2-m^4=(n+m^2)(n-m^2)$.

由于 19 是素数,以及 $n-m^2<n+m^2$,则有

$$\begin{cases} n-m^2=1, \\ n+m^2=19. \end{cases}$$

解得　$n=10$,　$m=3$.

有　$d=n^3=1000$,　$b=m^5=243$.

$$d-b=1000-243=757.$$

3·14　如果一个自然数是素数,而且把它的各位数码经过任意交换后仍然是素数,则称这个素数为绝对素数.

证明绝对素数不能有多于 3 个不同的数字.

（第 18 届全苏数学奥林匹克,1984 年）

[证]　绝对素数的各位数码都应是奇数,而且不可能有数码 5.

假设某个绝对素数含有四个不同的数码 1,3,7,9.则可设

$$M_1=\overline{a_1a_2\cdots a_n1379},$$

并令 $M=\overline{a_1a_2\cdots a_n}$,　$a_i\in\{1,3,7,9\}$,　$1\leqslant i\leqslant n$.

$$M_1=M\cdot10^4+1379,\quad 1379\equiv0\pmod 7,$$
$$M_2=M\cdot10^4+1397,\quad 1397\equiv4\pmod 7,$$
$$M_3=M\cdot10^4+1973,\quad 1973\equiv6\pmod 7,$$
$$M_4=M\cdot10^4+1937,\quad 1937\equiv5\pmod 7,$$
$$M_5=M\cdot10^4+1739,\quad 1739\equiv3\pmod 7,$$
$$M_6=M\cdot10^4+3197,\quad 3197\equiv5\pmod 7,$$
$$M_7=M\cdot10^4+3179,\quad 3179\equiv1\pmod 7,$$
$$M_8=M\cdot10^4+9137,\quad 9137\equiv2\pmod 7,$$
$$M_9=M\cdot10^4+7913,\quad 7913\equiv3\pmod 7.$$

这九个数被 7 除的余数不同,因此在 $M_1,M_2,\cdots,M_9$ 中一定有一个能被 7 整除而不是素数,从而出现矛盾.

所以绝对素数不可能有多于 3 个不同的数码.

3·15　如果 $p$ 和 $q$ 是两个素数,并且 $q=p+2$.证明 $p^q+q^p$ 能被 $p+q$ 整除.

（第 31 届莫斯科数学奥林匹克,1968 年）

[证]
$$\begin{aligned}&p^q+q^p\\=&(p^p+q^p)+(p^q-p^p)\\=&(p^p+q^p)+(p^{p+2}-p^p).\end{aligned}$$

因为 $p$ 和 $q$ 都是素数,且 $q=p+2$,则 $p$ 和 $q$ 都是奇数.

由 $p$ 是奇数,则

$$p+q\mid p^p+q^p,$$

又　$p^{p+2}-p^p$

$$= p^p(p-1)(p+1).$$

由于 $p-1$ 是偶数,则

$$2(p+1) \mid p^p(p-1)(p+1).$$

又 $$2(p+1) = 2p+2 = p+q.$$

于是 $$p+q \mid p^{p+2} - p^p.$$

因此 $$p+q \mid p^q + q^p.$$

3·16　设 $p_1, p_2, \cdots, p_{24}$ 是一些不小于 5 的素数.证明

$$p_1^2 + p_2^2 + \cdots + p_{24}^2$$

可被 24 整除.

(第 51 届莫斯科数学奥林匹克,1988 年)

[证]　因为 $p_i$ 是不小于 5 的素数,则 $p_i$ 仅可表示为 $6k \pm 1$ 型($k$ 为自然数),于是

$$p_i^2 - 1 = 36k^2 \pm 12k$$
$$= 12k(3k \pm 1).$$

由于 $k$ 和 $3k \pm 1$ 的奇偶性不同,所以 $k(3k \pm 1)$ 是偶数,于是 $p_i^2 - 1$ 能被 24 整除.从而

$$p_1^2 + p_2^2 + \cdots + p_{24}^2 - 24$$

能被 24 整除,即 $p_1^2 + p_2^2 + \cdots + p_{24}^2$ 能被 24 整除.

3·17　设 $\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0} = 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \cdots + 10 a_1 + a_0$ 为一个素数的十进制表示,$n > 1$,　$a_n > 1$.证明多项式

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

不可约,即不能分解为两个次数为正的整系数多项式的积.

(第 6 届巴尔干地区数学竞赛,1989 年)

[证]　先证明一个引理:

引理:如果 $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \{0,1,2,\cdots,9\}$,$n \geqslant 1$,$a_n \geqslant 1$,则多项式

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

的根的实部小于 4.

用反证法.假设复数 $z$ 的实部 $\mathrm{Re}(z) \geqslant 4$,则

$$|z| \geqslant 4, \quad \mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) \geqslant 0.$$

$$\left|\frac{P(z)}{z^n}\right| \geqslant \left|a_n + \frac{a_{n-1}}{z}\right| - \frac{a_{n-2}}{|z|^2} - \frac{a_{n-3}}{|z|^3} - \cdots - \frac{a_0}{|z|^n}$$

$$> \mathrm{Re}\left(a_n + \frac{a_{n-1}}{z}\right) - \frac{9}{|z|^2} - \frac{9}{|z|^3} - \cdots - \frac{9}{|z|^n}$$

$$\geqslant 1 - \frac{9}{|z|^2 - |z|}$$

$$\geqslant 1 - \frac{9}{|z|^2}$$

$$\geqslant 1 - \frac{9}{16}$$

$$> 0.$$

所以 $z$ 不为 $P(x)$ 的根，即 $P(x)$ 的根的实部必小于 4. 引理得证.

现在回到原来的问题.

如果 $P(x) = g(x) \cdot h(x)$，其中 $g(x)$ 和 $h(x)$ 都是次数为正的整系数多项式，那么设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ 为 $g(x)$ 的根，则 $\mathrm{Re}(\alpha_j) < 4, 1 \leqslant j \leqslant k$. 所以

$$g(4) \neq 0,$$

从而 $$|g(4)| \geqslant 1.$$

同时 $|10 - \alpha_j| > |4 - \alpha_j|, \quad 1 \leqslant j \leqslant k.$

所以 $|g(10)| > |g(4)| \geqslant 1.$

同理 $|h(10)| > |h(4)| \geqslant 1.$

于是素数 $P(10)$ 分解为两个大于 1 的整数 $|g(10)|$ 和 $|h(10)|$ 的乘积，出现矛盾.

所以 $P(x)$ 不可约.

3·18　设二次三项式 $ax^2 + bx + c$ 的系数是正整数. 已知当 $x = 1991$ 时，二次三项式的值 $a \cdot 1991^2 + b \cdot 1991 + c = p$ 是一个素数. 证明 $ax^2 + bx + c$ 不可能分解为两个整系数一次式的乘积.

（第 4 届祖冲之杯初中数学邀请赛，1991 年）

［证］　假设正整数系数的二次三项式可以分解为两个整系数的一次式的乘积，即

$$ax^2 + bx + c = (d_1x + e_1)(d_2x + e_2) \qquad ①$$

其中 $d_1, d_2, e_1, e_2$ 均为整数.

易知 $d_1d_2 = a > 0$，所以 $d_1$ 和 $d_2$ 同号，不妨设 $d_1$ 与 $d_2$ 均为正整

数，于是 $e_1$ 和 $e_2$ 也是正整数.

把 $x = 1991$ 代入 ① 式得

$$\begin{aligned}&a \cdot 1991^2 + b \cdot 1991 + c\\&= |1991d_1 + e_1||1991d_2 + e_2|\\&= p.\end{aligned}$$

因为 $p$ 是素数，所以 $|1991d_1 + e_1|$ 与 $|1991d_2 + e_2|$ 中必有一个为 1，不妨设 $|1991d_1 + e_1| = 1$. 然而由 $d_1 > 0, e_1 > 0$，这是不可能的.

所以 $ax^2 + bx + c$ 不可能分解为两个整系数的一次式的乘积.

**3·19** 设 $p, q$ 为正素数，方程 $x^2 + p^2x + q^3 = 0$ 有有理根吗？如果没有，给出证明；如果有，请求出来.

（中国江苏省苏州市、镇江市高中数学竞赛，1985 年）

**［解］** 因为 $p, q$ 是正素数，所以原方程不可能有正数根.

又因为已知方程的 $x^2$ 的系数为 1，所以若方程有有理根，则只能是整数根，且必为 $q^3$ 的约数.

因此，若原方程有有理根，则只能取以下各数：$-1, -q, -q^2, -q^3$ 为根.

若方程的两根为 $-q, -q^2$，则由韦达定理

$$p^2 = q + q^2 = q(q+1) \geqslant 6.$$

此时 $p^2$ 为偶数，且 $p^2 \neq 4$，所以 $p$ 必为合数，与 $p$ 是素数矛盾. 因而 $-q, -q^2$ 不是原方程的根.

若方程有有理根，只能是 $-1$ 和 $-q^3$，这时有

$$p^2 = 1 + q^3,$$

显然，$q$ 不能为奇素数，否则 $p^2$ 为大于 4 的偶数，因而 $p$ 是合数，于是 $q$ 为偶素数，即 $q = 2$，从而 $p = 3$.

所以当且仅当 $p = 3$，$q = 2$ 时，原方程 $x^2 + p^2x + q^3 = 0$ 即 $x^2 + 9x + 8 = 0$ 有有理根：$x_1 = -1$，$x_2 = -8$.

**3·20** 设 $f(x) = ax^2 + bx + c$，已知 $f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)$ 都是素数. 求证 $f(x)$ 不能分解成两个整系数一次式的积.

（中国北京市高中一年级数学竞赛，1981 年）

**［证］** 假设 $f(x)$ 能分解成两个整系数一次式 $g(x)$ 和 $h(x)$ 的乘积，即

$$f(x)=g(x)h(x).$$

把 $x=1,2,3,4,5$ 代入上式得

$$f(1)=g(1)h(1),$$
$$f(2)=g(2)h(2),$$
$$f(3)=g(3)h(3),$$
$$f(4)=g(4)h(4),$$
$$f(5)=g(5)h(5).$$

在上面的五个式子中,左端 $f(1),f(2),f(3),f(4),f(5)$ 都是素数,因此在 $g(i)$, $h(i)$, $(i=1,2,3,4,5)$ 这十个数中至少有五个是 $\pm 1$.

另一方面,由于 $g(x)$ 是一次式,则 $g(1),g(2),g(3),g(4),g(5)$ 是五个不同的数,因此至多有一个是 $+1$,一个是 $-1$,同样,$h(i)(i=1,2,3,4,5)$ 中也至多有一个是 $+1$,一个是 $-1$,于是在 $g(i),h(i)$ $(i=1,2,3,4,5)$ 这十个数中至多有四个是 $\pm 1$.

以上矛盾表明,$f(x)$ 不能分解为两个整系数一次式的乘积.

3·21　设 $a,b,c$ 是整数,$p>0$ 是奇素数,如果存在整数 $x$ 使得 $f(x+i)=a(x+i)^2+b(x+i)+c$, $i=0,1,2,\cdots,2p-2$,都是平方数.求证 $p\mid b^2-4ac$.

(第 32 届国际数学奥林匹克预选题,1991 年)

[证]　用反证法.

设 $p\nmid b^2-4ac$.

(1) 当 $p\nmid a$ 时.

首先可以证明:存在 $i\in\{0,1,2,\cdots,p-1\}$,使得 $p\mid f(x+i)$.

事实上,若对每个 $i\in\{0,1,2,\cdots,p-1\}$,都有 $p\nmid f(x+i)$,

由于 $f(x+i)$ 是平方数,从而对任何 $i\in\{0,1,2,\cdots,p-1\}$,存在 $a_i\in\{1,2,\cdots,\frac{p-1}{2}\}$ 使得

$$p\mid f(x+i)-a_i^2.$$

由于 $a_0,a_1,\cdots,a_{p-1}$ 这 $p$ 个整数至多取 $\frac{p-1}{2}$ 个值,所以必有三个数相等.即存在 $0\leqslant t<k<m\leqslant p-1$ 使得 $a_t=a_k=a_m$.

于是有
$$p\mid f(x+k)-f(x+t),$$
$$p\mid (k-t)(2ax+ak+at+b).$$

所以 $$p \mid 2ax + ak + at + b.$$

$$p \mid f(x+m) - f(x+k),$$

$$p \mid (m-k)(2ax + am + ak + b),$$

所以 $$p \mid 2ax + am + ak + b.$$

从而

$$p \mid [(k-t)(2ax + ak + at + b)] - [(m-k)(2ax + am + ak + b)],$$

即 $$p \mid a(m-t).$$

又 $$|m-t| < p,$$

所以 $p \mid a$,导出矛盾.

所以存在整数 $0 \leqslant i \leqslant p-1$,使得

$$p \mid f(x+i).$$

进而,由 $p \nmid a$ 易知,存在整数 $0 \leqslant j \leqslant p-1$,使得

$$p \mid aj + a(x+i) + ax + b.$$

当 $j = i$ 时,则 $p \mid 2a(x+i) + b$.

因为 $[2a(x+i)+b]^2 = b^2 - 4ac + 4af(x+i)$,

所以 $$p \mid b^2 - 4ac,$$

与假设 $p \nmid b^2 - 4ac$ 矛盾.

从而 $j \neq i$.又

$$\begin{aligned} & f(x+i) - f(x+j) \\ = & (i-j)(2ax + ai + aj + b). \end{aligned}$$

所以 $$p \mid f(x+j).$$

由此可知,$i,j$ 中必有一个,例如 $j$,满足 $0 \leqslant j \leqslant p-2$.

由 $p \mid f(x+j)$,则

$$p \mid f(x+p+j).$$

由假设,$f(x+j)$ 与 $f(x+p+j)$ 都是平方数,从而

$$p^2 \mid f(x+p+j) - f(x+j),$$

$$p \mid p[2a(x+j)+b] + ap^2.$$

所以 $$p \mid [2a(x+j)+b]^2,$$

即 $$p \mid b^2 - 4ac + 4af(x+j).$$

由此又得 $p \mid b^2 - 4ac$,

仍与假设 $p \nmid b^2 - 4ac$ 矛盾.

所以,当 $p \nmid a$ 时,$p \mid b^2 - 4ac$.

(2) 当 $p \mid a$ 时.

则由 $p \nmid b^2 - 4ac$ 得 $p \nmid b$.

由于 $p$ 是奇素数,从而存在 $1 < k \leqslant p - 1$,使得对任何整数 $n$,

$$p \nmid n^2 - k.$$

由 $p \nmid b$ 可知,存在整数 $0 \leqslant i \leqslant p - 1$,使得

$$p \mid b(x + i) + c - k.$$

再由 $p \mid a$ 可知,$p \mid f(x + i) - k$.

由于 $f(x + i)$ 是平方数,与 $k$ 的选取无关.

又引出矛盾.

因此,由(1),(2),必有

$$p \mid b^2 - 4ac.$$

3·22　证明或说明不正确.存在素数 $a, b, c, d$,且 $a < b < c < d$,满足 $\frac{1}{a} + \frac{1}{d} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

(新加坡数学竞赛,1987 年)

[解]　假定结论正确,则

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{c} - \frac{1}{d},$$

$$cd(b - a) = ab(d - c).$$

所以　$$b \mid cd(b - a).$$

因为 $b$ 是素数,$c$ 和 $d$ 也是素数,则 $b \mid b - a$.

由此推出　$$b \mid a.$$

而 $a$ 和 $b$ 都是素数,这是不可能的.

所以结论不正确.

3·23　若 $a$ 是自然数,且 $a^4 - 4a^3 + 15a^2 - 30a + 27$ 的值是一个素数,问这个素数是什么?

(中国北京市初中二年级数学竞赛,1988 年)

[解]
$$a^4 - 4a^3 + 15a^2 - 30a + 27 = (a^2 - 3a + 3)(a^2 - a + 9).$$

因为 $a$ 是自然数,$a^4 - 4a^3 + 15a^2 - 30a + 27$ 是一个素数,且

$$a^2 - 3a + 3 < a^2 - a + 9.$$

于是只能有

$$a^2-3a+3=1,$$

解得
$$a=1,\quad a=2.$$

当 $a=1$ 时,$a^2-a+9=9$,不是素数.

当 $a=2$ 时,$a^2-a+9=11$ 是素数.

所以 $\quad a^4-4a^3+15a^2-30a+27=11.$

3·24　设整数 $p>1$,$x$ 是满足 $0\leqslant x<p$ 的所有整数,使得二次三项式 $x^2-x+p$ 是素数.(例如 $p=5$ 与 $p=41$ 就有这种性质)

证明存在惟一的整数组 $a,b,c$ 满足 $b^2-4ac=1-4p$, $0<a\leqslant c$, $-a\leqslant b<a$.

(第 34 届美国普特南数学竞赛,1973 年)

[证]　满足条件的整数组 $(a,b,c)=(1,-1,p)$. 我们证明它是惟一的解.

由
$$b^2-4ac=1-4p, \qquad ①$$

可得 $b$ 是满足
$$b^2\equiv 1 \pmod 4.$$

的整数,因而 $b$ 是奇数.

记 $|b|=2x-1$,则由 ① 式得
$$(2x-1)^2-4ac=1-4p.$$

即
$$x^2-x+p=ac.$$

若 $0\leqslant x<p$,由题设可知 $ac$ 是素数.

则由 $0<a\leqslant c$ 得
$$a=1.$$

再由 $-a\leqslant b<a$ 及 $b$ 是奇数可得
$$b=-1.$$

又由 $1-4p=b^2-4ac=1-4c$,可得
$$c=p.$$

下面只要证明 $0\leqslant x<p$ 即可.

由 $|b|=2x-1$ 可得
$$x=\frac{|b|+1}{2}\geqslant 0.$$

由 $\quad |b|\leqslant a\leqslant c,\quad b^2-4ac=1-4p$ 及 $p\geqslant 2$,则
$$3a^2=4a^2-a^2\leqslant 4ac-b^2=4p-1$$

$$|b| \leqslant a \leqslant \sqrt{\frac{4p-1}{3}}.$$

$$x = \frac{|b|+1}{2} < \sqrt{\frac{p}{3}} + \frac{1}{2} < p.$$

于是 $0 \leqslant x < p$. 由以上,惟一性得证.

3·25　已知方程 $x^2 + px + q = 0$ 的根皆为整数,且有 $p + q = 198$,试求其根.

（第 15 届全俄数学奥林匹克,1989 年）

[解]　设已知方程的二个整数根为 $x_1, x_2$,则

$$x_1 + x_2 = -p,$$

$$x_1x_2 = q.$$

从而

$$198 = p + q = -(x_1 + x_2) + x_1x_2$$

$$= (x_1 - 1)(x_2 - 1) - 1.$$

于是

$$(x_1 - 1)(x_2 - 1) = 199.$$

由于 199 是素数,则只能有

$$(x_1 - 1,\quad x_2 - 1) = (1,\quad 199) \text{或} (-1, -199).$$

于是　$x_1 = 2, x_2 = 200$　或 $x_1 = 0, x_2 = -198$.

3·26　证明对于无穷多个素数 $p$,方程 $x^2 + x + 1 = py$ 有整数解 $(x, y)$.

（第 2 届全苏数学奥林匹克,1968 年）

[证]　用反证法.

假设方程 $x^2 + x + 1 = py$ 只对有限个素数:

$$p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_m$$

有整数解 $(x, y)$.

设 $p = p_1p_2\cdots p_m$.

那么 $p^2 + p + 1$ 不能被 $p_1, p_2, \cdots, p_m$ 中的任何一个整除,因此它必有一个不同于 $p_1, p_2, \cdots, p_m$ 的素约数 $q$,于是有

$$p^2 + p + 1 = qy.$$

因此方程

$$x^2 + x + 1 = qy$$

对素数 $q$ 有解

$$x = p, \quad y = \frac{p^2 + p + 1}{q}.$$

数论卷

与假设方程只对有限个素数 $p_1, p_2, \cdots, p_m$ 有解矛盾. 所以对无穷多个素数 $p$, 方程 $x^2 + x + 1 = py$ 有整数解 $(x, y)$.

3·27　证明对一切整数 $n$, $n^2 + 2n + 12$ 不是 121 的倍数.

（第 3 届加拿大数学竞赛, 1971 年）

**[证]**　假设对某个整数 $n$, $n^2 + 2n + 12$ 是 121 的倍数, 则有

$$n^2 + 2n + 12 = 121k \quad (k \in Z).$$

即

$$(n + 1)^2 = 11(11k - 1).$$

因为 11 是素数, 并且是 $(n + 1)^2$ 的约数, 所以 11 是 $n + 1$ 的约数.

于是 $11^2$ 是 $(n + 1)^2$ 的约数, 从而有

$$11 \mid 11k - 1.$$

然而这是不可能的.

所以对一切整数 $n$, $n^2 + 2n + 12$ 不是 121 的倍数.

3·28　数列 $a_1, a_2, \cdots$, 按如下法则构造出来: $a_1 = 2$, 而对每个 $n \geqslant 2$, $a_n$ 等于 $a_1 a_2 \cdots a_{n-1} + 1$ 的最大素因数. 证明该数列中任何一项都不等于 5.

（前苏联教育部推荐试题, 1989 年）

**[证]**　由于 $a_1 = 2$, 则 $a_1 a_2 \cdots a_{n-1} + 1$ 一定是奇数, 其最大素因数也是奇数.

从而, 当 $n \geqslant 2$ 时, 所有 $a_n$ 都是奇数.

又

$$a_2 = 3.$$

假设对某个 $n \geqslant 3$, 有 $a_n = 5$.

即 5 是自然数 $A = a_1 a_2 \cdots a_{n-1} + 1$ 的最大素因数.

由于 $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, 显然

$$2 \nmid A, \quad 3 \nmid A.$$

再由 5 是 $A$ 的最大素因数, 则 5 是 $A$ 的惟一素因数. 于是,

$$A = 5^m (m \in N).$$

从而有

$$\begin{aligned} A - 1 &= 5^m - 1 \\ &= (5 - 1)(5^{m-1} + 5^{m-2} + \cdots + 1) \\ &= 4(5^{m-1} + 5^{m-2} + \cdots + 1). \end{aligned}$$

则

$$4 \mid A - 1.$$

于是 $4 \mid a_1a_2\cdots a_{n-1}, \quad 2 \mid a_2a_3\cdots a_{n-1}.$

然而 $a_2, a_3, \cdots, a_{n-1}$ 都是奇数,则

$$2 \nmid a_2a_3\cdots a_{n-1}.$$

出现矛盾.

所以对所有 $n \geqslant 3, \quad a_n \neq 5.$

又 $a_1 \neq 5, \quad a_2 \neq 5.$

于是数列 $\{a_n\}$ 中任何一项都不等于 5.

3·29 证明三个不同素数的立方根不可能是一个等差数列中的三项(不一定是连续的).

(第 2 届美国数学奥林匹克,1973 年)

[证] 设 $p, q, r$ 是不同的素数,且 $\sqrt[3]{p}, \sqrt[3]{q}, \sqrt[3]{r}$ 是一个等差数列中的三项.

假设
$$\sqrt[3]{p} = a,$$
$$\sqrt[3]{q} = a + md,$$
$$\sqrt[3]{r} = a + nd,$$

其中 $m, n$ 是正整数.

消去 $a, d$ 得

$$\frac{\sqrt[3]{q} - \sqrt[3]{p}}{\sqrt[3]{r} - \sqrt[3]{p}} = \frac{m}{n},$$

$$m\sqrt[3]{r} - n\sqrt[3]{q} = (m-n)\sqrt[3]{p}. \qquad ①$$

立方并展开得

$$m^3r - n^3q + 3mn\sqrt[3]{rq}(m\sqrt[3]{r} - n\sqrt[3]{q}) = (m-n)^3p.$$

把 ① 代入上式得

$$m^3r - n^3q - (m-n)^3p = -3mn(m-n)\sqrt[3]{pqr}. \qquad ②$$

因为 $p, q, r$ 均为素数,所以 $\sqrt[3]{pqr}$ 为无理数. 于是,② 式左边为有理数,右边为无理数,② 式不可能成立.

从而 $\sqrt[3]{p}, \sqrt[3]{q}, \sqrt[3]{r}$ 不可能是一个等差数列中的三项.

3·30 证明如果三个素数成等差数列,并且这个数列的公差不能被 6 整除,那么这个数列的最小数是 3.

(波兰数学竞赛,1963 年)

[证] 设素数 $p_1, p_2, p_3$ 组成等差数列,且公差为 $r$, $r > 0$, $r$ 不能

被 6 整除.

并设 $p_1 < p_2 < p_3$. 则

$$p_2 = p_1 + r, \quad p_3 = p_1 + 2r.$$

若 $p_1 = 2$, 则 $p_3 = 2 + 2r = 2(1 + r)$ 是合数.

因此 $p_1$ 不是偶素数, $p_1 \geqslant 3$.

从而 $p_1, p_2, p_3$ 都是奇素数, $r$ 为偶数.

由于 $r$ 不能被 6 整除, 则

$$r = 6k + 2 \quad 或 \quad r = 6k + 4.$$

其中 $k$ 是非负整数.

我们证明 3 能整除 $p_1$.

事实上, 如果 $p_1 = 3m + 1$($m$ 是自然数), 若 $r = 6k + 2$, 则 $p_2 = 3m + 1 + 6k + 2 = 3(m + 2k + 1)$ 是合数,

若 $r = 6k + 4$, 则 $p_3 = 3m + 1 + 12k + 8 = 3(m + 4k + 3)$ 是合数.

如果 $p_1 = 3m + 2$($m$ 是自然数), 若 $r = 6k + 2$, 则 $p_3 = 3m + 2 + 12k + 4 = 3(m + 4k + 2)$ 是合数.

若 $r = 6k + 4$, 则 $p_2 = 3m + 2 + 6k + 4 = 3(m + 2k + 2)$ 是合数.

于是 $p_1$ 一定能被 3 整除, 又 $p_1$ 是素数, 所以必有 $p_1 = 3$.

**3·31** 素数 $a_1, a_2, \cdots, a_p$ 构成递增的等差数列, 并且 $a_1 > p$. 证明如果 $p$ 也是素数, 则数列的公差可被 $p$ 整除.

(第 18 届莫斯科数学奥林匹克, 1955 年)

[证] 设公差为 $d$, 则

$$a_n = a_1 + (n - 1)d.$$

对每个 $a_i (i = 1, 2, \cdots, p)$, 考察以 $p$ 为模的余数, 由于 $a_i$ 是素数, 则这 $p$ 个 $a_i$ 被 $p$ 除的余数必有两个相同, 设

$$a_i \equiv a_j \pmod p,$$

则 $$|a_i - a_j| = |i - j| d \equiv 0 \pmod p.$$

由于 $$|i - j| < p,$$

则 $$p \mid d.$$

**3·32** 设 $p_n$ 是第 $n$ 个素数($p_1 = 2, p_2 = 3, \cdots$). 证明 $p_n \leqslant 2^{2^{n-1}}$.

（基辅数学奥林匹克，1981 年）

[证]　首先证明　$p_{k+1}\leqslant 1+p_1p_2\cdots p_k$.

首先素数 $p_1,p_2,\cdots,p_k$ 不可能整除

$$q=1+p_1p_2\cdots p_k.$$

事实上，若 $p_i\mid q$，则 $p_i\mid 1$，这是不可能的.

于是 $q$ 或者是素数，但它不同于 $p_1,p_2,\cdots,p_k$，于是 $p_{k+1}\leqslant q$，或者 $q$ 是合数，则 $q$ 必有一个不同于 $p_1,p_2,\cdots,p_k$ 的素约数，于是又有 $p_{k+1}\leqslant q$.

下面用数学归纳法证明本题.

(1) 当 $n=1$ 时，

$$p_1=2\leqslant 2^{2^{1-1}}$$

是显然的.

所以 $n=1$ 时，不等式成立.

(2) 假设对 $n\leqslant k$，不等式成立，

则 $n=k+1$ 时，有

$$\begin{aligned}p_{k+1}&\leqslant 1+p_1p_2\cdots p_k\\&\leqslant 1+\prod_{i=1}^{k}2^{2^{i-1}}\\&=1+2^{\sum_{i=1}^{k}2^{i-1}}\\&=1+2^{2^k-1}\\&<2^{2^k}.\end{aligned}$$

于是 $n=k+1$ 时，不等式成立.

由(1)，(2)，对所有自然数 $n$，总有

$$p_n\leqslant 2^{2^{n-1}}.$$

3·33　如果素数 $p,q$ 满足关系式 $3p+5q=31$，那么 $\log_2\frac{p}{3q+1}$ 的值是多少？

（中国初中数学联赛，1988 年）

[解]　由已知等式可知，$3p$ 和 $5q$ 中必有一个是偶数，而另一个是奇数.

若 $3p$ 是偶数,则只有 $p=2$,从而 $q=5$.这时

$$\log_2\frac{p}{3q+1}=\log_2\frac{2}{3\cdot5+1}=\log_2\frac{1}{8}=-3;$$

若 $5q$ 是偶数,则只有 $q=2$,从而 $p=7$,这时

$$\log_2\frac{p}{3\cdot q+1}=\log_2 1=0,$$

所以

$$\log_2\frac{p}{3q+1}=-3\text{ 或 }0.$$

3·34 设 $p$ 与 $q$ 为自然数,满足

$$\frac{p}{q}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}.$$

求证 $p$ 可被 1979 整除.

(第 21 届国际数学奥林匹克,1979 年)

[证] 因为

$$\begin{aligned}\frac{p}{q}&=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}\\&=\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{1319}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{1318}\right)\\&=\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{1319}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{659}\right)\\&=\frac{1}{660}+\frac{1}{661}+\cdots+\frac{1}{1319}\\&=\left(\frac{1}{660}+\frac{1}{1319}\right)+\left(\frac{1}{661}+\frac{1}{1318}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{989}+\frac{1}{990}\right)\\&=1979\cdot\left(\frac{1}{660\cdot1319}+\frac{1}{661\cdot1318}+\cdots+\frac{1}{989\cdot990}\right),\end{aligned}$$

$$1319!\cdot\frac{p}{q}=1979\cdot1319!\left(\frac{1}{660\cdot1319}+\cdots+\frac{1}{989\cdot990}\right).$$

显然,$1319!\left(\frac{1}{660\cdot1319}+\cdots+\frac{1}{989\cdot990}\right)$是整数,所以 $1319!\cdot\frac{p}{q}$ 能被 1979 整除,从而 $1319!\cdot p$ 能被 1979 整除.

可以验证,1979 是素数,所以 1319!不能被 1979 整除,于是 $p$ 能被 1979 整除.

3·35 对分数$\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{p-2},\frac{1}{p-1}$通分并求和.证明如果

$p$ 是大于 2 的素数,那么所得和数的分子可以被 $p$ 整除.

(第 12 届全俄数学奥林匹克,1986 年)

[证] 因为 $p$ 是大于 2 的素数,所以 $p$ 是奇数,$p-1$ 为偶数.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{p-2}+\frac{1}{p-1}\\
&=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{p-1}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{p-2}\right)+\cdots\\
&\quad+\left(\frac{1}{\frac{p-1}{2}}+\frac{1}{\frac{p+1}{2}}\right)\\
&=\frac{p}{1\cdot(p-1)}+\frac{p}{2(p-2)}+\cdots+\frac{p}{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p+1}{2}}\\
&=\frac{p\cdot\frac{p-1}{2}}{1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot(p-2)(p-1)},\\
&=\frac{p}{2(p-2)!}
\end{aligned}$$

由于 $p$ 是素数,则 $(p,(p-2)!)=1$. 即分子 $p$ 与分母 $(p-2)!$ 不可约,所以分子可以被 $p$ 整除.

3·36 已知 $n$ 是不小于 3 的正整数,正整数

$$x_1<x_2<\cdots<x_n<2x_1,\quad p=x_1x_2\cdots x_n.$$

证明若 $r$ 是素数,$k$ 为正整数,并且 $r^k\mid p$,则 $\frac{p}{r^k}\geqslant n!$.

(第 26 届国际数学奥林匹克候选题,1985 年)

[证] 由 $r$ 是素数,且 $r^k\mid p$.

则存在整数 $k_i\geqslant0,\quad i=1,2,\cdots,n$,使得

$$r^{k_i}\mid x_i,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

并且

$$k_1+k_2+\cdots+k_n=k.$$

令 $y_i=\frac{x_i}{r^{k_i}}$, 则 $y_i$ 是正整数, $i=1,2,\cdots,n$.

由于

$$x_1<x_2<\cdots<x_n<2x_1,$$

则所有的 $y_i$ 各不相同 $(i=1,2,\cdots,n)$.

而 $n$ 个互不相同的正整数之积不小于 $n!$,所以

$$\frac{p}{r^k}=y_1y_2\cdots y_n\geqslant n!.$$



3·37　证明存在无穷多个这样的自然数，它们不论对怎样的素数 $p$ 以及怎样的自然数 $n$ 和 $k$，都不能表示成 $p+n^{2k}$ 的形式.

（第23届莫斯科数学奥林匹克，1960年）

［证］　我们证明：在完全平方数的集合中，就有无穷多个符合题目条件的自然数.

事实上，如果

$$m^2=p+n^{2k},$$

则 $$p=(m-n^k)(m+n^k).$$

由于 $p$ 是素数，则必有

$$\begin{cases}m-n^k=1,\\ m+n^k=p.\end{cases}$$

于是　　$p=2n^k+1,\quad m=n^k+1.$

显然有无穷多对 $(n,k)$，使 $p$ 不是素数，这时，$m^2=(n^k+1)^2$ 就不能表示成 $p+n^{2k}$ 的形式.

3·38　设 $p$ 为奇素数，且

$$(1+x)^{p-2}=1+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{p-2}x^{p-2}.$$

证明 $a_1+2,\quad a_2-3,\quad a_3+4,\quad \cdots,\quad a_{p-3}-(p-2),\quad a_{p-2}+(p-1)$ 都是 $p$ 的倍数.

（加拿大数学奥林匹克训练题，1988年）

［证］

$$\begin{aligned}&a_k+(-1)^{k-1}(k+1)\\=&C_{p-2}^k+(-1)^{k-1}(k+1)\\=&\frac{(p-2)(p-3)\cdots(p-k-1)}{k!}+(-1)^{k-1}(k+1)\\=&\frac{(p-2)(p-3)\cdots(p-k-1)+(-1)^{k-1}(k+1)!}{k!},\end{aligned}$$

所以有

$$\begin{aligned}&k![a_k+(-1)^{k-1}(k+1)]\\=&(p-2)(p-3)\cdots(p-k-1)+(-1)^{k-1}(k+1)!\\=&pg(p)+(-1)^k(k+1)!+(-1)^{k-1}(k+1)!\\=&pg(p).\end{aligned}$$

（其中 $g(p)$ 是 $p$ 的整多项式）

由于 $p$ 是素数,在 $1 \leqslant k \leqslant p-2$ 时,$k!$不能被 $p$ 整除,因而 $a_k + (-1)^{k-1}(k+1)$ 是 $p$ 的倍数($k = 1,2,\cdots,p-2$).

3·39　证明对每个素数 $p$,有无穷多个正整数 $n$,使得 $p$ 整除 $2^n - n$.

(第 15 届加拿大数学竞赛,1983 年)

[证 1]　(1) 若 $p = 2$,则只要 $n$ 是正偶数就有 $p = 2 \mid 2^n - n$.

(2) 若 $p$ 是奇素数.

我们首先证明:组合数 $C_p^i$,当 $p$ 是奇素数时,是 $p$ 的倍数($i = 1, 2,\cdots,p-1$).

事实上,因为

$$C_p^i = \frac{p(p-1)\cdots(p-i+1)}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot i} \qquad (i = 1,2,\cdots,p-1)$$

是整数,而由于 $p$ 是素数,且 $i < p$,则 $i!$与 $p$ 互素,则 $C_p^i$ 是 $p$ 的倍数.

下面用记号 $M(x)$ 表示 $x$ 的倍数.

由于
$$2^p = 1 + \sum_{i=1}^{p-1} C_p^i + 1,$$
所以有
$$2^p = 2 + M(p),$$
即
$$2(2^{p-1} - 1) = M(p).$$

因为 2 与 $p$ 互素,则有

$$2^{p-1} - 1 = M(p).$$

于是必有最小的正整数 $d$,使

$$2^d - 1 = M(p).$$

设 $2,2^2,2^3,\cdots,2^d$ 被 $p$ 除的余数依次是

$$r_1, r_2, \cdots, r_d = 1. \qquad ①$$

可以证明,这些余数都不相同.

事实上,若 $r_j = r_k(j < k)$,则有

$$2^k - 2^j = r_k - r_j + M(p),$$
即
$$2^j(2^{k-j} - 1) = M(p).$$

再由 $2^j$ 与 $p$ 互素得

$$2^{k-j} - 1 = M(p),$$

而 $k - j < d$,与 $d$ 的最小性相矛盾.

于是,若 $d = p-1$,则余数列 ① 就是小于 $p$ 的一切正整数.

若 $d < p-1$,则有小于 $p$ 而不在 ① 中的正整数 $r'$.

考虑数列 $r'r_1, r'r_2, \cdots, r'r_d$. 设它们被 $p$ 除的余数依次是

$$r'_1, r'_2, \cdots, r'_d. \qquad ②$$

容易证明,② 中的这些数都不相同,且都不在 ① 中.

如果还有小于 $p$ 而不在 ① 和 ② 中的正整数,仿上又可得另外 $d$ 个小于 $p$ 的正整数.

由于比 $p$ 小的正整数共有 $p-1$ 个,则 $p-1$ 是 $d$ 的倍数,即

$$p-1 = M(d). \qquad ③$$

现可设
$$n = dq + r (0 \leqslant r < d). \qquad ④$$

于是
$$\begin{aligned} 2^n - n &= 2^{dq+r} - (dq+r) \\ &= 2^r(2^d)^q - dq - r \\ &= [1+M(p)]^q 2^r - dq - r \\ &= 2^r - dq - r + M(p). \end{aligned}$$

由此可见,$2^n - n = M(p)$ 的充要条件是存在整数 $m$,使

$$2^r - dq - r = mp. \qquad ⑤$$

由 ③ 可知,$p$ 与 $d$ 互素. 故存在整数 $m_0$ 与 $q_0$,使得 $dq_0 - pm_0 = 1$,

即
$$1 - dq_0 = -pm_0.$$
$$(2^r - r) - dq_0(2^r - r) = -pm_0(2^r - r).$$

并且对任何整数 $s$ 有

$$(2^r - r) - d[q_0(2^r - r) + ps] = -p[m_0(2^r - r) + ds].$$

与 ⑤ 式比较可得

$$q = q_0(2^r - r) + ps,$$
$$m = -m_0(2^r - r) - ds.$$

由 ④ 得 $\quad n = d[q_0(2^r - r) + ps] + r.$

因此,对充分大的整数 $s$,上式的 $n$ 都是正整数,并且

$$2^n - n = M(p).$$

即
$$p \mid 2^n - n.$$

由(1),(2),对每个素数 $p$,都有无穷多个正整数 $n$,使得 $p$ 整除 $2^n - n$.

**[证 2]** (1)若 $p = 2$,则只要取 $n$ 为正偶数就有 $2 = p \mid 2^n - n$.

(2) 若 $p$ 是奇素数,取 $n=(p-1)(kp-1), k\in N$.

则由费马小定理有

$$2^{p-1}\equiv 1 \pmod p,$$

从而

$$\begin{aligned}2^n-n&=2^{(p-1)(kp-1)}-(p-1)(kp-1)\\&\equiv 1-1\\&\equiv 0 \pmod p.\end{aligned}$$

即 $$p\mid 2^n-n.$$

从而命题得证.

3·40 求证存在无限多具有下述性质的正整数 $n$:如果 $p$ 是 $n^2+3$ 的一个素因子,则有某个满足 $k^2<n$ 的整数 $k$,使 $p$ 也是 $k^2+3$ 的一个素因子.

(第 42 届美国普特南数学竞赛,1981 年)

[证] 令 $f(x)=x^2+3$,则

$$\begin{aligned}f(x)f(x+1)&=(x^2+3)[(x+1)^2+3]\\&=x^2(x+1)^2+3x^2+3(x+1)^2+6+3\\&=x^2(x+1)^2+6x(x+1)+9+3\\&=(x^2+x+3)^2+3\\&=f(x^2+x+3).\end{aligned} \qquad ①$$

对任何非负整数 $m$,令

$$n=(m^2+m+2)^2+(m^2+m+2)+3. \qquad ②$$

则由 ① 得

$$\begin{aligned}f(n)&=f(m^2+m+2)\cdot f(m^2+m+3)\\&=f(m^2+m+2)f(m)f(m+1).\end{aligned}$$

因此,如果 $p$ 是 $f(n)=n^2+3$ 的一个素因子,则也必是 $f(k)=k^2+3$ 的一个素因子,其中 $k$ 等于 $m^2+m+2$,或 $m$,或 $m+1$,并且

$$k^2\leqslant(m^2+m+2)^2<n.$$

于是,形如 ② 的一切正整数 $n$,都有命题所要求的性质.

3·41 证明大于 1 的自然数 $n$ 是素数的充要条件是:对于每一个适合 $1\leqslant k\leqslant n-1$ 的自然数 $k$,二项式系数 $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ 能被 $n$ 整除.

（波兰数学竞赛，1969 年）

［证］ 由 $C_n^k$ 的表达式可得

$$n! = C_n^k k!(n-k)!,$$

即 $$n(n-1)\cdots(n-k+1) = C_n^k k!. \qquad ①$$

如果 $n$ 是素数，且 $1 \leqslant k \leqslant n-1$，则 $1,2,\cdots,k$ 都不能被 $n$ 整除，而 ① 式的左边 $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ 能被 $n$ 整除，所以 $C_n^k$ 能被 $n$ 整除.

反之，如果 $C_n^k$ 能被 $n$ 整除，则有

$$C_n^k = ns,$$

其中 $s$ 是一个自然数.

于是由 ① 式得

$$(n-1)(n-2)\cdots[n-(k-1)] = sk!. \qquad ②$$

如果 $n$ 是合数，$p$ 是 $n$ 的一个素约数，则 $p$ 不能整除 $1,2,\cdots,p-1$，因而 $p$ 也不能整除 $n-1,\quad n-2,\quad \cdots,\quad n-(p-1)$.

于是在等式 ② 中，若令 $k=p$，则 $p$ 不能整除 ② 式的左边，而 $p$ 能整除 ② 式的右边 $sp!$，出现了矛盾，这就是说，如果 $p$ 是 $n$ 的素约数，且 $p < n$，则 $n$ 不能整除 $C_n^p$，于是 $n$ 是素数.

3·42 试求所有的自然数 $n$，使得由 $n-1$ 个数码 1 和 1 个数码 7 构成的每一个十进制表示的自然数，都是素数.

（第 31 届国际数学奥林匹克预选题，1990 年）

［解］ 由 $n-1$ 个 1 和 1 个 7 组成的自然数 $N$ 可表示为

$$N = A_n + 6 \cdot 10^k,$$

其中 $A_n$ 是由 $n$ 个 1 组成的自然数，$0 \leqslant k < n$.

当 $3 \mid n$ 时，$A_n$ 的各数码之和可被 3 整除，

所以 $$3 \mid A_n.$$

从而 $$3 \mid N.$$

又因为 $N > 3$，所以 $N$ 不是素数.

现考虑 $3 \nmid n$ 的情况.

由费马小定理得

$$(10^6)^t \equiv 1 \pmod 7,$$

$$10^{6t} \equiv 1 \pmod 7.$$

于是 $$A_{6t+s} \equiv A_{6t} + A_s \cdot 10^{6t}$$
$$\equiv A_{6t} + A_s \pmod 7.$$

注意到

$$10^0 \equiv 1 \pmod 7, \quad 10^1 \equiv 3 \pmod 7,$$
$$10^2 \equiv 2 \pmod 7, \quad 10^3 \equiv 6 \pmod 7,$$
$$10^4 \equiv 4 \pmod 7, \quad 10^5 \equiv 5 \pmod 7.$$

又因为

$$A_1 \equiv 1 \pmod 7, \quad A_2 \equiv 4 \pmod 7,$$
$$A_3 \equiv 6 \pmod 7, \quad A_4 \equiv 5 \pmod 7,$$
$$A_5 \equiv 2 \pmod 7, \quad A_6 \equiv 0 \pmod 7.$$

所以,当且仅当 $6 \mid n$ 时,

$$A_n \equiv 0 \pmod 7.$$

于是,$6 \nmid n$ 时,

$$A_n \equiv r \not\equiv 0 \pmod 7.$$

因此,当 $6 \nmid n$ 时,必存在一个 $k, 0 < k \leqslant 5$,
使得 $6 \cdot 10^k \equiv 7 - r \pmod 7$.

从而,当 $6 \nmid n$,且 $n > 6$ 时有

$$N = A_n + 6 \cdot 10^k$$
$$\equiv r + (7 - r)$$
$$\equiv 0 \pmod 7.$$

此时,$N$ 不是素数.

最后考虑 $n = 1,2,4,5$ 时的情形.

$n = 1$ 时, $N = 7$ 是素数;

$n = 2$ 时, $N = 17,71$ 是素数;

$n = 4$ 时, 有 $1711 = 29 \cdot 59$ 不是素数;

$n = 5$ 时, 有 $11711 = 11111 + 6 \cdot 10^2 \equiv 0 \pmod 7$,即 $11711 = 7 \cdot 1673$ 不是素数.

所以满足本题要求的只有 $n = 1,2$.

3·43 已知 $k, m, n$ 是正整数,$m + k + 1$ 是大于 $n + 1$ 的素数,记 $c_s = s(s + 1)$.求证

$$(c_{m+1} - c_k)(c_{m+2} - c_k)\cdots(c_{m+n} - c_k) \qquad ①$$

能被 $c_1c_2\cdots c_n$ 整除.

（第 9 届国际数学奥林匹克，1967 年）



**［证］** (1) 当 $m+1\leqslant k\leqslant m+n$ 时，必有一正整数 $i(1\leqslant i\leqslant n)$，使 $m+i=k$，则乘积

$$(c_{m+1}-c_k)(c_{m+2}-c_k)\cdots(c_{m+i}-c_k)\cdots(c_{m+n}-c_k)$$

中有一个因子为零，从而乘积为零，结论显然成立.

(2) 当 $m+1>k$ 时，乘积中所有的因子都是正数.

由已知条件，有

$$c_p-c_q=p(p+1)-q(q+1)=(p-q)(p+q+1).$$

于是 ① 式化为

$$\begin{aligned}&(c_{m+1}-c_k)(c_{m+2}-c_k)\cdots(c_{m+n}-c_k)\\&=(m+1-k)(m+1+k+1)(m+2-k)(m+2+k+1)\cdots(m\\&\quad+n-k)(m+n+k+1)\\&=[(m-k+1)(m-k+2)\cdots(m-k+n)][(m+k+1+1)(m\\&\quad+k+1+2)\cdots(m+k+1+n)]\\&=\frac{(m+n-k)!}{(m-k)!}\cdot\frac{(m+k+1+n)!}{(m+k+1)!}.\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}&c_1c_2\cdots c_n\\&=(1\cdot 2)(2\cdot 3)\cdots[n(n+1)]\\&=(1\cdot 2\cdots n)[2\cdot 3\cdots(n+1)]\\&=n!\cdot(n+1)!,\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}&\frac{(c_{m+1}-c_k)(c_{m+2}-c_k)\cdots(c_{m+n}-c_k)}{c_1c_2\cdots c_n}\\&=\frac{(m+n-k)!}{(m-k)!n!}\cdot\frac{(m+k+1+n)!}{(m+k+1)!(n+1)!}\\&=C_{m+n-k}^{n}\cdot\frac{(m+k+1+n)!}{(m+k+1)!(n+1)!}.\end{aligned}$$

因为 $C_{m+n-k}^{n}$ 是整数，所以我们只要证明：在 $m+k+1$ 是大于 $n+1$ 的素数的条件下，

$$\frac{(m+k+1+n)!}{(m+k+1)!(n+1)!}$$

是整数就可以了.

$$\begin{aligned}&\frac{(m+k+1+n)!}{(m+k+1)!(n+1)!}\\=&\frac{(m+k+1+n)!}{(m+k)!(n+1)!}\cdot\frac{1}{m+k+1}\\=&C_{m+n+k+1}^{n+1}\cdot\frac{1}{m+k+1}.\end{aligned}$$

我们只要证明 $C_{m+n+k+1}^{n+1}$ 能被 $m+k+1$ 整除就可以了.

事实上,在$(m+n+k+1)!$中,$m+k+1$是它的一个因子,而$m+k+1$是大于$n+1$的素数,则在$(n+1)!$及$(m+k)!$中均不含有$m+k+1$这个因子,所以当$(m+n+k+1)!$被$(n+1)!(m+k)!$除时,不能约掉$m+k+1$,因而$C_{m+n+k+1}^{n+1}$能被$m+k+1$整除.

因此,$\frac{(m+n+k+1)!}{(m+k+1)!(n+1)!}$是整数.

于是,当乘积①的各因子都是正数时,乘积①能被$c_1c_2\cdots c_n$整除.

(3) 当$m+n<k$时,乘积①的各因子都是负数.同样可以证明乘积①能被$c_1c_2\cdots c_n$整除.

由(1),(2),(3)可得,乘积①一定能被$c_1c_2\cdots c_n$整除.

3·44　设$p$为素数,$J$为$2\times 2$矩阵$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$,其元素属于集合$\{0,1,2,\cdots,p-1\}$,且满足下列两个同余式:

$$a+d\equiv 1\quad(\bmod p),\qquad ①$$

$$ad-bc\equiv 0\quad(\bmod p).\qquad ②$$

试确定矩阵$J$的个数.

(第29届美国普特南数学竞赛,1968年)

[解]　由同余式①,若$a=0$,则$d=1$;若$a=1$,则$d=0$.在这两种情况下都有$bc=0$,即

$$b=0\quad 或\quad c=0.$$

当$b=0$时,　$c=0,1,2,\cdots,p-1$,

当$c=0$时,　$b=1,2,\cdots,p-1$.

这时,求得的$J$有$2(p+p-1)=4p-2$个解.

若$a\neq 0$或1,即若

$$a=2,3,4,\cdots,p-2,p-1,$$

则对应的 $d$ 等于(由 ① 式)

$$d = p-1,\quad p-2,\quad p-3,\quad \cdots,\quad 3,\quad 2.$$

这时 $\qquad ad \not\equiv 0 \pmod p$.

为使 ② 式成立,即

$$bc \equiv ad \pmod p,$$

我们可以取 $\qquad b = 1,2,\cdots,p-1$.

(注意到 $bc \not\equiv 0 \pmod p$),而 $c$ 的取值随之可惟一确定,由 $a$ 的取法有 $p-2$ 种,$b$ 的取法有 $p-1$ 种,这时,求得的 $J$ 有 $(p-2)(p-1)$ 种.

于是可确定 $J$ 的个数为

$$4p-2+(p-2)(p-1) = p^2+p.$$

3·45　已知 $n \geqslant 2$,且对 $0 \leqslant k \leqslant \sqrt{\frac{n}{3}}$, $k^2+k+n$ 是素数,求证对 $0 \leqslant k \leqslant n-2$, $k^2+k+n$ 也是素数.

(第 28 届国际数学奥林匹克,1987 年)

[证 1]　假设对所有的 $k$, $0 \leqslant k \leqslant n-2$, $k^2+k+n$ 不都是素数,即存在一些 $k$, $0 \leqslant k \leqslant n-2$,使得 $k^2+k+n$ 是合数.

设 $k_0$ 是使得 $k^2+k+n$ 是合数的最小的 $k$,则 $k_0 \leqslant n-2$, $k_0^2+k_0+n$ 是合数.

再设 $q$ 是 $k_0^2+k_0+n$ 的最小素因子,则

$$q^2 \leqslant k_0^2+k_0+n.$$

我们首先证明 $q > 2k_0$.

若 $q \leqslant 2k_0$,考虑差

$$(k_0^2+k_0+n)-(k^2+k+n) = (k_0-k)(k_0+k+1).$$

取 $k = 0,1,2,\cdots,k_0-1$,则由 $k_0$ 的规定,$k^2+k+n$ 为素数.

此时,$k_0-k = 1,2,\cdots,k_0$, $k_0+k+1 = k_0+1,k_0+2,\cdots,2k_0$.

于是 $k_0-k$ 与 $k_0+k+1$ 遍取 $1,2,\cdots,2k_0$ 诸数,由于 $q \leqslant 2k_0$,则存在一个 $k$,使得

$$q \mid (k_0-k)(k_0+k+1). \qquad ①$$

又因为 $\quad q \mid k_0^2+k_0+n$,则

$$q \mid k^2+k+n.$$

鉴于 $k^2+k+n$ 是素数,则有 $q=k^2+k+n$.

由于 $\quad k_0-k\leqslant k_0\leqslant n-2<n+k+k^2=q,$

$$k_0+k+1\leqslant(n-2)+k+1=n+k-1<n+k+k^2=q,$$

所以 $\qquad q\nmid(k_0-k)(k_0+k+1).\qquad\qquad ②$

① 与 ② 矛盾.

因此, $\quad q>2k_0,\quad$ 即 $q\geqslant 2k_0+1$.

由于 $k_0^2+k_0+n\geqslant q^2\geqslant(2k_0+1)^2=4k_0^2+4k_0+1$,即

$$3k_0^2\leqslant n-1-3k_0\leqslant n-1<n,$$

$$k_0<\sqrt{\frac{n}{3}}.$$

由已知条件,当 $k_0<\sqrt{\frac{n}{3}}$ 时,$k_0^2+k_0+n$ 是素数,与 $k_0^2+k_0+n$ 为合数矛盾.

因此,这样的 $k_0$ 不存在,即对 $k=0,1,2,\cdots,n-2,\quad k^2+k+n$ 都是素数.

[证 2] 假设存在一些 $k,\quad 0\leqslant k\leqslant n-2$,使得 $k^2+k+n$ 不是素数,由 $n\geqslant 2$,则 $k^2+k+n$ 为合数.

设 $k_0$ 是使得 $k^2+k+n$ 为合数的最小的 $k$,即 $k_0^2+k_0+n$ 为其中的最小的合数.

又设 $q$ 是 $k_0^2+k_0+n$ 的最小素因子.

(1) 若 $q\leqslant k_0$,则可设 $k_0=q+b(b\geqslant 0)$. 于是

$$\begin{aligned}&k_0^2+k_0+n\\&=(q+b)^2+(q+b)+n\\&=q(q+2b+1)+(b^2+b+n).\end{aligned}$$

由于 $b<k_0$,则

$$b^2+b+n<k_0^2+k_0+n,$$

由 $k_0$ 的假设,$b^2+b+n$ 是素数.

又由于

$$q\mid k_0^2+k_0+n,\quad q\mid q(q+2b+1),$$

则 $$q\mid b^2+b+n,$$

所以必有 $$q=b^2+b+n.$$

第三章 素数与合数

此时有 $$q=b^2+b+n>n-2,$$
而 $q\leqslant k_0<n-2$,出现矛盾.

(2) 若 $q>k_0$,则可设 $q=k_0+b$,于是

$$\begin{aligned}&k_0^2+k_0+n\\=&(q-b)^2+(q-b)+n\\=&q(q-2b+1)+(b-1)^2+(b-1)+n.\end{aligned}$$

当 $b-1<k_0$ 时,由

$$b-1<k_0\leqslant n-2,$$

可知 $(b-1)^2+(b-1)+n$ 是素数.

所以有 $(b-1)^2+(b-1)+n=q$.

于是 $$\begin{aligned}q^2&\leqslant k_0^2+k_0+n\\&=q(q-2b+1)+q\\&=q^2-2bq+2q,\end{aligned}$$

从而 $$b\leqslant 1.$$

于是只能有 $b=1$,即 $q=n$ 是素数.

又由 $$q=k_0+b=k_0+1=n$$

而 $$k_0+1\leqslant n-2+1=n-1.$$

于是 $$n\leqslant n-1.$$

导致矛盾.

因此只能有 $b-1\geqslant k_0$,即

$$b\geqslant k_0+1.$$

$$q=k_0+b\geqslant 2k_0+1.$$

于是 $$(2k_0+1)^2\leqslant q^2\leqslant k_0^2+k_0+n,$$

$$4k_0^2+4k_0+1\leqslant k_0^2+k_0+n,$$

$$n\geqslant 3k_0^2+3k_0+1>3k_0^2,$$

$$k_0<\sqrt{\frac{n}{3}}.$$

然而由已知,当 $k_0<\sqrt{\frac{n}{3}}$ 时,$k_0^2+k_0+n$ 是素数,与 $k_0^2+k_0+n$ 是合数矛盾.

由以上,当 $0\leqslant k_0\leqslant n-2$ 时,$k_0^2+k_0+n$ 都是素数,从而命题得证.

3·46　任给素数 $p$. 试证存在整数 $x_0$,使得 $p \mid (x_0^2 - x_0 + 3)$ 的充分必要条件为存在整数 $y_0$,使得 $p \mid (y_0^2 - y_0 + 25)$.

（中国国家集训队选拔试题,1992 年）

**[证 1]**　易知 $x_0^2 - x_0 + 3$ 和 $y_0^2 - y_0 + 25$ 都是奇数,从而不妨设 $p$ 为奇素数. 于是

$$p \mid (x_0^2 - x_0 + 3) \Longleftrightarrow p \mid 4(x_0^2 - x_0 + 3) \Longleftrightarrow p \mid (2x_0 - 1)^2 + 11,$$

$$p \mid (y_0^2 - y + 25) \Longleftrightarrow p \mid 4(y_0^2 - y_0 + 25) \Longleftrightarrow p \mid (2y_0 - 1)^2 + 3^2 \cdot 11.$$

于是只须证明:存在 $x_0$,使得 $p \mid (2x_0 - 1)^2 + 11$ 的充要条件是存在 $y_0$,使得 $p \mid (2y_0 - 1)^2 + 3^2 \cdot 11$.

(1) 若存在 $x_0$ 使 $p \mid (2x_0 - 1)^2 + 11$,则

$$p \mid 3^2(2x_0 - 1)^2 + 3^2 \cdot 11,$$

即

$$p \mid [2(3x_0 - 1) - 1]^2 + 3^2 \cdot 11.$$

只须取 $y_0 = 3x_0 - 1$,就有 $p \mid (2y_0 - 1)^2 + 3^2 \cdot 11$.

(2) 若存在 $y_0$,使得 $p \mid (2y_0 - 1)^2 + 3^2 \cdot 11$.

当 $p = 3$ 时,只须取 $x_0 = 1$,即有

$$p \mid (2 \cdot 1 - 1)^2 + 11 = 12.$$

当 $p > 3$ 时,因为 $(p,3) = 1$,所以存在整数 $a$ 和 $b$,使得

$$ap + 3b = 1.$$

由此对任意整数 $k$,有

$$(a - 3k)p + 3(b + pk) = 1.$$

所以存在 $a_1$ 和 $b_1$,使得

$$a_1 p + 3b_1 = 1, \quad ①$$

且 $b_1$ 为奇数,$(p, b_1) = 1$.

由

$$p \mid (2y_0 - 1)^2 + 3^2 \cdot 11,$$

得

$$p \mid b_1^2[(2y_0 - 1)^2 + 3^2 \cdot 11].$$

即

$$p \mid (2b_1 y_0 - b_1)^2 + (3b_1)^2 \cdot 11. \quad ②$$

由 ① 有

$$(3b_1)^2 \cdot 11 = (1 - a_1 p)^2 \cdot 11 \equiv 11 \pmod p.$$

所以由②有

$$p \mid (2b_1y_0 - b_1)^2 + 11.$$

由 $b_1$ 是奇数,可令 $b_1 = 2m + 1$,则

$2b_1y_0 - b_1 = 2(2m+1)y_0 - 2m - 1 = 2[(2m+1)y_0 - m] - 1.$

取 $x_0 = (2m+1)y_0 - m$ 就有 $p \mid (2x_0 - 1)^2 + 11.$

于是命题得证.

**[证 2]** 令 $f(x) = x^2 - x + 3,\quad g(y) = y^2 - y + 25.$

首先,由于对任意整数 $x_0$ 和 $y_0$,$f(x_0)$ 和 $g(y_0)$ 均为奇数,可知素数 2 不具有所述性质,从而 $p \neq 2$.

当 $x_0 = 3, y_0 = 2$ 时,有

$$x_0^2 - x_0 + 3 = 9,\quad y_0^2 - y_0 + 25 = 27,$$

因而 $$3 \mid (x_0^2 - x_0 + 3),\quad 3 \mid (y_0^2 - y_0 + 25).$$

所以对于 $p = 3$ 结论成立.

下设素数 $p \geqslant 5$. 由于

$$\begin{aligned} 3^2 f(x) &= 9x^2 - 9x + 27 \\ &= (3x-1)^2 - (3x-1) + 25 \\ &= g(3x-1). \end{aligned}$$

因此,若存在整数 $x_0$,使 $p \mid f(x_0)$,只要令 $y_0 = 3x_0 - 1$,就有 $p \mid g(3x_0 - 1)$,亦即 $p \mid g(y_0)$.

反之,若存在整数 $y_0$,使 $p \mid g(y_0)$,则对任意整数 $k$,有 $p \mid g(y_0 + kp)$.

这是因为

$$\begin{aligned} g(y_0 + kp) &= (y_0 + kp)^2 - (y_0 + kp) + 25 \\ &= (y_0^2 - y_0 + 25) + 2y_0kp - kp + k^2p^2 \\ &\equiv g(y_0) \pmod p. \end{aligned}$$

又由于$(p,3) = 1$,故可取 $k \in \{0,1,2\}$,使

$$y_0 + kp \equiv 2 \pmod 3.$$

于是只要取 $3x_0 - 1 = y_0 + kp$,就有

$$x_0 = \frac{1}{3}(y_0 + kp + 1)$$

为整数.

由于 $g(y_0+kp)=g(3x_0-1)=3^2f(x_0)$,

及 $$p \mid g(y_0+kp),$$

可知 $$p \mid 3^2f(x_0).$$

又由于 $p$ 是 $\geqslant 5$ 的素数,$(p,3^2)=1$,于是

$$p \mid f(x_0).$$

3·47 $n>3$ 是一个整数,从集合 $\{2,3,\cdots,n\}$ 中取三个数,用括号、加号和乘号把它们连接起来,考虑所有可能的组合.

(1) 证明如果我们选出的三个数都大于 $\frac{n}{2}$,则这三个数所有可能的组合所得的数都不相同.

(2) 设 $p$ 是一个素数,$p\leqslant\sqrt{n}$,证明:选三个数,最小的数是 $p$,并且这三个数的所有可能的组合得到的数不是全不相等的选取方法数恰好等于 $p-1$ 的正因子数.

(亚洲太平洋地区数学竞赛,1992 年)

**[证]** (1) 设 $a,b,c$ 是从 $\{2,3,\cdots,n\}$ 中选出的三个数,且 $2\leqslant a<b<c\leqslant n$,则所有可能的组合是

$$a+b+c,\quad ab+c,\quad ac+b,\quad bc+a,$$
$$a(b+c),\quad b(a+c),\quad c(a+b),\quad abc.$$

由于
$$(ab+c)-(a+b+c)=(a-1)(b-1)-1>0,$$
$$(ac+b)-(ab+c)=(a-1)(c-b)>0,$$
$$(bc+a)-(ac+b)=(c-1)(b-a)>0,$$
$$b(a+c)-a(b+c)=(b-a)c>0,$$
$$c(a+b)-b(a+c)=(c-b)a>0,$$
$$abc-c(a+b)=c[(a-1)(b-1)-1]>0$$

所以有
$$a+b+c<ab+c<ac+b<bc+a,$$
$$a(b+c)<b(a+c)<c(a+b)<abc.$$

又因为
$$a(b+c)-(ac+b)=b(a-1)>0,$$
$$b(a+c)-(bc+a)=a(b-1)>0,$$

所以又有
$$a(b+c)>ac+b,\quad b(a+c)>bc+a.$$

因此,如果在所有的组合中有可能相等的数,只有 $bc+a$ 与 $a(b+c)$ 有相等的可能.

若
$$bc+a=a(b+c),$$
则
$$c(b-a)=a(b-1).$$

因为 $a>\frac{n}{2}$，则

$$c(b-a)>\frac{n}{2}(b-1)\geqslant\frac{c}{2}(b-1),$$

从而有
$$2(b-a)>b-1,$$
$$b>2a-1>n-1.$$

因为 $b>n-1,\quad c>b$，则 $c>n$，与 $c\leqslant n$ 矛盾.

所以 $bc+a$ 与 $a(b+c)$ 不相等.

即这三个数的所有组合所得到的数都不相同.

(2) 设 $a=p\leqslant\sqrt{n}\leqslant\frac{n}{2}$（当 $n>3$ 时）. 由(1)，所有组合中可能相等的只有 $bc+a$ 与 $a(b+c)$；则

$$bc+p=p(b+c),$$
$$bc=p(b+c-1). \qquad ①$$

因为 $p$ 是素数，所以由 ① 式必有

$$p\mid b,\quad \text{或}\quad p\mid c.$$

若 $p\mid b$，则 $b=\beta p(\beta>1)$，代入 ① 得

$$\beta c=\beta p+c-1.$$
$$(\beta-1)c=\beta p-1=b-1.$$

由此可知，$\quad c\mid b-1.$

从而 $c<b$，与假设的 $c>b$ 矛盾.

所以只有 $p\mid c$，则 $c=\gamma p(\gamma>1)$，代入 ① 得

$$\gamma b=b+\gamma p-1,$$
$$(\gamma-1)b=\gamma p-1=(\gamma-1)+\gamma(p-1).$$

于是
$$b=1+\frac{\gamma(p-1)}{\gamma-1}. \qquad ②$$

因为
$$(\gamma,\gamma-1)=1,$$
所以
$$\gamma-1\mid p-1.$$

且
$$b=1+\frac{\gamma(p-1)}{\gamma-1}=1+\frac{c-\gamma}{\gamma-1}=\frac{c-1}{\gamma-1}<c,$$
$$b=1+\frac{\gamma(p-1)}{\gamma-1}=p+\frac{p-1}{\gamma-1}>p,$$

于是 $a = p < b < c$.

由 ② 式,对于 $p-1$ 的每个正因子 $\gamma - 1$,都有一个整数 $b$ 和整数

$$c = \gamma p \leqslant p^2 \leqslant n.$$

使得组合中有两个数相等.

所以,这三个数中的所有组合中有两个数相等的选取方法数恰好等于 $p-1$ 的正因子个数.

3·48　设已知对任意正整数 $n$,恒有素数 $p$ 存在,使得 $n \leqslant p \leqslant 2n$.试证下列命题:例如存在一个大于 2 的最小偶数 $2m_0$,它不能表示为两个素数之和,则 $4m_0$ 必能表示为三个或四个素数之和.

(中国天津市数学竞赛,1979 年)

[证 1]　由题设,存在素数 $p$ 满足

$$m_0 \leqslant p \leqslant 2m_0,$$

从而

$$2m_0 \leqslant 2p \leqslant 4m_0,$$

$$2m_0 \leqslant p + p \leqslant 4m_0. \quad ①$$

由于 $2m_0$ 不能表示为两个素数之和,则

$$2m_0 \neq p + p.$$

又若 $4m_0 = p + p$,则

$$p = 2m_0.$$

又由 $2m_0 > 2$,则 $m_0 > 1$,所以 $p > 2$,而大于 2 的素数一定为奇数,所以 $p \neq 2m_0$.

因此,① 式中的等号不成立,即

$$2m_0 < p + p < 4m_0.$$

令

$$4m_0 = p + p + n. \quad ②$$

于是 $n$ 为正整数,且为偶数.

由 ② 得

$$n = 4m_0 - 2p < 4m_0 - 2m_0 = 2m_0.$$

由于 $2m_0$ 是不能表为两个素数之和的最小偶数,则由 $n < 2m_0$ 知,$n$ 或者等于 2,或者为两个素数之和.即 $4m_0 = p + p + n$ 可表为三个或四个素数之和.

[证 2]　由题设 $2m_0 > 2$,所以存在素数 $p$ 使得

$$2m_0 - 2 \leqslant p \leqslant 2(2m_0 - 2).$$

因为 $4=2+2$,可表为两个素数之和,所以必有 $2m_0>4$,即 $2m_0-2>2$,所以 $p>2$,而大于 2 的素数必为奇数,所以 $p$ 为奇数.

由于 $\quad 2m_0-2\leqslant p\leqslant 4m_0-4,$

则 $\quad 2m_0<2m_0+1\leqslant p+3\leqslant 4m_0-1<4m_0.$

故 $\quad 0<4m_0-(p+3)<4m_0-2m_0=2m_0.$

令 $q=4m_0-(p+3)$,则 $q$ 是偶数,于是

$$2\leqslant q<2m_0.$$

因此 $q$ 或者是2,或者是两个素数之和.即 $4m_0=p+3+q$ 可以写成三个或四个素数之和.

**3·49** (1) 是否存在 14 个连续正整数,其中每一个数均至少可被一个不小于 2,不大于 11 的素数整除?

(2) 是否存在 21 个连续正整数,其中每一个数均至少可被一个不小于 2,不大于 13 的素数整除?

(第 15 届美国数学奥林匹克,1986 年)

**[解]** (1) 不存在.下面用反证法证明.

设这 14 个连续正整数为

$$N,\quad N+1,\quad N+2,\quad \cdots,\quad N+13.$$

由对称性,不妨设 $N$ 为偶数.于是

$$N,\quad N+2,\quad \cdots,\quad N+12$$

均能被 2 整除.

而余下的 7 个奇数

$$N+1,\quad N+3,\quad \cdots,\quad N+13$$

可能被3,5,7,11 整除的最多个数分别为3个,2个,1个,1个,总和也是 7 个.

所以素数 3,5,7,11 均必须分别整除它们各自可能整除的最多个数的数,且不会有两个不同素数整除同一个数的情况发生.

由于被 3 整除的奇数须相隔 6 个数,此时恰有 3 个,只能为

$$N+1,\quad N+7,\quad N+13.$$

而被 5 整除的奇数须相隔 10 个数,又恰有 2 个,所以为

$$N+1,\quad N+11,\text{或者 } N+3,\quad N+13.$$

这时出现 $N+1$ 同时被 3 和 5 整除,或者 $N+13$ 同时被 3 和 5 整除的情形,这是不可能发生的.

因此不存在14个连续正整数,其中每一个至少被2,3,5,7,11中的一个整除.

(2) *存在*.

我们注意到这样的21个连续整数:

$$-10,-9,-8,\cdots,-1,0,1,2,\cdots,9,10.$$

除去 $\pm 1$ 之外,其余每一个整数均至少可被2,3,5,7之一整除.

现在我们设法用剩下的11和13这两个素数来解决这两个数.

这就要求 $N$ 满足

$$\begin{cases} N = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7k, \\ N = 11m + 1, \\ N = 13n - 1. \end{cases}$$

而由中国剩余定理(即孙子定理),满足同余式组

$$\begin{cases} N \equiv 0 & (\bmod 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7), \\ N \equiv 1 & (\bmod 11), \\ N \equiv -1 & (\bmod 13). \end{cases}$$

的 $N$ 是存在的,比如99540就是这样的数.

从而 $N-10, N-9,\cdots, N-1, N, N+1,\cdots, N+9, N+10.$

即 99530,99531,…,99539,99540,99541,…,99550

就是其中的一组连续21个正整数.

3·50 方程 $x^2+ax+b+1=0$ 的根是自然数.证明 $a^2+b^2$ 是合数.

(第20届全苏数学奥林匹克,1986年)

[证] 设已知方程的二个根为 $x_1, x_2$,则

$$x_1+x_2=-a,$$

$$x_1x_2=b+1.$$

于是有

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &= (x_1+x_2)^2+(x_1x_2-1)^2 \\ &= x_1^2+x_2^2+2x_1x_2+x_1^2x_2^2-2x_1x_2+1 \\ &= x_1^2x_2^2+x_1^2+x_2^2+1 \\ &= (x_1^2+1)(x_2^2+1). \end{aligned}$$

显然,由 $x_1\in N$, $x_2\in N$ 得 $x_1^2+1>1$, $x_2^2+1>1$.

所以 $a^2+b^2$ 是合数.

3·51　证明 $N=\dfrac{5^{125}-1}{5^{25}-1}$ 不是素数.

(第 33 届国际数学奥林匹克预选题,1992 年)

[证]　令 $x=5^{25}$.则

$$\begin{aligned} N&=\frac{x^5-1}{x-1}\\ &=x^4+x^3+x^2+x+1\\ &=(x^2+3x+1)^2-5x(x+1)^2\\ &=(x^2+3x+1)^2-5^{26}(x+1)^2\\ &=[(x^2+3x+1)+5^{13}(x+1)][(x^2+3x+1)-5^{13}(x+1)]. \end{aligned}$$

显然,
$$(x^2+3x+1)+5^{13}(x+1)>1,$$
$$(x^2+3x+1)-5^{13}(x+1)>1.$$

于是 $N$ 是两个大于 1 的自然数的乘积,不可能是素数.

3·52　证明 $1010\cdots101$(含 $k$ 个 0 及 $k+1$ 个 1, $k\geqslant2$) 为合数.

(第 11 届全俄数学奥林匹克,1985 年)

[证]　设此数为 $x_k$.则

$$\begin{aligned} x_k&=1010\cdots101\\ &=100^k+100^{k-1}+\cdots+100+1\\ &=\frac{100^{k+1}-1}{100-1}\\ &=\frac{(10^{k+1})^2-1}{99}\\ &=\frac{(10^{k+1}+1)(10^{k+1}-1)}{99}. \end{aligned}$$

(1) 若 $k$ 为偶数,则 $k+1$ 为奇数,于是

$$10+1=11\mid 10^{k+1}+1,$$
$$10-1=9\mid 10^{k+1}-1.$$

从而
$$x_k=\frac{10^{k+1}+1}{11}\cdot\frac{10^{k+1}-1}{9}.$$
是两个大于 1 的整数之积,因而 $x_k$ 是合数.

(2) 若 $k$ 为奇数,则 $k+1$ 为偶数.设 $k+1=2t$.其中 $t\geqslant2$, $t\in N$.于是

$$x_k=\frac{10^{k+1}-1}{99}\cdot(10^{k+1}+1).$$

$$=\frac{100^t-1}{99}(10^{k+1}+1).$$

因为 $100-1=99\mid 100^t-1$，且 $\frac{100^t-1}{99}>1$（因为 $t\geqslant 2$），$10^{k+1}+1>1$，所以 $x_k$ 是两个大于 1 的整数之积，因而 $x_k$ 是合数.

3·53　证明数$1\underbrace{00\cdots0}_{161个}1$是合数.

（第 25 届莫斯科数学奥林匹克，1962 年）

[证]

$$\begin{aligned}&1\underbrace{00\cdots0}_{161个}1\\&=10^{1962}+1\\&=(10^{654})^3+1\\&=(10^{654}+1)(10^{1308}-10^{654}+1).\end{aligned}$$

因而 $100\cdots01$ 是合数.

3·54　证明数 $1\underbrace{00\cdots00}_{2^{1974}+2^{1000}-1个0}1$ 是合数.

（第 37 届莫斯科数学奥林匹克，1974 年）

[证]　由于 $2^{1974}+2^{1000}=2^{1000}(2^{974}+1)$.

则数

$$\begin{aligned}A&=100\cdots01\\&=100\cdots00+1\\&=(10^{2^{1000}})^{2^{974}+1}+1.\end{aligned}$$

记　$10^{2^{1000}}=a$，　$2^{974}+1=n$.

则 $n$ 是奇数.

于是 $A=a^n+1$ 能被 $a+1>1$ 整除，从而 $A$ 是合数.

3·55　证明对于每一个 $n$，数$\underbrace{11\cdots1}_{n个}2\underbrace{11\cdots1}_{n个}$是合数.

（第 13 届全俄数学奥林匹克，1987 年）

[解]

$$\begin{aligned}&11\cdots1\,2\,11\cdots1\\&=\underbrace{11\cdots11}_{n+1个}\underbrace{00\cdots0}_{n个}+\underbrace{11\cdots11}_{n+1个}\\&=\underbrace{11\cdots11}_{n+1个}(1\underbrace{00\cdots0}_{n个}+1)\\&=(11\cdots11)\cdot(10^n+1).\end{aligned}$$

所以是合数.

3·56　证明数 $4^{545}+545^4$ 是合数.

（第15届全俄数学奥林匹克,1989年）

[证]　已知数可化为

$$\begin{aligned}4^{545}+545^4&=(2^{545})^2+2\cdot2^{545}\cdot545^2+(545)^4-2\cdot2^{545}\cdot545^2\\&=(2^{545}+545^2)^2-2^{546}\cdot545^2\\&=(2^{545}+545^2)^2-(2^{273}\cdot545)^2\\&=(2^{545}+545^2+2^{273}\cdot545)(2^{545}+545^2-2^{273}\cdot545)\end{aligned}$$

因此该数是合数.

3·57　证明如下的数 $512^3+675^3+720^3$ 是合数.

（列宁格勒数学奥林匹克,1991年）

[证]　令 $x=512,y=675,z=720$.则

$$x=2^9,\quad y=3^3\cdot5^2,\quad z=2^4\cdot3^2\cdot5.$$

于是

$$2z^2=3xy.$$

从而有

$$\begin{aligned}&x^3+y^3+z^3\\=&x^3+y^3-z^3+2z^2\cdot z\\=&x^3+y^3-z^3+3xyz\\=&x^3+y^3-z^3-3xy(-z)\\=&(x+y-z)(x^2+y^2+z^2-xy+xz+yz).\end{aligned}$$

由 $x+y-z>1$,　$x^2+y^2+z^2-xy+xz+yz>1$ 可知 $x^3+y^3+z^3=512^3+675^3+720^3$ 是合数.

3·58　若 $a$ 为自然数,则 $a^4-3a^2+9$ 是素数还是合数?给出你的证明.

（中国广州、重庆、洛阳、福州、武汉初中数学竞赛,1986年）

[解]　已知表达式可分解为

$$\begin{aligned}a^4-3a^2+9&=(a^2+6a^2+9)-9a^2\\&=(a^2+3a+3)(a^2-3a+3).\end{aligned}$$

当 $a=1$ 时,$a^4-3a^2+9=7$ 为素数;

当 $a=2$ 时,$a^4-3a^2+9=13$ 为素数;

当 $a>2$ 时,$a-3\geqslant0$,则

$$a^2+3a+3>1,$$

$$a^2 - 3a + 3 = a(a-3) + 3 > 1.$$

于是 $a^4 - 3a^2 + 9$ 可以分解为两个大于 1 的整数的乘积.

所以,当 $a = 1$ 或 2 时,$a^4 - 3a^2 + 9$ 为素数.

当 $a > 2$ 时,$a^4 - 3a^2 + 9$ 是一个合数.

3·59　自然数 $a, b, c, d$ 满足等式 $ab = cd$. 求证

$$k = a^{1984} + b^{1984} + c^{1984} + d^{1984}$$

是合数.

(第 10 届全俄数学奥林匹克,1984 年)

[证]　由 $ab = cd$,可设

$$a = uv,\quad b = wt,\quad c = uw,\quad d = vt.$$

其中 $u, v, w, t$ 是自然数. 于是

$$\begin{aligned} k &= a^{1984} + b^{1984} + c^{1984} + d^{1984} \\ &= (uv)^{1984} + (wt)^{1984} + (uw)^{1984} + (vt)^{1984} \\ &= u^{1984}(v^{1984} + w^{1984}) + t^{1984}(w^{1984} + v^{1984}) \\ &= (u^{1984} + t^{1984})(v^{1984} + w^{1984}). \end{aligned}$$

由于 $u, v, w, t$ 是自然数,则

$$u^{1984} + t^{1984} > 1,$$
$$v^{1984} + w^{1984} > 1.$$

于是 $k$ 是合数.

3·60　试问,对于哪些自然数 $n$,数 $3^{2n+1} - 2^{2n+1} - 6^n$ 是合数.

(第 24 届全苏数学奥林匹克,1990 年)

[解]　原式可化为

$$\begin{aligned} & 3^{2n+1} - 2^{2n+1} - 6^n \\ &= 3^{2n+1} - 3^n \cdot 2^n - 2^{2n+1} \\ &= 3^{2n+1} - 3^{n+1} \cdot 2^n + 3^n \cdot 2^{n+1} - 2^{2n+1} \\ &= 3^{n+1}(3^n - 2^n) + 2^{n+1}(3^n - 2^n) \\ &= (3^n - 2^n)(3^{n+1} + 2^{n+1}). \end{aligned}$$

当 $n = 1$ 时,　$3^{2n+1} - 2^{2n+1} - 6^n = 13$ 是素数.

当 $n > 1$ 时,由于

$$3^n - 2^n > 1,\quad 3^{n+1} + 2^{n+1} > 1.$$

所以 $3^{2n+1} - 2^{2n+1} - 6^n$ 是合数.

因此所求的 $n$ 为 $n \geqslant 2$ 的自然数.

3·61　证明存在无穷个自然数 $a$ 具有下列性质,使得对一切自然数 $n$,数 $z = n^4 + a$ 不是素数.

(第 11 届国际数学奥林匹克,1969 年)

[证]　若 $z = n^4 + a$ 不是素数,又显然 $z > 1$.则 $z = n^4 + a$ 是合数,于是 $z = n^4 + a$ 应能分解为下面两种形式的一种:

(1)　$n^4 + a = (n + m)(n^3 + bn^2 + cn + d)$.

(2)　$n^4 + a = (n^2 + mn + p)(n^2 + bn + c)$.

对于(1),有

$$n^4 + a = n^4 + (m + b)n^3 + (bm + c)n^2 + (mc + d)n + md.$$

比较对应项系数得

$$\begin{cases} m + b = 0, & ① \\ bm + c = 0, & ② \\ mc + d = 0, & ③ \\ md = a. & ④ \end{cases}$$

由 ① 得 $m = -b$,代入 ② 得 $c = b^2$.

把 $m,c$ 的值代入 ③ 得 $d = b^3$.

把 $m,d$ 的值代入 ④ 得 $a = (-b)\cdot b^3 = -b^4 < 0$,与 $a$ 是自然数相矛盾.

于是 $n^4 + a$ 不能分解成(1) 的形式.

对于(2),有

$$n^4 + a = n^4 + (m + b)n^3 + (p + c + mb)n^2 + (pb + cm)n + cp.$$

比较对应项系数得

$$\begin{cases} m + b = 0, & ⑤ \\ p + c + mb = 0, & ⑥ \\ pb + cm = 0, & ⑦ \\ cp = a. & ⑧ \end{cases}$$

由 ⑤ 得 $m = -b$,代入 ⑦ 得

$$(p - c)b = 0.$$

则 $b = 0$ 或 $p - c = 0$.

若 $b = 0$,代入 ⑥ 得 $p + c = 0$,　$p = -c$.

把 $p = -c$ 代入 ⑧ 得

$$a = -c^2 < 0,$$

与 $a$ 是自然数矛盾.

于是 $b \neq 0$,从而 $p - c = 0$, $p = c$.

把 $m = -b$ 及 $p = c$ 代入 ⑥ 可得 $2p = b^2$,从而 $b$ 是偶数.

设 $b = 2k$,则由 $2p = b^2$ 得 $p = 2k^2$.

再由 $p = c = 2k^2$ 及 ⑧ 可得 $a = 4k^4$.

事实上,当 $a = 4k^4$,且 $k > 1$, $k \in N$ 时,有

$$\begin{aligned} z &= n^4 + a \\ &= n^4 + 4k^4 \\ &= (n^2 + 2k^2)^2 - (2nk)^2 \\ &= (n^2 + 2k^2 + 2nk)(n^2 + 2k^2 - 2nk) \\ &= [(n + k)^2 + k^2][(n - k)^2 + k^2]. \end{aligned}$$

由于 $k > 1$,则对一切自然数 $n$,有

$$(n + k)^2 + k^2 > 1, (n - k)^2 + k^2 > 1.$$

于是 $z = n^4 + a$ 能分解成两个大于1的自然数的乘积.因此,当 $a = 4k^4(k > 1,\ k \in N)$ 时,数 $z = n^4 + a$ 是合数.

又由于有无穷多个大于1的自然数 $k$,因此也就得到无穷多个自然数 $a = 4k^4$,使得对于一切自然数 $n$,数 $z = n^4 + a$ 都不是素数.

3·62　给出一个无穷数列

$$a_1,\quad a_2,\quad \cdots,\quad a_n,\quad \cdots$$

其中每一项都是由它前面那个数在后面添上某个非 9 的数码而得.现已知 $a_1$ 是任意一个十位数.证明该数列中至少有两项为合数.

(第 35 届莫斯科数学奥林匹克,1972 年)

[证]　假设该数列中仅有不多于 1 个合数.

那么从某个数 $a$ 开始,所有的数都是素数.

显然在 $a$ 的后面不能添加偶数数码,也不能加 5,否则这个数就是合数.

如果在 $a$ 的后面添加 1 或 7,则至多添加 1 次.否则,若 $a$ 是 $3k+2$ 型的数,则添加 1 次 1 或 7 就是 3 的倍数,若 $a$ 是 $3k+1$ 型的数,则添加 1 或 7 时,添加 2 次就是 3 的倍数.

于是,从某个时刻开始,就只能添加数码 3.

如果在这一时刻之前得到一个素数 $p$,这时,只要添加不多于 $p$ 个 3 就会得到一个能被 $p$ 整除的数,即得到一个合数.这是因为在

$$\overline{p3},\quad \overline{p33},\quad \cdots,\quad \overline{p\underbrace{33\cdots3}_{p个3}}.$$

中，至少有一个能被 $p$ 整除.

因此，无论如何添加非 9 数码，一定会产生一个合数. 即已知数列中至少有两个合数.

**3·63** 若 $x_0, a, b \in N$, $x_{n+1} = x_n a + b$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$. 证明 $x_n$ 不可能全为素数.

（中国国家集训队测验题，1990 年）

**[证]** (1) 若 $(a, b) = d > 1$，则

$$d \mid x_1 = x_0 a + b.$$

即 $x_1$ 是合数.

(2) 若 $(a, b) = 1$，则

$$(x_1, a) = (a, b) = 1.$$

在 $x_1, x_2, x_3, \cdots$ 中，至少有两个数关于 $\bmod x_1$ 同余，设这两个数为 $x_k, x_{k+T} (T \geqslant 1)$，则

$$x_k \equiv x_{k+T} \pmod{x_1},$$

$$a x_{k-1} + b \equiv a x_{k+T-1} + b \pmod{x_1},$$

$$a x_{k-1} \equiv a x_{k+T-1} \pmod{x_1}.$$

又因为 $(x_1, a) = 1$，则

$$x_{k-1} \equiv x_{k+T-1} \pmod{x_1}.$$

从而有 $$x_1 \equiv x_{1+T} \pmod{x_1}.$$

即 $$x_1 \mid x_{1+T}.$$

而 $$x_{1+T} \geqslant x_2 > x_1,$$

又有 $$x_1 = a x_0 + b > 1,$$

于是 $$x_{1+T} > 1.$$

故 $x_{1+T}$ 为合数.

**3·64** 试证明如果自然数 $n > 4$，并且不是素数，那么从 1 到 $n-1$ 的连续自然数之积能被 $n$ 整除.

（波兰数学竞赛，1949 年）

**[证]** 因为 $n$ 不是素数，且 $n > 4$，所以 $n$ 是大于 4 的合数. 于是存在自然数 $p$ 和 $q$，使得

$$n = pq,\quad 1 < p < n,\quad 1 < q < n.$$

并设 $p$ 是 $n$ 的最大素约数.

(1) 若 $p \neq q$,则 $p$ 和 $q$ 是 $1,2,\cdots,n-1$ 中不同的两项.

所以
$$p \mid 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (n-1),$$
$$q \mid 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (n-1).$$

从而
$$n \mid 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (n-1).$$

(2) 若 $p = q$,于是 $n = p^2$.

由于 $n > 4$,所以 $p > 2$, $p^2 > 2p$.

于是
$$n > 2p.$$

所以 $p$ 和 $2p$ 是 $1,2,\cdots,n-1$ 中不同的两项.

因而
$$p \mid 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (n-1),$$
$$2p \mid 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (n-1).$$

进而
$$2p^2 \mid 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (n-1).$$
$$n = p^2 \mid 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (n-1).$$

由以上可证 $n \mid 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (n-1)$.

事实上,我们还可以证明更强一些的结论:

若 $n$ 是不小于 6 的合数,则
$$n \mid (n-3)!.$$

事实上,若 $n = pq \quad (1 < p,\quad q < n)$.则必有 $p$ 和 $q$ 均不大于 $n-3$.

否则,若 $p \geqslant n-3$,又由于 $q \geqslant 2$,则
$$pq \geqslant 2(n-3),$$
即
$$n > 2n-6,\quad n < 6.$$

与 $n \geqslant 6$ 矛盾.

于是 $p \leqslant n-3$, $q \leqslant n-3$.

当 $p \neq q$ 时,由 $p \leqslant n-3$, $q \leqslant n-3$ 可得
$$n = pq \mid (n-3)!.$$

当 $p = q$ 时,

由 $n \geqslant 6$ 可知 $p \geqslant 3$.

由此得
$$p^2 \geqslant 3p.$$
$$n = p^2 \geqslant 3p = 2p + p \geqslant 2p + 3.$$

从而
$$2p \leqslant n-3.$$

于是 $p$ 和 $2p$ 为 $1,2,\cdots,n-3$ 中不同的两项，从而

$$p\cdot 2p \mid (n-3)!.$$

即有 $$n=p^2 \mid (n-3)!.$$

因此对 $n\geqslant 6$ 的合数，

$$n\mid (n-3)!.$$

3·65　求证对任何正整数 $n$，都存在 $n$ 个相继的正整数，它们都不是素数的整数幂.

（第 30 届国际数学奥林匹克，1989 年）

[证]　令 $N=[(n+1)!]^2+1$.

则 $N+1,N+2,\cdots,N+n$ 这 $n$ 个相继的正整数都不是素数的整数幂.

否则，则有正整数 $j$，$m$，$1\leqslant j\leqslant n$ 和素数 $p$，使得

$$N+j=p^m. \quad ①$$

由 $N$ 的定义可得

$$1+j\mid N+j.$$

但 $$(1+j)^2\nmid N+j.$$

由 ① 可知 $$1+j=p^k,\quad k\in N.$$

又 $$(1+j)^2\mid N-1,$$

所以 $$p^{2k}\mid N-1,$$

从而 $$p^{k+1}\mid N-1.$$

所以 $$p^{k+1}\nmid N+j.$$

由 ① 知，必有 $m=k$，从而有

$$N+j=p^m=p^k=1+j.$$

这是不可能的.

从而 $N+1$，$N+2$，$\cdots$，$N+n$ 满足要求.

3·66　最大的不能写成两个奇合数之和的偶数是几？

（第 2 届美国数学邀请赛，1984 年）

[解]　我们证明：对于不小于 40 的偶数，一定可以表示成两个奇合数之和的形式.

我们注意到，如果 $n$ 是大于 1 的奇数，则 $5n$ 是一个个位数是 5 的奇合数.

为了能得到两个奇合数之和表示所有的偶数，一个奇合数是 $5n$，

另一个奇合数只须找到个位数是 5,7,9,1,3 的奇合数即可,易知 15,27,9,21,33 是满足要求的奇合数.

设 $k$ 是不小于 40 的偶数.

如果 $k$ 的个位数字是 2(即 $k=42,52,62,\cdots$),则

$$k=27+5n.$$

如果 $k$ 的个位数字是 4(即 $k=44,54,64,\cdots$),则

$$k=9+5n.$$

如果 $k$ 的个位数字是 6(即 $k=46,56,66,\cdots$),则

$$k=21+5n.$$

如果 $k$ 的个位数字是 8(即 $k=48,58,68,\cdots$),则

$$k=33+5n.$$

如果 $k$ 的个位数字是 0(即 $k=40,50,60,\cdots$),则

$$k=15+5n.$$

于是不能写成两个奇合数之和的偶数一定小于 40.

最大的偶数是 38.

由于 $38=1+37=3+35=5+33=7+31=9+29=11+27=13+25=15+23=17+21=19+19$,所以 38 不能表示成两个奇合数之和.

于是 38 是满足题目要求的偶数.

3·67　机器人对自然数从 1 开始由小到大按如下规则进行染色:凡能表示为两个合数之和的自然数都染成红色,不合上述要求的自然数染成黄色(比如23可表示为两个合数15与8之和,23要染成红色,而1不能表为两个合数之和,1染成黄色),问被染成红色的数由小到大数下去,第 1992 个数是多少?请你说明理由.

(中国北京市初中二年级数学竞赛,1992 年)

[解]　(1) 当 $n=2k(k=1,2,3,\cdots)$ 时,

$$n=2k=2(k-2)+4,$$

其中 $k-2\geqslant 2$,即 $k\geqslant 4$,$n\geqslant 8$ 时,$n$ 为合数之和.因此对不小于 8 的偶数都可以表为两个合数之和.

(2) 当 $n=2k-1\quad(k=1,2,\cdots)$ 时,

$$n=2k-1=2(k-5)+9.$$

其中 $k-5\geqslant 2$,即 $k\geqslant 7$,　$n\geqslant 13$ 时,$n$ 为合数之和.因此对不小于 13

的奇数都可以表为两个合数之和.

由(1),(2)可知,在自然数中,只有1,2,3,4,5,6,7,9,11这九个数为黄色数,其余均为红色数.



所以第1992个红数是

$$1992+9=2001.$$

3·68　对任一正整数 $q_0$,考虑由 $q_i=(q_{i-1}-1)^3+3\quad(i=1,2,\cdots,n)$ 定义的序列 $q_1,q_2,\cdots,q_n$.若每个 $q_i(i=1,2,\cdots,n)$ 都是素数的幂.求 $n$ 的最大的可能值.

(匈牙利数学奥林匹克,1990年)

[解]　由于 $m^3-m=m(m-1)(m+1)\equiv 0\pmod 3$,

所以
$$\begin{aligned}q_i&=(q_{i-1}-1)^3+3\\&\equiv(q_{i-1}-1)^3\\&\equiv q_{i-1}-1\pmod 3.\end{aligned}$$

因而 $q_1,q_2,q_3$ 中必有一个能被3整除,这个数应当是3的幂.

若 $3\mid(q-1)^3+3$,则

$$3\mid(q-1)^3,$$

于是
$$3\mid q-1.$$
$$3^3\mid(q-1)^3,$$

而
$$3\mid(q-1)^3+3,$$

于是只有在 $q_i=1$ 时,$(q_i-1)^3+3$ 才是3的幂.这时必须 $i=0$.

但 $q_0=1$ 时推出

$$q_1=3,\quad q_2=11,\quad q_3=1003=17\cdot 59.$$

所以 $n$ 的最大值是2.

3·69　证明如果 $1+2^n+4^n$ 是素数,$n\in N$,则 $n=3^k$,其中 $k$ 是非负整数.

(保加利亚数学奥林匹克,1981年)

[证]　设 $n=3^kr$,其中 $k$ 是非负整数,且 $3\nmid r$.

我们证明,此时 $p=1+2^n+4^n$ 被 $q=1+2^{3^k}+4^{3^k}$ 整除,从而 $p$ 不是素数.

(1) $r=3s+1$ 时,$s$ 是非负整数.则

$$p-q=(2^n-2^{3^k})+(4^n-4^{3^k})$$

$$=2^{3^k}(2^{3^k 3s}-1)+4^{3^k}(2^{3^k\cdot 6s}-1)$$
$$\equiv 0 \pmod{(2^{3^k\cdot 3}-1)}.$$

因为
$$2^{3^k\cdot 3}-1=(2^{3^k}-1)(1+2^{3^k}+4^{3^k})$$
$$=(2^{3^k}-1)q.$$

所以 $q \mid p-q$，于是 $q \mid p$.

(2) $r=3s+2$ 时，$s$ 是非负整数，则

$$p-q=(4^n-2^{3^k})+(2^n-4^{3^k})$$
$$=2^{3^k}[2^{3^k 3(2s+1)}-1]+2^{2\cdot 3^k}(2^{3^k\cdot 3s}-1)$$
$$\equiv 0 \pmod{(2^{2^k\cdot 3}-1)}.$$

同(1)，仍有 $q \mid p$.

于是 $n=3^k r$，$3\nmid r$ 时，$p$ 为合数，从而当 $p=1+2^n+4^n$ 是素数时，$n=3^k$.

3·70　求所有具有下述性质的 $n\in N$，存在 $0,1,2,\cdots,n-1$ 的排列 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，使得 $a_1$，$a_1a_2$，$a_1a_2a_3$，$\cdots$，$a_1a_2\cdots a_n$ 被 $n$ 除的余数各不相同.

（保加利亚数学奥林匹克，1983 年）

[解]　当 $n=1$ 时，排列 $(a_1)=(0)$，满足题目的条件.

当 $n=4$ 时，排列 $(a_1,a_2,a_3,a_4)=(1,3,2,0)$，则

$$a_1=1,\quad a_1a_2=3,\quad a_1a_2a_3=6,\quad a_1a_2a_3a_4=0$$

被 4 除的余数各不相同.

当 $n$ 为素数时，则由中国剩余定理，对每个 $k=2,3,\cdots,n$，存在 $b_k$，使得

$$b_k\equiv 0 \pmod{k-1},$$
$$b_k\equiv k \pmod{n}.$$

用 $a_k$ 表示 $c_k=\dfrac{b_k}{k-1}$ 被 $n$ 除的余数，则

$$b_k=c_k(k-1)\equiv a_k(k-1) \pmod{n}.$$

令 $a_1=1$. 下面证明 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 互不相同.

事实上，有 $a_n=0$，且当 $k=1,2,\cdots,n-1$ 时，$a_k\neq a_n$.

第三章　素数与合数

这是因为 $a_n(n-1)\equiv 0 \pmod n$， $a_1=1$，且当 $k=2,3,\cdots,n-1$ 时，

$$a_k(k-1)\equiv k \pmod n.$$

其次，如果 $a_l=a_k=a$， $1<l<k<n$，则

$$a(kl-k)=a_l(l-1)k\equiv lk \pmod n,$$

$$a(kl-l)=a_k(k-1)l\equiv kl \pmod n.$$

这时有 $a(k-l)=a(kl-l)-a(lk-k)\equiv 0 \pmod n$.

这是不可能的，因为 $(a,\ n)=(k-l,n)=1$.

最后，如果 $a_k=a_1$，其中 $1<k<n$，则

$$k-1=a_k(k-1)\equiv k \pmod n.$$

出现矛盾.

因此集合 $\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 由 $n$ 个不同的数组成，并且对任意 $k$，有

$$0\leqslant a_k\leqslant n-1.$$

所以 $\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}=\{0,1,\cdots,n-1\}$.

下面再证明，所得到的排列 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 满足题目的条件.

事实上，有 $a_1=1$， $a_1a_2\cdots a_n=0$.

而当 $k=2,3,\cdots,n-1$ 时，

$$1a_2a_3\cdots a_k,\quad 2a_3\cdots a_k,\quad \cdots,\quad (k-1)a_k,\quad k$$

被 $n$ 除的余数相同，即

$$a_1a_2\cdots a_k\equiv k \pmod n.$$

因此，$a_1,a_1a_2,a_1a_2a_3,\cdots,a_1a_2\cdots a_n$ 被 $n$ 除的余数集合为

$$\{1,2,\cdots,n-1,0\}.$$

当 $n$ 是大于 4 的合数时，我们证明，这样的 $n$ 不合题目的条件.

如果 $n=p^2$，则记 $q=2p<n$；否则 $n$ 可表为 $n=pq$，其中 $1<p<q<n$.

在 $n=p^2$ 及 $n=pq$ 这两种情况下，都有

$$pq\equiv 0 \pmod n.$$

假设排列 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 合乎题目的条件，则当 $k=1,2,\cdots,n-1$ 时，$a_k\neq 0$，

否则 $a_1a_2\cdots a_k\equiv 0 \pmod n$ 且 $a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}\equiv 0 \pmod n$.

这是不可能的.

取 $k, \quad l < n$ 使得 $a_k = p, \quad a_l = q$,记 $m = \max(k, l)$.

则 $a_k a_l \mid a_1 a_2 \cdots a_m$.因此

$$a_1 a_2 \cdots a_m \equiv 0 \pmod n,$$

且
$$a_1 a_2 \cdots a_m a_{m+1} \equiv 0 \pmod n.$$

与假设矛盾.

所以符合条件的 $n$ 为所有素数及 $n = 1, 4$.

3·71 设 $\omega(n)$ 表示自然数 $n$ 的素因数的个数,$n > 1$.证明有无限多个 $n$,使得 $\omega(n) < \omega(n+1) < \omega(n+2)$ 成立.

(第 21 届国际数学奥林匹克候选题,1979 年)

[证] 首先证明,有无限多个形如 $n = 2^k$ 的数,使得 $\omega(n) < \omega(n+1)$,其中 $k \in N$.

假设有某个 $n = 2^k$ 适合 $\omega(n) \geqslant \omega(n+1)$,则

$$1 = \omega(2^k) \geqslant \omega(2^k + 1) \geqslant 1.$$

因此 $\omega(2^k + 1) = 1$.从而

$$2^k + 1 = p^m,\text{其中 } m \in N, \quad p \text{ 为素数}.$$

如果 $m = 2l$,则

$$2^k = p^{2l} - 1 = (p^l - 1)(p^l + 1).$$

即 $p^l + 1$ 与 $p^l - 1$ 都是 2 的幂,由此可得

$$p^l + 1 = 4, \quad p^l - 1 = 2.$$

即
$$p = 3, \quad l = 1, \quad k = 3.$$

如果 $m$ 为奇数,且 $m > 1$,则由

$$2^k = p^m - 1 = (p-1)(p^{m-1} + \cdots + p + 1)$$

可知,大于 1 的奇数 $p^{m-1} + \cdots + p + 1$ 是 2 的方幂,这是不可能的.因此 $m = 1$.即有 $2^k + 1 = p$.

对 $2^k + 1 = p$,如果 $k = 2^q \cdot r$,其中 $r$ 为大于 1 的奇数,则有

$$p = 2^k + 1 = 2^{2^q r} + 1 \equiv 0 \pmod{(2^{2^q} + 1)}.$$

即素数 $p$ 被小于 $p$ 的数 $2^{2^q} + 1$ 整除,这是不可能的,因此 $k = 2^q, \quad q$ 为非负整数.

至此已经证出,存在无限个 $k \in N, \quad k \neq 3$ 且 $k$ 不等于 2 的方幂,均有

$$\omega(2^k) < \omega(2^k + 1).$$

现在设适合 $\omega(2^k) < \omega(2^k+1)$ 的 $k$ 中只有有限个也适合 $\omega(2^k+1) < \omega(2^k+2)$，则可以找到这样的足够大的数 $k_0 = 2^{q_0} > 5$，使得对每个 $k = k_0+1,\quad k_0+2,\quad \cdots,\quad 2k_0-1 < 2^{q_0+1}$，均有

$$\omega(2^k+1) \geqslant \omega(2^k+2) = \omega(2(2^{k-1}+1)) = 1+\omega(2^{k-1}+1).$$

由此可得

$$\begin{aligned}\omega(2^{2q_0-1}+1) &\geqslant 1+\omega(2^{q_0-2}+1)\\ &\geqslant \cdots\\ &\geqslant (k_0-1)+\omega(2^{k_0}+1)\\ &\geqslant k_0.\end{aligned}$$

因此，如果用 $p_1 < p_2 < \cdots$ 表示连续素数，则

$$\begin{aligned}2^{2k_0-1}+1 &\geqslant p_1p_2\cdots p_{k_0}\\ &= (2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11)(p_6\cdots p_{k_0})\\ &> 4^5\cdot4^{k_0-5} = 2^{2k_0} > 2^{2k_0-1}+1.\end{aligned}$$

出现矛盾，

由此结论得证.

3·72　设 $h(n)$ 表示自然数 $n$ 的最大素约数，是否存在无限多个 $n$，使得

$$h(n) < h(n+1) < h(n+2)?$$

（第 21 届国际数学奥林匹克候选题，1979 年）

［解］　取定奇素数 $p$，我们证明，递增的偶数列 $a_m = p^{2m}+1$（$m$ 为非负整数）中任意两个数都没有大于 2 的公约数.

事实上，如果 $m > l \geqslant 0$，则

$$\begin{aligned}p^{2m}-1 &= (p^{2m-1}+1)(p^{2m-1}-1)\\ &= \cdots\\ &= (p^{2m-1}+1)(p^{2m-2}+1)\cdots(p^{2l}+1)(p^{2l}-1)\end{aligned}$$

能被 $p^{2l}+1$ 整除. 因此

$$\begin{aligned}(a_m, a_l) &= (2+(p^{2m}-1), p^{2l}+1)\\ &= (2, p^{2l}+1)\\ &= 2.\end{aligned}$$

现在考虑数列 $\{a_n\}$ 中至少被一个大于 $p$ 的素数整除的项的集合.

由上面已证的数列$\{a_m\}$的性质可知,数列$\{a_m\}$只有有限个不含大于$p$的素约数的项,因此此集合是非空的.设此集合的最小数为$a_m$,则

$$
\begin{aligned}
& h(a_m) > p, \\
& h(a_m - 1) = h(p^{2m}) = p, \\
& h(a_m - 2) \\
= & h(p^{2m} - 1) \\
= & \max\{h(p^{2m-1}), h(p^{2m-1} - 1)\} \\
= & \cdots \\
= & \max\{h(p^{2m-1} + 1), h(p^{2m-2} + 1), \cdots, h(p + 1), h(p - 1)\} \\
= & \max\{h(a_{m-1}), h(a_{m-2}), \cdots, h(a_0), h(p - 1)\} \\
< & p.
\end{aligned}
$$

这是因为$h(p-1) < p$,并且由$m$的取法可知,对$l = 0,1,\cdots,m-2,m-1$,均有$h(a_l) \leqslant p$.又由$a_l \equiv 1 \pmod p$可知$h(a_l) \neq p$,即$h(a_l) < p$.

于是对给定的素数$p$,所有形如$n = p^{2m} - 1$的数都满足$h(n) < h(n+1) < h(n+2)$.由于对不同的$p$,相应的$n$也不同,因此这样的$n$有无限多个.

3·73 设$a,b,c,d$为自然数,并且$ab = cd$,试问$a+b+c+d$能否为素数?

(第58届莫斯科数学奥林匹克,1995年)

**[解1]** 由于$ab = cd$,由素因数分解定理可知,存在整数$c_1,c_2,d_1,d_2$,使得

$$c = c_1c_2, d = d_1d_2, a = c_1d_1, b = c_2d_2.$$

于是有
$$
\begin{aligned}
a+b+c+d &= c_1d_1 + c_2d_2 + c_1c_2 + d_1d_2 \\
&= (c_1 + d_2)(d_1 + c_2).
\end{aligned}
$$

因此$a+b+c+d$为合数.

**[解2]** 由$ab = cd$得

$$a+b+c+d = a+b+c+\frac{ab}{c} = \frac{(a+c)(b+c)}{c}$$

为整数.从而存在整数$c_1,c_2$,使$c = c_1c_2$,且$\frac{a+c}{c_1} = k, \frac{b+c}{c_2} = l$均为整数.

由于　$a+c>c\geqslant c_1, b+c>c\geqslant c_2$,

所以　$k>1. l>1$,又 $a+b+c+d=kl$,

因此,$a+b+c+d$ 为合数.

3·74　试确定所有的四元数组$(p_1,p_2,p_3,p_4)$,其中 $p_1,p_2,p_3,p_4$ 是素数,且满足

(1)$p_1<p_2<p_3<p_4$;

(2)$p_1p_2+p_2p_3+p_3p_4+p_4p_1=882$.

(澳大利亚数学奥林匹克,1995 年)

**[解]**　条件(2)可化为$(p_1+p_3)(p_2+p_4)=882=2\times 3^2\times 7^2$.

由于$4\nmid 882$,所以 $p_1+p_3$ 及 $p_2+p_4$ 中必有一个奇数,又由 $p_1,p_2,p_3,p_4$ 是素数,及 $p_1$ 最小,所以 $p_1=2$,从而 $2+p_3$ 是 882 的奇因子.

即

$$2+p_3 \mid 441.$$

又由于　$p_1+p_3<p_2+p_4$,

所以　$2+p_3<\sqrt{882}<30$.

于是 $p_3+2$ 的可能值只能是 1,3,7,9,21,再由 $p_3$ 是素数,所以 $p_3$ 只能是 5,7,19.

下面分别讨论,

(ⅰ)若 $p_3=5$,则由条件(1),$p_2=3$,且 $p_2+p_4$ 应为$\frac{882}{2+5}=126$,$p_4=123$ 不是素数;

(ⅱ)若 $p_3=7$,则 $p_2+p_4=\frac{882}{2+7}=98$,且 $p_2$ 只能为 3 或 5,相应的 $p_4$ 为 95 或 93,都不是素数.

(ⅲ)若 $p_3=19$,则 $p_2+p_4=\frac{882}{2+19}=42$,

由于

$$2<p_2<19<p_4,$$

则 $p_2=5,11,13$,相应地,$p_4=37,31,29$.

综合以上,所求的四元数组$(p_1,p_2,p_3,p_4)$为(2,5,19,37),(2,11,19,31),(2,13,19,29).

3·75　已知 $n$ 是自然数,且 $2n+1$ 与 $3n+1$ 都是完全平方数,请问:$n$ 与 $5n+3$ 能否是素数.

(第 19 届全俄数学奥林匹克,1993 年)

[解] 设 $2n+1=k^2,3n+1=m^2$,则

$$5n+3=4(2n+1)-(3n+1)=4k^2-m^2$$
$$=(2k+m)(2k-m). \qquad ①$$

若 $2k-m=1$,则 $2k+m=2m+1,5n+3=2m+1$,此时有

$$(m-1)^2=m^2-(2m+1)+2=3n+1-(5n+3)+2$$
$$=-2n<0,$$

上式显然矛盾.

因此 $2k-m\neq 1,2k+m>2k-m>1$,于是由①式 $5n+3$ 是合数.

3·76 对于自然数 $n$,如果对于任何整数 $a$,只要 $n\mid a^n-1$,就有 $n^2\mid a^n-1$,则称 $n$ 具有性质$P$.求证

(1)每个素数 $n$ 都具有性质$P$.

(2)有无穷多个合数也都具有性质 $P$.

(第 34 届国际数学奥林匹克预选题,1993 年)

[证] (1)设 $n=p$ 为素数,且 $p\mid a^p-1$.

于是
$$(a,p)=1.$$

又 $a^p-1=a(a^{p-1}-1)+(a-1)$,

由 *Fermat* 小定理知 $p\mid a^{p-1}-1$,则 $p\mid a-1$.

即
$$a\equiv 1(\mathrm{mod}\,p),$$

因而 $a^i\equiv 1(\mathrm{mod}\ p),i=0,1,2,\cdots,p-1$.

$$\sum_{i=0}^{p-1}a^i\equiv p\equiv 0(\mathrm{mod}\ p).$$

所以 $p^2\mid(a-1)(a^{p-1}+a^{p-2}+\cdots+a+1)=a^p-1$.

(2)设 $n$ 是具有性质$P$ 的合数.

若 $n\mid a^n-1$,则$(n,a)=1$.

由 *Euler* 定理,有 $a^{\varphi(n)}\equiv 1(\mathrm{mod}\ n)$.

又由于 $a^n\equiv 1(\mathrm{mod}\ n)$,

则 $a^{(n,\varphi(n))}\equiv 1(\mathrm{mod}\ n)$.

如果 $(n,\varphi(n))=1$,则由(1)可推得 $n^2\mid a^n-1$.

因此,问题化为求无穷多个合数 $n$,使$(n,\varphi(n))=1$.

对任何素数 $p\geqslant 5$,取 $p-2$ 的素因数 $q$,并令 $n=pq$.

这时,$\varphi(n)=(q-1)(p-1)$.

因为　$q \mid p-2$,则　$q \nmid p-1$.

又因为　$q \leqslant p-2 < p$,故 $p \nmid p-1$.



因此　$(pq,(p-1)(q-1))=1$,

即　$(n,\varphi(n))=1$.

对于这样的合数 $n$,若 $n \mid a^n-1$,则 $n \mid a-1$.

因而　$a^k \equiv 1 \pmod{n}, k=0,1,2,\cdots$

注意到
$$\begin{aligned}a^n-1&=(a-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+\cdots+a+1)\\&=(a-1)[(a^{n-1}-1)+(a^{n-2}-1)+\cdots+(a-1)\\&\quad+n]\end{aligned}$$

知　$n^2 \mid a^n-1$.

因为对每个素数 $p \geqslant 5$ 都可按上述程序得到具有性质 $P$ 的相应合数 $p<n(p)<p^2$.所以有无穷多个合数 $n$ 具有性质 $P$.

3·77　$p,q$ 是两个不同的素数,正整数 $n \geqslant 3$.求所有整数 $a$,使得多项式 $f(x)=x^n+ax^{n-1}+pq$ 能够分解为两个不低于一次的整系数多项式的积.

(中国国家集训队选拔考试,1994 年)

**[解]**　设 $f(x)=x^n+ax^{n-1}+pq=g(x)h(x)$.　①

可设 $g(x),h(x)$的最高次项的系数为 $+1$,否则可考虑$(-g(x))\cdot(-h(x))$.即设

$$g(x)=x^l+a_{l-1}x^{l-1}+\cdots+a_1x+a_0, \quad ②$$

$$h(x)=x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0. \quad ③$$

显然
$$a_0b_0=pq. \quad ④$$

由 $p,q$ 是不同的素数及④式,可设 $p \nmid a_0$,则 $p \mid b_0$,

设 $p \mid b_k(\beta=0,1,\cdots,r-1)$,$p \nmid b_r(r \leqslant m)$,

记 $f(x)$中 $x^r$ 的系数为 $c_r$,则由①,②及③有

$$c_r=a_0b_r+a_1b_{r-1}+\cdots+a_rb_0.$$

由 $p \nmid a_0$ 知 $p \nmid c_r$,又由题设条件

$$c_1=c_2=\cdots=c_{n-2}=0,$$

它们全是 $p$ 的倍数.

由于 $r \leqslant m \leqslant n-1$,所以只可能是 $r=n-1$,即

$$m=n-1.$$

$h(x)$为 $n-1$ 次多项式，$g(x)$为一次多项式. $g(x)=x+a_0$.

从而 $f(-a_0)=0$，即 $0=(-a_0)^n+a(-a_0)^{n-1}+pq$.

则 $(-a_0)^{n-1}(a-a_0)=-pq$. ⑤

由 $n-1\geqslant 2$ 及 $p,q$ 是不同素数，则由上式知 $a_0=\pm 1$.

此时由⑤式有 $a=1+(-1)^n pq$ 或 $a=-1-pq$.

3·78 试求满足以下条件的全部素数 $p$：对任一素数 $q<p$，若 $p=kq+r, 0\leqslant r<q$，则不存在大于 1 的整数 $a$，使得 $a^2$ 整除 $r$.

（中国国家集训队选拔考试，1999 年）

［解］ 注意到 $p=2, p=3=1\times 2+1$,

$$p=5=2\times 2+1=1\times 3+2,$$

$$p=7=2\times 3+1=1\times 5+2.$$

均满足题目要求的条件.

而 $$p=11=1\times 7+4=1\times 7+2^2.$$

$p=11$ 不满足题目要求条件.

现考虑 $p>11$ 的情形.

考察 $p-r=kq, 0\leqslant r<q$. ①

显然，由素数 $q<$素数 $p$ 及 $p>11$ 知

$$r\neq 1,2,3,5,6,7,10,11,12$$

现研究 $p-4, p-8, p-9$.

由于 $p-4$ 不能含有大于 3 的素约数，由①

$$p-4=3^a, a\geqslant 2.$$

由于 $p$ 是奇素数，所以 $p-9$ 是偶数，含有素约数 2，且它的素约数不超过 7.

由于 $p-9=3^a-5$，则 $p-9$ 不能含素约数 5.

于是，$p-9$ 只能含素约数 2 和 7.

再考虑 $p-9$ 所含素约数 2 的最高次幂.

$$p-9=3^a-5\equiv\begin{cases}1-5\\3-5\end{cases}\equiv\begin{cases}4\\6\end{cases}\pmod 8$$

于是 $8\nmid p-9$.

这样，$p-9$ 只有两种可能：

$p-9=2\cdot 7^b$，或 $p-9=2^2\cdot 7^b$.

若 $p-9=2\cdot 7^b$，则 $3^a-5=2\cdot 7^b$,

即 $$3^a=2(7^b+1)+3.$$

由此得 $0\equiv 7\equiv 1 \pmod 3$，矛盾.

于是只有 $p-9=4\cdot 7^b$. ②

或 $p-8=4\cdot 7^b+1$.

由于 $p-8$ 不含大于 7 的素约数.

由 $3\mid p-4$ 得 $3\nmid p-8$.

由 $7\mid p-9$ 得 $7\nmid p-8$.

这样，$p-8$ 只含素约数 5,

$$p-8=5^c \quad ③$$

于是，由②和③得 $4\cdot 7^b=5^c-1, b\geqslant 0, c\geqslant 1$.

若 $b\geqslant 1$，考察数列

$\{5^c-1 \pmod 7\}=\{4,3,5,1,2,0,4,3,5,1,2,0,\cdots\}$,

于是 $c$ 是 6 的倍数.

设 $c=2c', c'\geqslant 1$.

则 $4\cdot 7^b=25^{c'}-1$,

即 $24\mid 4\cdot 7^b$，这是不可能的.

所以，$b\geqslant 1$ 不成立. 于是 $b=0, c=1$,

故 $p-8=4\cdot 7^0+1$，即 $p=13$.

综上，$p=2,3,5,7,13$.

3·79 设 $p$ 为素数，$f(x)$ 为整系数 $d$ 次多项式且满足

(1) $f(0)=0, f(1)=1$;

(2) 对任一正整数 $n$，$f(n)$ 被 $p$ 所除的余数或为 0 或为 1.

证明 $d\geqslant p-1$.

（第 38 届国际数学奥林匹克预选题，1997 年）

［证］ 用反证法. 假设 $d\leqslant p-2$. 那么，多项式 $f(x)$ 完全由它在 $0,1,\cdots,p-2$ 的值所确定.

由拉格朗日插值公式，对于任一 $x$，有

$$f(x)=\sum_{k=0}^{p-1} f(k)\frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)(x-k-1)\cdots(x-p+2)}{k!\ (-1)^{p-k}(p-k-2)!}$$

将 $x=p-1$ 代入上式得

$$f(p-1)=\sum_{k=0}^{p-1} f(k)\frac{(p-1)\cdots(p-k)}{(-1)^{p-k}k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{p-2} f(k)(-1)^{p-k} C_{p-1}^{k}. \quad ①$$

可以证明,若 $p$ 是素数,且 $0 \leqslant k \leqslant p-1$,则

$$C_{p-1}^{k} \equiv (-1)^{k} \pmod{p}. \quad ②$$

我们可以用数学归纳法证明公式②.

当 $k=0$ 时,$C_{p-1}^{0} \equiv 1 \pmod{p}$ 显然成立.

对满足 $1 \leqslant k \leqslant p-1$ 的 $k$,假设 $C_{p-1}^{k-1} \equiv (-1)^{k-1} \pmod{p}$ 成立,

由 $p \mid C_{p}^{k}$ 及 $C_{p-1}^{k} = C_{p}^{k} - C_{p-1}^{k-1}$

可得 $C_{p-1}^{k} \equiv -(-1)^{k-1} = (-1)^{k} \pmod{p}$.

因而②式成立.

由①和②可知,$f(p-1) \equiv (-1)^{p} \sum_{k=0}^{p-2} f(k) \pmod{p}$.

上式可改写为对任一素数 $p$,有

$$f(0)+f(1)+\cdots+f(p-1) \equiv 0 \pmod{p}.$$

设 $S(f)=f(0)+f(1)+\cdots+f(p-1)$,

则有 $$S(f) \equiv 0 \pmod{p} \quad ③$$

③式对任一次数为 $d \leqslant p-2$ 的整系数多项式都成立.

由条件(2)可知 $S'(f) \equiv k \pmod{p}$

其中 $k$ 表示在集合 $\{0,1,\cdots,p-1\}$ 中满足 $f(n) \equiv 1 \pmod{p}$ 的那些数,由条件(1)可知 $1 \leqslant k \leqslant p-1$,

于是 $$S(f) \not\equiv 0 \pmod{p} \quad ④$$

③与④矛盾,于是 $d \geqslant p-1$.

# 第四章 素因数分解

4·1 如果正整数 $N(N>1)$ 的正约数的个数是奇数,求证 $N$ 是完全平方数.

(中国北京市初中三年级数学竞赛,1981 年)

[证 1] 设 $N$ 的标准分解式为

$$N=\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i}.$$

其中 $p_i$ 是素数,$\alpha_i$ 是正整数,$i=1,2,\cdots,k$.

则 $N$ 的所有正约数个数为

$$d(N)=\prod_{i=1}^{k}(\alpha_i+1).$$

若 $d(N)$ 是奇数,则每个 $\alpha_i+1$ 都是奇数,从而所有的 $\alpha_i$ 都是偶数.设 $\alpha_i=2\beta_i$, $\beta_i$ 是正整数,$i=1,2,\cdots,k$,于是

$$N=\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i}=\prod_{i=1}^{k}(p_i^{\beta_i})^2=(\prod_{i=1}^{k}p_i^{\beta_i})^2.$$

于是 $N$ 是完全平方数.

[证 2] 假设 $N$ 不是完全平方数,则 $\sqrt{N}$ 不是整数.

当 $N$ 是素数时,$N$ 只有两个正约数 1 和 $N$,$N$ 的正约数个数是偶数.

当 $N$ 是合数时,对于 $N$ 的每一个小于 $\sqrt{N}$ 的正约数 $d$,也必有一个大于 $\sqrt{N}$ 的正约数 $\frac{N}{d}$,因而 $N$ 的正约数个数也是偶数.

从以上可知,当 $N$ 不是完全平方数时,$N$ 的正约数个数必是偶数.

因此当 $N$ 的正约数个数是奇数时,$N$ 必为完全平方数.

4·2　设正整数 $n$ 的不同因数的个数为 $N(n)$，例如 24 有因数 1，2，3，4，6，8，12，24，所以 $N_{(24)}=8$. 试确定和

$$N_{(1)}+N_{(2)}+\cdots+N_{(1989)}$$

是奇数还是偶数.

（澳大利亚数学竞赛，1989 年）

[解]　因为当且仅当 $n$ 是平方数时，$N(n)$ 是奇数.

又因为　　$44^2<1989<45^2$，

所以 1，2，…，1989 中有 44 个完全平方数，即在数

$$N_{(1)},N_{(2)},\cdots,N_{(1989)}$$

中有 44 个奇数，其余为偶数，

于是　$N_{(1)}+N_{(2)}+\cdots+N_{(1989)}$ 是偶数.

4·3　证明正整数 $n$ 的正约数的个数不超过 $2\sqrt{n}$.

（第 23 届莫斯科数学奥林匹克，1960 年）

[证]　设 $d_1$ 是 $n$ 的一个正约数，则　$d_2=\frac{n}{d_1}$ 也是 $n$ 的一个正约数.

于是　　$\min\{d_1,d_2\}\leqslant\sqrt{n}$.

把 $n$ 的所有正约数两两配对(当 $n$ 为完全平方数时，$\sqrt{n}$ 除外)，从而正约数的总个数不超过 $\sqrt{n}+\sqrt{n}=2\sqrt{n}$.

4·4　数 20! 有多少个正整数因数?

（第 1 届墨西哥数学奥林匹克，1990 年）

[解]　由于小于 20 的素数为 2，3，5，7，11，13，17，19.

在 20! 的标准分解式中

2 的最高指数

$$=\left[\frac{20}{2}\right]+\left[\frac{20}{4}\right]+\left[\frac{20}{8}\right]+\left[\frac{20}{16}\right]$$
$$=18.$$

3 的最高指数

$$=\left[\frac{20}{3}\right]+\left[\frac{20}{9}\right]$$
$$=8.$$

5，7，11，13，17，19 的最高指数分别为 4，2，1，1，1，1.

于是，20! 的标准分解式为

$$20! = 2^{18} \cdot 3^{8} \cdot 5^{4} \cdot 7^{2} \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19.$$

于是20!中正约数的个数 $\tau(20!)$ 为

$$\begin{aligned}
&\tau(20!)\\
&= (18+1)(8+1)(4+1)(2+1)(1+1)(1+1)(1+1)(1+1)\\
&= 19 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2\\
&= 41040.
\end{aligned}$$

**4·5** 试求不定方程 $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y} + \frac{1}{(x+1)y} = \frac{1}{1991}$ 的正整数解的组数.

（日本数学奥林匹克，1991年）

**[解]** 已知方程可化为

$$1991y + 1991(x+1) + 1991 = (x+1)y,$$

$$(x+1)y - 1991(x+1) - 1991y = 1991,$$

$$(x+1)y - 1991(x+1) - 1991y + 1991^2 = 1991 + 1991^2.$$

$$[(x+1) - 1991](y - 1991) = 1991 \cdot 1992.$$

显然，已知方程的正整数解的个数等价于 $1991 \cdot 1992$ 的正约数的个数，由于

$$1991 \cdot 1992 = 2^3 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 83 \cdot 181.$$

所以 $1991 \cdot 1992$ 有

$$(3+1)(1+1)(1+1)(1+1)(1+1) = 64$$

个正约数，即已知方程有64组正整数解.

**4·6** 求自然数 $N$，使得它能被5和49整除，并且包括1和 $N$ 在内，它共有10个约数.

（基辅数学奥林匹克，1982年）

**[解]** 把数 $N$ 写成素因数分解的形式

$$N = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3} \cdot 7^{\alpha_4} \cdots p_n^{\alpha_n}.$$

其中 $\alpha_i \geqslant 0, \quad i = 1,2,\cdots,n.$

则它的所有约数的个数为

$$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)(\alpha_4+1)\cdots(\alpha_n+1) = 10.$$

由于 $5 \mid N, \quad 7^2 \mid N$，则

$$\alpha_3 + 1 \geqslant 2, \quad \alpha_4 + 1 \geqslant 3.$$

因此 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5, \cdots, \alpha_n$ 必然都等于0.即

$$N = 5^{\alpha_3} \cdot 7^{\alpha_4}.$$

由 $$(\alpha_3 + 1)(\alpha_4 + 1) = 10 = 2 \cdot 5,$$

可得 $$\alpha_3 = 1, \quad \alpha_4 = 4,$$

即本题有惟一解 $N = 5 \cdot 7^4$.

4·7　求最小的正整数 $n$,满足

(1) $n$ 恰有 144 个不同的正因数;

(2) 在 $n$ 的正因数中有 10 个连续整数.

(第 26 届国际数学奥林匹克候选题,1985 年)

[解]　由于 10 个连续整数中必有数被 $2^3, 3^2, 5, 7$ 整除,所以

$$n = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3} \cdot 7^{\alpha_4} \cdot 11^{\alpha_5} \cdots,$$

其中 $\alpha_1 \geqslant 3, \quad \alpha_2 \geqslant 2, \quad \alpha_3 \geqslant 1, \quad \alpha_4 \geqslant 1, \cdots$.

由于 $n$ 的正因数个数为

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1)(\alpha_4 + 1)(\alpha_5 + 1) \cdots = 144.$$

而 $$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1)(\alpha_4 + 1) \geqslant 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 48,$$

于是有 $$(\alpha_5 + 1) \cdots \leqslant 3.$$

所以至多有一个 $\alpha_j (j \geqslant 5)$ 为正数,并且 $\alpha_j$ 只能等于 1 或 2.

考虑方程　$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1)(\alpha_4 + 1)(\alpha_5 + 1) = 144$

关于 $\alpha_1 \geqslant 3, \quad \alpha_2 \geqslant 2, \quad \alpha_3 \geqslant 1, \quad \alpha_4 \geqslant 1, \quad \alpha_5 = 1$ 或 2 的所有的解,并使 $n$ 最小,由此可得

$$\alpha_1 = 5, \quad \alpha_2 = 2, \quad \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 1.$$

即 $$n = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 110880.$$

此时 $n$ 有连续正因数 $1, 2, 3, \cdots, 11, 12$.

4·8　有一个小于2000的四位数,它恰有14个正约数(包括1和本身),其中有一个素约数的末位数字是1.求这个四位数.

(中国上海市初中数学竞赛,1984 年)

[解]　设这个四位数为　$N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$,其中 $p_i$ 为素数,$\alpha_i$ 为自然数,$i = 1, 2, \cdots, k$.则 $N$ 的约数个数为

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1) = 14 = 2 \cdot 7 = 1 \cdot 14.$$

因为 $\alpha_i \geqslant 1$,则 $\alpha_i + 1 \geqslant 2$.所以 $k \leqslant 2$.

当 $k = 1$ 时,有 $$p_1^{13} < 2000,$$

这时有 $p_1 < 2$,这不可能.

所以必有 $k = 2.$

于是 $N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}.$

即 $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) = 2 \cdot 7.$

不妨设 $\alpha_1 > \alpha_2$,则 $\alpha_1 = 6, \quad \alpha_2 = 1.$

所以 $N = p_1^6 \cdot p_2.$

因为 $p_1^6 \cdot p_2 < 2000,$

所以 $p_1 \leqslant 3.$

这时 $p_1$ 的个位数不等于 1,只有 $p_2$ 的个位是 1,所以 $p_2 \geqslant 11.$

若 $p_1 = 3, \quad p_2 \geqslant 11$,则

$$N \geqslant 3^6 \cdot 11 > 2000.$$

所以 $p_1 = 2.$

于是 $N = 2^6 \cdot p_2.$

若 $p_2 = 11$,则 $N = 2^6 \cdot 11 = 704$ 不是四位数.

若 $p_2 = 31$,则 $N = 2^6 \cdot 31 = 1984.$

若 $p_2 \geqslant 41$,则 $N \geqslant 2^6 \cdot 41 > 2000.$

所以,所求的四位数只有 1984.

**4·9** $n$ 是满足下列条件的正整数中最小的数:

(1) $n$ 是 75 的倍数.

(2) $n$ 恰有 75 个正整数因子(包括 1 及本身).

试求$\frac{n}{75}$.

(第 8 届美国数学邀请赛,1990 年)

[解] 由条件(1),设 $n = 75k(k \in N)$.

因为 $75 = 5^2 \cdot 3,$

所以 $n = 5^2 \cdot 3k.$

又设 $n = 5^s \cdot 3^t p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m}.$

其中 $p_i(i = 1,2,\cdots,m)$ 为素数,$\alpha_i$ 为非负整数.

由条件(2),$n$ 的素因数分解式中,素数的指数应满足

$$(s+1) \cdot (t+1) \cdot (\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_m + 1) = 75.$$

因而其指数应为 2,4,4 或 2,24,或 4,14.

为使 $n$ 最小,显然为

$$n = 5^2 \cdot 3^4 \cdot 2^4.$$

于是 $$k = \frac{n}{75} = 3^3 \cdot 2^4 = 432.$$

4·10 自然数 $N$ 恰有 12 个正约数(包括 1 和 $N$),将它们按递增顺序编号:$d_1 < d_2 < \cdots < d_{12}$.已知下标为 $d_4 - 1$ 的正约数等于

$$(d_1 + d_2 + d_4) \cdot d_8.$$

试求自然数 $N$.

(第 23 届全苏数学奥林匹克,1989 年)

[**解**] 由 $N$ 的所有正约数满足 $d_1 < d_2 < \cdots < d_{12}$,可知

$$d_1 d_{12} = d_2 d_{11} = d_3 d_{10} = d_4 d_9 = d_5 d_8 = d_6 d_7.$$

且 $N$ 至多有 3 个素约数.

记 $$d_4 - 1 = k.$$

由题设可知 $d_1 + d_2 + d_4$ 是 $d_k$ 的约数,

所以 $d_1 + d_2 + d_4$ 也是 $N$ 的约数,并且

$$d_1 + d_2 + d_4 \geqslant d_5.$$

于是就有 $d_k = (d_1 + d_2 + d_4) \cdot d_8 \geqslant d_5 d_8 = N$.

另一方面 $$d_k \leqslant N.$$

于是 $$d_k = N.$$

从而有 $k = 12$, $d_4 = 13$, $d_5 = d_1 + d_2 + d_4$.

又 $d_1 = 1$,则 $d_5 = d_1 + d_2 + d_4 = d_2 + 14$.

由于 $d_2$ 是素数,并且 $d_2 \leqslant d_4 - 2 = 11$.

于是可对 $d_2 = 2,3,5,7,11$ 讨论.

若 $d_2 = 2$, 则 $d_5 = 16 = 2^4$, $N$ 的约数中还应有 $2^2, 2^3$ 等,这是不可能的.

若 $d_2 = 5$,则 $d_5 = 19$,此时 $N$ 的约数中已有 3 个素数 5,13,19,则 $d_3$ 应为合数,且其约数为 5,13 或 19,然而对于 $5 < d_3 < 13$ 是不可能的.

若 $d_2 = 7$,则 $d_5 = 21$,此时 $d_3$ 需满足 $7 < d_3 < 13$ 且有约数 3,7 或 13,这也是不可能的.

若 $d_2 = 11$,则 $d_5 = 25$,此时 $d_3$ 满足 $11 < d_3 < 13$,则 $d_3 = 12$,这时 $N$ 的约数中还应有 2,3,4,5,且应在 $d_1$ 与 $d_2$ 之间,这是不可能的.

所以 $d_2 = 3$,此时 $d_5 = 17$,又因为 $N$ 的约数中至多有三个素数,且 $3 < d_3 < 13$,因此只有 $d_3 = 3^2 = 9$.这时

$$N = 3^2 \cdot 13 \cdot 17 = 1989.$$

它恰有 12 个正约数.



**4·11** 数学老师把一个两位自然数 $n$ 的约数个数告诉了 $S$,把 $n$ 的各位数码和告诉了 $P$,$S$ 和 $P$ 是两位很聪明的学生,他们希望推导出 $n$ 的准确值,$S$ 和 $P$ 进行了如下的对话.

$P$:我不知道 $n$ 是多少.

$S$:我也不知道,但我知道 $n$ 是否偶数.

$P$:现在我知道 $n$ 是多少了.

$S$:现在我也知道了.

老师证实了 $S$ 和 $P$ 都是诚实可信的,他们的每一句话都是有根据的.

试问 $n$ 的值究竟是多少?为什么?

(中国国家集训队测验题,1988 年)

**[解]** 设 $n$ 的各位数码之和为 $p$,约数个数为 $s$.

第一句话说明:$2 \leqslant p \leqslant 17$.

这是因为 $P$ 说我不知道 $n$ 是多少.如果 $n = 10$,则 $p = 1$,如果 $n = 99$,则 $p = 18$,因此若 $P$ 知道 $p = 18$,或知道 $p = 1$,就知道 $n$ 是多少了.

第二句话说明:$s = 2,3,8,10,12$.

这是因为 $s \neq 1$(否则 $n = 1$),$s \neq 11$(否则 $n = 2^{10}$ 就不是两位数).

又 $s \leqslant 12$,否则 $s = 13$,$2^{12}$ 不是两位数.$s > 13$, $n$ 也不可能是两位数.

若 $s = 7$,则 $n = 2^6 = 64$ 与 $S$ 说不知道矛盾,

若 $s = 9$,则 $n = 2^2 \cdot 3^2 = 36$ 与 $S$ 说不知道矛盾,

若 $s = 4$,则 $n = 2 \cdot 7 = 14$ 或 $n = 3 \cdot 5$,即或为奇数或为偶数.

若 $s = 5$,则 $n = 2^4 = 16$ 或 $n = 3^4 = 81$,或为奇数或为偶数.

若 $s = 6$,则 $n = 2^2 \cdot 3 = 12$,或 $n = 3^2 \cdot 2 = 18$,或 $n = 3^2 \cdot 5 = 45$

以上都使 $S$ 无法确定 $n$ 是否为偶数.

而 $s = 2$ 时,$n$ 必为奇素数.

$s = 3$ 时,$n$ 必为奇素数的平方.

$s = 8,10,12$ 时,$n$ 必为偶数.

第三句说明:$n = 11,30,59,89$,相应的 $p = 2,3,14,17$.

这是因为对应于 $p = 4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,15,16$ 时,都各有两个值适合 $s = 2,3,8,10$ 或 12.

例如,13 或 31,23 或 41,24 或 42,43 或 61,17 或 71,54 或 72,37 或 73,29 或 83;48 或 84,49 或 67,78 或 96,79 或 97.

而对应于 $p = 2,3,14,17$ 均仅有一个 $n$ 的值适合 $s = 2,3,8,10,12$,即 $n = 11,30,59$ 或 89(其实此时只有 $s = 2$ 和 8).

第四句说明:$n = 30$.

这是因为由第三句 $s = 2$ 时,$n$ 可以为 11,59 和 89,$S$ 无法确定 $n$ 的值,所以只有 $s = 8$,即 $n = 30$.

**4·12** 矩形 $R$ 的两边长为正整数 $a,b$,用平行于任一边的一组截线将 $R$ 分割为全等的整数边长的小矩形,分割的方法数(包括整个 $R$ 的一种)记为 $D(a,b)$.试求 $R$ 的周长 $p$,使

$$\frac{D(a,b)}{p}$$

为最大.

(奥地利一波兰数学竞赛,1988年)

[解] 平行于一边的分割法数等于另一边的约数的个数.

记 $a$ 的正约数个数为 $d(a)$,则

$$f(a,b) = \frac{D(a,b)}{p} = \frac{d(a)+d(b)-1}{2(a+b)}.$$

我们有 $$f(2,2) = \frac{2+2-1}{2(2+2)} = \frac{3}{8}.$$

下面证明:对任何 $a,b \in N$

$$f(a,b) \leqslant \frac{3}{8}.$$

等号仅在 $a = b = 2$ 时成立.由于

$$\begin{aligned}&\frac{3}{8} - f(a,b)\\ =& \frac{3}{8} - \frac{d(a)+d(b)-1}{2(a+b)}\\ =& \frac{2+3a-4d(a)+2+3b-4d(b)}{8(a+b)}.\end{aligned}$$

数论卷

故只要证明对任何 $n \in N$,

$$2+3n \geqslant 4d(n), \qquad ①$$

且等号仅在 $n=2$ 时成立.

$$n=1 \text{时} \quad 2+3\cdot 1 \geqslant 4 = 4d(1).$$

① 式显然成立.

$n=2$ 时,有等式

$$2+3\cdot 2 = 4d(2) = 8.$$

下面证明 $n \geqslant 3$ 时,$2+3n > 4d(n)$.

令 $n$ 的标准分解式为

$$n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i},$$

其中 $p_i$ 为素数,$\alpha_i$ 为自然数,$i=1,2,\cdots,k$.

则 $n$ 的所有约数的个数为

$$d(n) = \prod_{i=1}^{k}(1+\alpha_i).$$

下面用数学归纳法(对 $\alpha$)证明:对任何 $p \geqslant 2$, $\alpha \in N$,总有

$$p^{\alpha} \geqslant 1+\alpha. \qquad ②$$

$\alpha=1$ 时,$p^{\alpha}=p^1 \geqslant 2 = 1+1$,② 式成立;

假设 $\alpha=t$ 时,有 $p^t \geqslant 1+t$.

那么 $\alpha = t+1$ 时,

$$p^{t+1} = p^t \cdot p \geqslant p(1+t) \geqslant 1+(t+1).$$

因而有 $$p^{\alpha} \geqslant 1+\alpha.$$

如果 $n$ 有一素因子 $p \geqslant 3$,则对任何 $\alpha \in N$,由数学归纳法易证

$$3p^{\alpha} > 4(1+\alpha).$$

因而 $$3\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i} > 4\prod_{i=1}^{k}(1+\alpha_i),$$

于是 $$2+3n > 4d(n).$$

如果 $n=2^{\alpha}$,则对 $\alpha \in N$,且 $\alpha > 1$,由数学归纳法易证

$$3\cdot 2^{\alpha} > 2(1+2\alpha).$$

从而 $$2+3n > 4(1+\alpha).$$

由以上

$$\frac{3}{8} - f(a,b) \geqslant 0,$$

$$f(a,b) \leqslant \frac{3}{8}.$$

于是仅当 $a=b=2$ 时，$f(a,b)$ 有最大值$\frac{3}{8}$.

**4·13** (1) 在保险室内放着编号为 $1,2,3,\cdots,n$ 的 $n$ 个保险柜，原来都锁着. 一个职员进行一系列名之为 $T_1,T_2,\cdots,T_n$ 的操作，这里 $T_k(1\leqslant k\leqslant n)$ 是指对所有那些而且仅仅那些编号为 $k$ 的倍数的保险柜进行一次由上锁变开锁或由开锁变上锁的操作. 完成这 $n$ 步操作之后发现，现在是且只是那些编号为完全平方数的保险柜的锁开着. 请对此给予数学证明.

(2) 研究出几种在数学上有意义的操作程序，使得能分别打开编号为完全立方数的柜；或形如 $2m^2$ 的数的柜，或形如 $m^2+1$ 的数的柜，或你自选的非平凡的类似数的保险柜.

（第 28 届美国普特南数学竞赛，1967 年）

［证］ (1) 在 $n$ 步操作都执行后，第 $m$ 号保险柜($1\leqslant m\leqslant n$)，当且仅当 $m$ 有奇数个因子时成为开锁.

设 $m$ 的标准分解式为

$$m = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}.$$

则 $m$ 的所有约数的个数为

$$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1).$$

当且仅当 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 是偶数时，约数个数为奇数，此时 $m$ 为完全平方数.

(2) 记 $T_k$ 为对号码是 $2k$ 的倍数的保险柜进行一次开锁或上锁的操作，则可得号码为 $2m^2$ 的柜锁都开着.

若 $T_k$ 对柜号 $i$($i-1$ 是 $k$ 的倍数) 的操作，并约定 1 号柜只被 $T_1$ 所作用，则编号为 $m^2+1$ 的柜锁都开着.

**4·14** 对每个自然数 $k\geqslant 2$，定义数列 $a_n(k)$ 为

$$a_0 = k,$$

$$a_n = \tau(a_{n-1}), \quad n=1,2,\cdots,$$

其中 $\tau(a)$ 是 $a$ 的不同的正因数的个数.

求出所有的 $k$，使数列中没有平方数.

（第28届国际数学奥林匹克候选题，1987年）

［解］ (1) 若 $k$ 为素数，则

$$a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = 2,$$

其中没有平方数.

(2) 设 $a_n(k)$ 中没有平方数.

记 $a_{n-1} = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_h^{\alpha_h} (\alpha_i \geqslant 1, \quad i = 1,2,\cdots,h)$. 则

$$a_n = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\cdots(\alpha_h + 1).$$

若 $$a_{n-1} > 2,$$

显然有 $$a_n < a_{n-1}.$$

如果 $a_{n-1}$ 是合数，必有 $h > 1$ 或者 $h = 1$，而 $\alpha_1$ 是大于2的奇数(因为 $a_{n-1}$ 不是平方数).

此时 $a_n$ 也为合数.

这就导致一个完全由合数组成的严格递减的数列，这是不可能的.

所以 $a_{n-1}$ 为素数，即数列的各项都是素数.

特别地，$k$ 为素数.

因此，$k$ 为素数时，数列中没有平方数.

**4·15** 对前 $k$ 个素数 $2,3,5,\cdots,p_k(k > 4)$，求出它们的一切可能的乘积，在每一个乘积中，每个素数至多出现一次(例如，$3\cdot5, 3\cdot5\cdots p_k$，$11\cdot13$，$7$ 等等)，将所有这些乘积的和记作 $S$，证明数 $S+1$ 可以分解为 $2k$ 以上个素因数的乘积.

（第30届莫斯科数学奥林匹克，1967年）

［证］ 由题设可得

$$S + 1 = (2+1)(3+1)(5+1)(7+1)\cdots(p_k+1).$$

因为 $3,5,\cdots,p_k$ 是奇数，则 $(3+1),(5+1),(7+1),\cdots,(p_k+1)$ 每一个都至少分解成两个素因数之积.

又因为 $p_k > 4$ 且 $7+1 = 2\cdot2\cdot2$，则 $S+1$ 至少分解为 $2k$ 以上个素因数的乘积.

**4·16** 已给一个正整数的所有正因数的乘积，是否总能惟一确定这个正整数.

（加拿大数学奥林匹克训练题，1988年）

［解］ 设 $d$ 为 $n$ 的因数，则 $\frac{n}{d}$ 也是 $n$ 的因数.

又设 $P(n)$ 为 $n$ 的所有正因数的乘积,即

$$P(n)=\prod_{d\mid n}d.$$

又有 $$P^2(n)=\prod_{d\mid n}d\cdot\prod_{d\mid n}\frac{n}{d}=n^{\tau(n)},$$

其中 $\tau(n)$ 是 $n$ 的正因数的个数.从而

$$P(n)=n^{\frac{\tau(n)}{2}}.$$

若有 $m$, $n$ 满足 $m^{\frac{\tau(m)}{2}}=n^{\frac{\tau(n)}{2}}$,

即 $$m^{\tau(m)}=n^{\tau(n)}. \qquad ①$$

这表明,$m$ 和 $n$ 的素因数完全相同,并且每个素因数 $p$ 在 $m$ 的分解式中出现的次数与 $n$ 的分解式中出现的次数的比是 $\tau(n):\tau(m)$.

若 $\tau(n)>\tau(m)$,则每一个素因数 $p$ 在 $m$ 的分解式中出现的次数大于在 $n$ 的分解式中出现的次数,从而 $m$ 的因数个数 $\tau(m)$ 大于 $n$ 的因数个数 $\tau(n)$,出现矛盾,所以 $\tau(n)\leqslant\tau(m)$.

同理 $$\tau(n)\geqslant\tau(m).$$

于是 $$\tau(n)=\tau(m).$$

从而由 ① 式得 $$m=n.$$

因此由因数的乘积 $P(n)=n^{\frac{\tau(n)}{2}}$ 可以惟一确定 $n$.

**4·17** 设 $\delta(x)$ 表示正整数 $x$ 的最大奇约数.求证对于一切正整数 $x$,不等式

$$\left|\delta(1)+\frac{\delta(2)}{2}+\cdots+\frac{\delta(x)}{x}-\frac{2}{3}x\right|<1$$

成立.

(第 32 届美国普特南数学竞赛,1971 年)

**[证]** 显然,奇数的最大奇约数就是这个奇数本身.

偶数 $2k$ 与 $k$ 有相同的奇约数,因而它们的最大奇约数相等,即

$$\delta(2k+1)=2k+1,$$

$$\delta(2k)=\delta(k).$$

记 $S(x)=\delta(1)+\frac{\delta(2)}{2}+\cdots+\frac{\delta(x)}{x}$.则

$$S(2k)=\delta(1)+\frac{\delta(2)}{2}+\frac{\delta(3)}{3}+\frac{\delta(4)}{4}+\cdots+\frac{\delta(2k-1)}{2k-1}+\frac{\delta(2k)}{2k}$$

$$= 1 + \frac{\delta(1)}{2} + 1 + \frac{\delta(2)}{4} + \cdots + 1 + \frac{\delta(k)}{2k}$$

$$= k + \frac{S(k)}{2}.$$

$$S(2k+1) = S(2k) + \frac{\delta(2k+1)}{2k+1}$$

$$= k + \frac{S(k)}{2} + 1.$$

当 $x = 1$ 和 $x = 2$ 时,因为

$$\left|\delta(1) - \frac{2}{3}\right| = \left|1 - \frac{2}{3}\right|$$

$$= \frac{1}{3} < 1,$$

$$\left|\delta(1) + \frac{\delta(2)}{2} - \frac{2}{3} \cdot 2\right|$$

$$= \frac{1}{6} < 1,$$

故不等式成立.

假设不等式(1) 对满足 $x \leqslant 2m(m \geqslant 1)$ 的一切整数 $x$ 都成立,则

$$\left|S(2m+1) - \frac{2}{3} \cdot (2m+1)\right|$$

$$= \left|m + 1 + \frac{S(m)}{2} - \frac{4m}{3} - \frac{2}{3}\right|$$

$$= \left|\frac{S(m)}{2} - \frac{m}{3} + \frac{1}{3}\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\left|S(m) - \frac{2}{3}m\right| + \frac{1}{3}$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{3} < 1.$$

$$\left|S(2m+2) - \frac{2}{3} \cdot (2m+2)\right|$$

$$= \left|m + 1 + \frac{S(m+1)}{2} - \frac{4m}{3} - \frac{4}{3}\right|$$

$$= \left|\frac{S(m+1)}{2} - \frac{m}{3} - \frac{1}{3}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|S(m+1) - \frac{2}{3}(m+1)\right|$$

$\leqslant \frac{1}{2} < 1.$

因而不等式对 $x = 2m + 1$ 和 $x = 2m + 2$ 成立. 于是不等式对一切正整数 $x$ 均成立.

**4·18** 假设 $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$,这里 $2^p - 1$ 是素数. 证明数 $n$ 的所有不等于 $n$ 本身的约数之和恰好等于 $n$.

(匈牙利数学奥林匹克,1903 年)

**[证]** 设 $q = 2^p - 1$ 为素数.

数 $n = 2^{p-1}q$ 的一切小于它本身的约数为

$$1,\ 2,\ 2^2,\ \cdots,\ 2^{p-2},\ 2^{p-1};$$
$$q,\ 2q,\ 2^2q,\ \cdots,\ 2^{p-2}q.$$

由于

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{p-2} + 2^{p-1} = 2^p - 1 = q,$$
$$q + 2q + 2^2q + \cdots + 2^{p-2}q = (2^{p-1} - 1)q,$$

则 $n$ 的一切小于它本身的约数之和为

$$\begin{aligned}&2^p - 1 + (2^{p-1} - 1)(2^p - 1)\\ =\ &2^{p-1}(2^p - 1)\\ =\ &n.\end{aligned}$$

**4·19** 设 $\sigma(N)$ 为 $N$ 的所有正整数因子之和(其中包含 1 与 $N$ 自身),例如 $p$ 是一个素数,则 $\sigma(p) = p + 1$. 当 $\sigma(N) = 2N + 1$ 称正整数 $N$ 为拟完全的. 证明每个拟完全数是一个奇数的平方.

(第 37 届美国普特南数学竞赛,1976 年)

**[证]** 设 $N = 2^{\alpha}p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_k^{\beta_k}$. 其中 $\alpha$ 与 $\beta_i$ 是非负整数,并且 $p_i$ 是不同的奇素数,$i = 1,2,\cdots,k$.

由 $\sigma(N)$ 为 $N$ 的所有正整数因子之和,则

$$\sigma(N) = \sigma(2^{\alpha}) \cdot \sigma(p_1^{\beta_1})\cdots\sigma(p_k^{\beta_k}).$$

因为 $\sigma(N) = 2N + 1$ 是奇数,则

$$\sigma(p_i^{\beta_i})\text{ 是奇数,且 } 1 \leqslant i \leqslant k.$$

由于 $$\sigma(p_i^{\beta_i}) = 1 + p_i + p_i^2 + \cdots + p_i^{\beta_i},$$

所以当且仅当 $\beta_i$ 为偶数时,$\sigma(p_i^{\beta_i})$ 为奇数. 这是因为上式右边为奇数个奇数之和,所以为奇数.

由 $\beta_i$ 为偶数($1 \leqslant i \leqslant k$),可知

$$p_1^{\beta_1}\cdot p_2^{\beta_2}\cdots p_k^{\beta_k}$$

是一个完全平方数,设为 $M^2$,且 $M$ 为奇数,从而

$$N = 2^{\alpha}M^2,\alpha \geqslant 0. \quad ①$$

下面我们证明 $\alpha = 0$.

因为 $N$ 是拟完全数,则

$$\sigma(N) = 2N + 1 = 2^{\alpha+1}M^2 + 1. \quad ②$$

由 ① 可得

$$\begin{aligned}\sigma(N) &= \sigma(2^{\alpha})\cdot\sigma(M^2)\\ &= (2^{\alpha+1}-1)\sigma(M^2).\end{aligned}$$

再由 ② 有

$$2^{\alpha+1}M^2 + 1 = (2^{\alpha+1}-1)\sigma(M^2).$$

$$M^2 + 1 \equiv 0 \pmod{2^{\alpha+1}-1}. \quad ③$$

如果 $\alpha > 0$,则

$$2^{\alpha+1} - 1 \equiv 3 \pmod 4.$$

所以 $2^{\alpha+1} - 1$ 有一素因子 $p \equiv 3 \pmod 4$.

由 ③ 式得

$$M^2 + 1 \equiv 0 \pmod p.$$

即 $-1$ 是 $p$ 的二次剩余,这与 $p \equiv 3 \pmod 4$ 相矛盾.

于是 $\alpha = 0$.

再由 ①,$N$ 是完全平方数,且为奇数的平方.

**4·20** 用 $S$ 表示数列 $1,2,3,\cdots,2^n$ 中各项的最大奇数因子之和,求证 $3S = 4^n + 2$.

(前联邦德国数学竞赛,1982 年)

**[证]** 用数学归纳法.

(1)$n = 1$ 时,数列 1,2 中各项的最大奇因子分别为 1,1,其和

$$S = 1 + 1 = 2$$

又

$$4^n + 2 = 6 = 3S.$$

所以 $n = 1$ 时,命题成立.

(2) 假设数列 $1,2,3,\cdots,2^{n-1}$ 中各项的最大奇因子之和为

$$\frac{4^{n-1}+2}{3}.$$

下面讨论数列

$$1,2,3,\cdots,2^n-1,2^n.$$

中各项的最大奇因子之和 $S$.

由于奇数的最大奇因子就是本身，所以

$$S=1+3+5+\cdots+(2^n-1)+S'.$$

其中 $S'$ 为$\{2,4,6,8,\cdots,2^n\}$ 中各项的最大奇因子之和.

由于$\{2,4,6,8,\cdots,2^n\}$ 中各项的最大奇因子之和等于$\{1,2,3,4,\cdots,2^{n-1}\}$ 中各项的最大奇因子之和，所以由归纳假设有

$$S'=\frac{4^{n-1}+2}{3}.$$

而 $$1+3+5+\cdots+(2^n-1)=(2^{n-1})^2.$$

于是有 $$S=(2^{n-1})^2+\frac{4^{n-1}+2}{3}$$
$$=\frac{4^n+2}{3}.$$

因此命题对 $n$ 也成立.

由以上，对所有自然数 $n$，总有 $3S=4^n+2$.

4·21　求 $N=19^{88}-1$ 的所有形如 $d=2^a\cdot3^b$($a,b$ 为自然数)的因子 $d$ 之和.

(奥地利数学竞赛，1988 年)

[解]
$$\begin{aligned}N&=19^{88}-1\\&=(20-1)^{88}-1\\&=(4\cdot5-1)^{88}-1\\&=-C_{88}^{1}4\cdot5+C_{88}^{2}4^2\cdot5^2-C_{88}^{3}4^3\cdot5^3+\cdots\\&\quad-C_{88}^{87}4^{87}5^{87}+C_{88}^{88}4^{88}5^{88}\\&=-2^5\cdot55+2^6M\\&=2^5(-55+2M).\end{aligned}$$

其中 $M$ 为整数.

所以，$N$ 的标准分解式中，2 的最高次幂是 5.

另一方面

$$\begin{aligned}N&=(2\cdot9+1)^{88}-1\\&=C_{88}^{1}2\cdot9+C_{88}^{2}2^2\cdot9^2+\cdots+C_{88}^{88}2^{88}\cdot9^{88}\\&=3^2\cdot2\cdot88+3^3\cdot T\end{aligned}$$

$$=3^2(2\cdot 88+3T)$$

其中 $T$ 为整数.

所以,在 $N$ 的标准分解式中,3 的最高次幂是 2. 即

$$N=2^5\cdot 3^2\cdot L.$$

其中 $L$ 中没有因数 2 和 3.

于是,$N$ 中所有形如 $d=2^a\cdot 3^b$ 的因子之和为

$$(2+2^2+2^3+2^4+2^5)(3+3^2)=744.$$

4·22　设 $n$ 为自然数,$n+1$ 能被 24 整除,求证 $n$ 的全体约数之和也能被 24 整除.

（第 30 届美国普特南数学竞赛,1969 年）

［证］　由题意　$24\mid n+1$

等价于
$$\begin{cases} n\equiv -1 \pmod 3, \\ n\equiv -1 \pmod 8. \end{cases}$$

设 $d$ 是 $n$ 的一个约数,即

$$d\mid n.$$

则有
$$d\equiv 1 \text{ 或 } 2 \pmod 3,$$
$$d\equiv 1,3,5 \text{ 或 } 7 \pmod 8.$$

再由　$d\cdot\dfrac{n}{d}=n\equiv -1\pmod 3$ 或 $\pmod 8$.

可知,仅有下列几种可能

$$d\equiv 1,\frac{n}{d}\equiv 2 \pmod 3,$$

$$d\equiv 1,\frac{n}{d}\equiv 7 \pmod 8,$$

$$d\equiv 3,\frac{n}{d}\equiv 5 \pmod 8.$$

反之,以上由三个同余式也可得

$$n\equiv -1 \pmod 3 \text{ 或} \pmod 8.$$

于是有
$$d+\frac{n}{d}\equiv 0 \pmod 3,$$

$$d+\frac{n}{d}\equiv 0 \pmod 8,$$

即
$$d+\frac{n}{d}\equiv 0 \pmod{24}.$$

因而对于 $n\equiv -1\pmod 3$,$n$ 不是完全平方数,所以　$d\neq\dfrac{n}{d}$.

所以 $n$ 的约数两两互异,即 $n$ 的全体约数之和一定能被 24 整除.

4·23　$f(n)$ 是对一切正整数 $n$ 有定义的函数,且

$$f(1)=1,$$
$$f(n)=(-1)^k \quad (n>1,\quad k\text{ 是 }n\text{ 的素约数的个数}).$$

例如 $f(9)=(-1)^2,\quad f(20)=(-1)^3.$

令
$$F(n)=\sum_{d\mid n}f(d).$$

$d\mid n$ 表示 $d$ 是 $n$ 的约数,上式表示对 $n$ 的一切约数 $d$ 的函数 $f(d)$ 求和.求证 $F(n)=0$ 或 1.问对怎样的 $n$,$F(n)=1$?

(第 22 届美国普特南数学竞赛,1961 年)

[证]　当 $n=1$ 时,

$$F(1)=f(1)=1.$$

当 $n>1$ 时,设 $n=\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i}$,其中 $p_i$ 是不同的素数,$\alpha_i$ 是正整数,$i=1,2,\cdots,k$.

$n$ 的约数是形如

$$d=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_k^{\beta_k},\quad 0\leqslant\beta_i\leqslant\alpha_i,\quad i=1,2,\cdots,k\text{ 的一切数}.$$

所以
$$\begin{aligned}f(d)&=(-1)^{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_k}\\&=(-1)^{\beta_1}\cdot(-1)^{\beta_2}\cdots(-1)^{\beta_k}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F(n)&=\sum_{d\mid n}f(d)\\&=\sum_{(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k)}(-1)^{\beta_1}(-1)^{\beta_2}\cdots(-1)^{\beta_k}\\&=\sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1}(-1)^{\beta_1}\cdots\sum_{\beta_k=0}^{\alpha_k}(-1)^{\beta_k}.\end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned}\sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1}(-1)^{\beta_1}&=1+(-1)+1+(-1)+\cdots+(-1)^{\alpha_1}\\&=\begin{cases}1, & \alpha_1\text{ 是偶数},\\0, & \alpha_1\text{ 是奇数}.\end{cases}\end{aligned}$$

…………

$$\sum_{\beta_k=0}^{\alpha_k}(-1)^{\beta_k} = 1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots + (-1)^{\alpha_k}$$

$$= \begin{cases} 1, & \alpha_k \text{ 是偶数}, \\ 0, & \alpha_k \text{ 是奇数}. \end{cases}$$

所以　$F(0) = 0$ 或 1.

当且仅当 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ 都是偶数，即 $n$ 是完全平方数时，$F(n) = 1$.

**4·24**　在 3·3 的正方形表的格子中，填上九个不同的自然数，使得每行三数相乘，每列三数相乘，所得的六个乘积彼此相等(我们用 $P$ 表示这个乘积).

(1) 证明这种填数法是可以实现的.

(2) 试确定 $P$ 能取 1990, 1991, 1992, 1993, 1994, 1995 这六个数中的哪些值?

(3) 试求 $P$ 的最小值，说明理由.

（中国北京市初中二年级数学竞赛，1991 年）

**[解]**　(1) 如图填上的九个数，每行、每列三个数的乘积均为 120.

| 2 | 3 | 20 |
|---|---|---|
| 4 | 5 | 6 |
| 15 | 8 | 1 |

(2) 显然，所填的九个数应是 $P$ 的九个不同的约数，并且这九个约数不能包括 $P$，因而 $P$ 的约数个数不小于 10.

在 1990, 1991, 1992, 1993, 1994, 1995 这六个数中：

$1990 = 2 \cdot 5 \cdot 199$，共有 8 个不同的约数；

$1991 = 11 \cdot 181$，共有 4 个不同的约数；

$1992 = 2^3 \cdot 3 \cdot 83$，共有 16 个不同的约数；

$1993 = 1 \cdot 1993$，共有 2 个不同的约数；

$1994 = 2 \cdot 997$，共有 4 个不同的约数；

$1995 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19$，共有 16 个不同的约数.

显然，$P$ 不能取 1990, 1991, 1993, 1994.

$P$ 可能取的值为 1992 和 1995，又

$P = 1992$ 时　　　　　$P = 1995$ 时

| 3 | 4 | 166 |
|---|---|---|
| 2 | 83 | 12 |
| 332 | 6 | 1 |

| 3 | 5 | 133 |
|---|---|---|
| 7 | 19 | 15 |
| 95 | 21 | 1 |

| $a$ | $b$ | $\frac{cd}{e}$ |
|---|---|---|
| $c$ | $d$ | $\frac{ad}{e}$ |
| $\frac{bd}{e}$ | $\frac{ac}{e}$ | $e$ |

(3) 一般情况下,我们在方格表的左上角的$2\times2$的方格中,任填四个不同的自然数$a,b,c,d$.在右下角的格子中填入与它们都不同的自然数$e$.

其余四个格分别填入$\frac{cd}{e},\frac{ab}{e},\frac{bd}{e},\frac{ac}{e}$,

就可使

$$P=\frac{abcd}{e}.$$

所以只须选$a,b,c,d$使得$\frac{cd}{e},\frac{ab}{e},\frac{bd}{e},\frac{ac}{e}$均为自然数,且它们一定是两两不等的.

在一般情况下,我们可以认为$e$小于$a,b,c,d$.若不然,我们适当交换行与列,使最小的数变到右下角即可,此时并不影响$P$的值.

取$e=1$,乘积$P=\frac{abcd}{e}$取最小值显然为$2\cdot3\cdot4\cdot5=120$,如(1)中的表所示.

当$e=2$时,$P\geqslant180$.

当$e=3$时,$P\geqslant280$.

当$e=4$时,$P\geqslant420$.

当$e>5$时,$\frac{abcd}{e}>\frac{e^4}{e}>125>120$.

因此,$P$所取的最小值为120.

4·25　找出具有下列性质的一切正整数$n$:

使集合$\{n,\ n+1,\ n+2,\ n+3,\ n+4,\ n+5\}$可以分成两个不相交的非空子集合,并且一个子集中所有元素的积与另一个子集中所有元素的积相等.

(第12届国际数学奥林匹克,1970年)

[解1]　假设存在自然数$n$满足题设的性质,即集合$\{n,\ n+1,\ n+2,\ n+3,\ n+4,\ n+5\}$能够分成两个非空的不相交的子

集,其中一个子集的所有元素之积等于另一个子集中的所有元素之积.

对 $n$, $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$, $n+5$进行素因数分解,若题设的要求能实现,则每一个素因数至少在上述六个元素中的两个元素中出现,即必然存在素数 $p$,能整除

$$n,\quad n+1,\quad n+2,\quad n+3,\quad n+4,\quad n+5$$

这六个连续自然数中的至少两个数,因此,这样的素数 $p$ 只能是2,3或5.

若有素因子5,则只能在 $n$ 和 $n+5$ 中出现,因此,数 $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$ 仅有素因子2和3.

由于在四个连续数中恰好只有两个是奇数,这两个奇数决不可能有素因子2,即只可能是素因子3,所以这两个奇数必须是3的整数次幂,又因为这两个奇数是相邻奇数,则有

$$3^k-3^m=2\quad(\text{或}-2).$$

其中 $k>1$, $m>1$.

然而,这个等式不可能成立.

因此,满足题设条件的正整数 $n$ 不存在.

**[解2]** 首先证明:把已知集合分成乘积相等的两个子集,不可能为一个子集含一个数,另一个子集含5个数.这是因为最大的数是 $n+5$,而下面的不等式显然成立:

$$n+5<4(n+3)<(n+3)(n+4).$$

因此,这六个数不能按1,5分成两个子集.

下面再证明:这六个数也不能按2,4分成两个子集.这是因为

$n=1$时,$1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6=2^4\cdot3^2\cdot5$不是完全平方数,因而集合$\{1,2,3,4,5,6\}$不可能分成两个各元素乘积相等的子集;

$n\geqslant2$时,由

$$n(n+1)(n+2)(n+3)\geqslant2(n+2)\cdot3(n+3)>(n+4)(n+5)$$

可知,也不能把已知集合按2,4分开.

因此,要使结论成立,两个子集只能都是三个数,我们把两个子集写成

$$\{n+i,\quad n+k,\quad n+5\},\ \{n+l,\quad n+j,\quad n+s\}.$$

且每个子集中的三个数都按从小到大排列,显然有$1\leqslant k\leqslant4$.对 $k$ 分

情况讨论.

(1) 若 $k=1$, 则 $i=0$.

这两个集合为 $\{n, n+1, n+5\}$ 和 $\{n+2, n+3, n+4\}$, 然而

$$n(n+1)(n+5)<(n+1)(n+3)(n+4) <(n+2)(n+3)(n+4).$$

显然不合题意.

(2) 若 $k=2$,则 $i=0$ 或 1,此时有

$$n(n+2)(n+5)<(n+1)(n+3)(n+4),$$

$$(n+1)(n+2)(n+5)>n(n+3)(n+4).$$

显然也不合题意.

(3) 若 $k=3$ 或 $k=4$,除去明显不相等的情形之外,只有两种可能:

$$n(n+3)(n+5)=(n+1)(n+2)(n+4),$$

$$n(n+4)(n+5)=(n+1)(n+2)(n+3).$$

由此得到的两个关于 $n$ 的二次方程

$$n^2+n-8=0, \quad n^2+3n-2=0$$

均无正整数解.

因此,不存在满足题设条件的正整数 $n$.

**4·26** 整数9可以表示成两个连续整数之和,$9=4+5$,同时,9可以用两种不同的方法写成连续自然数的和 $9=4+5=2+3+4$.

问是否有这样的自然数 $N$.

(1) 它是 1990 个连续整数的和;

(2) 它恰能以 1990 种不同的方法表示成连续整数的和.

(第 31 届国际数学奥林匹克预选题,1990 年)

**[解]** 如果条件(1) 被满足,则

$$N=n+(n+1)+(n+2)+\cdots+(n+1989) =\frac{1}{2}\cdot 1990(2n+1989) =995(2n+1989). \quad ①$$

由 ①,$N$ 必为奇数.

设 $N$ 可以写成 $k+1$ 个($k$ 为自然数) 连续自然数之和,且这 $k+1$

个数中最小者为 $m$，则

$$N = m + (m+1) + \cdots + (m+k)$$
$$= \frac{1}{2}(k+1)(2m+k),$$
$$2N = (k+1)(2m+k). \qquad ②$$

由 ① 有

$$1990(2n+1989) = (k+1)(2m+k).$$

因此，满足上式的$(m,k)$有多少对，则 $N$ 就有多少种方法写成连续$k+1$个自然数之和.

由 ② 及 $m$ 是自然数可知

$$k+1 \mid 2N, \qquad k+1 < k+2m.$$

所以 $$k+1 < \sqrt{2N}.$$

反之，如果有一个 $2N$ 的约数 $< \sqrt{2N}$，记这个约数为 $k+1$，则

$$2N = (k+1)c.$$

其中 $k+1 < c$.

可以把 $c$ 记为 $2m+k$，　$m \in N$.

因为 $N$ 是奇数，所以 $k+1$ 与 $c$ 不可能都是偶数.因此，当 $k$ 是奇数时，$c$ 是奇数，当 $k$ 是偶数时，$c$ 是偶数，因此可以把 $c$ 记为 $2m+k$.

于是 $$2N = (k+1)(2m+k).$$

这就说明，当 $N$ 为奇数时，若 $N$ 可以写成多于一个的连续自然数之和的形式有 $l$ 种，则 $l$ 就是$2N$的大于1且小于 $\sqrt{2N}$ 的约数的个数.

由 ① $$N = 995(2n+1989),$$
$$2N = 1990(2n+1989)$$
$$= 2 \cdot 5 \cdot 199(2n+1989)$$
$$= 2^1 \cdot 5^a \cdot 199^b p_1^{b_1} p_2^{b_2} \cdots p_k^{b_k}.$$

由于 $N$ 有 1990 种不同的分法，把 1 个自然数的情况考虑在内，则 $2N$ 的约数个数为

$$(1+1)(a+1)(b+1)(b_1+1)\cdots(b_k+1)$$
$$= 2 \cdot 1991$$
$$= 2 \cdot 11 \cdot 181.$$

其中　$a, b \in N$，　$b_i \in N \cup \{0\}$，　$i = 1, 2, \cdots, k$.

于是 $$b_1 = b_2 = \cdots = b_k = 0,$$

$$(a+1)(b+1)=11\cdot 181,$$

则 $$\begin{cases}a=10,\\ b=180,\end{cases} \text{或} \begin{cases}a=180,\\ b=10.\end{cases}$$

即 $N=5^{10}\cdot 199^{180}$ 或 $N=5^{180}\cdot 199^{10}$.

**4·27** 对于怎样的 $k$,可以找到这样的自然数,使其等于自己的 $k$ 个互不相同的正约数之和?

(前苏联教育部推荐试题,1988年)

**[解]** 显然, $k=1$ 是可以的.

当 $k=2$ 时,令

$$n=a+b,\quad a\mid n,\quad b\mid n,$$

于是必有 $$b\mid a,\quad a\mid b.$$

从而 $a=b$,与题目条件相矛盾.

所以 $k\neq 2$.

下面用数学归纳法证明:对所有的正整数 $k\geqslant 3$,都可以找到自然数,使其等于自己的 $k$ 个互不相同的正约数之和.

对 $k=3$,我们有

$$6=3+2+1.$$

假设 $k=s$ 时,结论成立,即存在这样的自然数 $n$,当

$$m_1>m_2>\cdots>m_s,$$

有 $$m_i\mid n,\quad i=1,2,\cdots,s,$$

$$n=m_1+m_2+\cdots+m_s.$$

令 $n=am_s$,则

$$(1+a)n=(1+a)m_1+(1+a)m_2+\cdots+(1+a)m_{s-1}+am_s+m_s.$$

于是 $(1+a)n$ 表示成自己的 $s+1$ 个互不相同的正约数之和.

从而证明了 $k\geqslant 3$ 时结论成立.

综上可得,$k$ 可以是除了2以外的所有自然数.

**4·28** 设 $m$ 和 $n$ 为自然数,试问自然数

$$m(n+9)(m+2n^2+3)$$

最少有多少个不同的素约数.

(第53届莫斯科数学奥林匹克,1990年)

**[解]** (1) 如果 $m>1$,则由 $m$ 与 $m+2n^2+3$ 的奇偶性不同,在乘积 $m(n+9)(m+2n^2+3)$ 中必有偶素数2为约数.此外,还至少含

有一个奇素数作为约数.

因此,$m>1$ 时,乘积 $m(n+9)(m+2n^2+3)$ 最少有两个不同的素约数.



(2) 如果 $m=1$,则乘积化为

$$2(n+9)(n^2+2).$$

显然有偶素数 2 为约数.

若 $n$ 为奇数,则 $n^2+2$ 为奇数,因此必还有奇素数作为约数.

若 $n$ 为偶数,则 $n+9$ 为奇数.

于是,$m=1$ 时,乘积 $m(n+9)(m+2n^2+3)$ 最少有两个不同的素约数.

(3) 如果取 $m=27$, $n=7$,则有

$$m(n+9)(m+2n^2+3)=3^3\cdot 2^{11}.$$

这个数恰有两个不同的素约数 2 和 3.

由以上,对所有自然数 $m$ 和 $n$,数

$$m(n+9)(m+2n^2+3)$$

最少有两个不同的素约数.

**4·29** 把 1,000,000 的每一个真因数取以 10 为底的对数,把这些对数值加起来,得到和 $S$,求离 $S$ 最近的整数.

(第 4 届美国数学邀请赛,1986 年)

**[解 1]** 由于 $1,000,000=2^6\cdot 5^6$.共有 $(6+1)(6+1)=49$ 个因数.

除去 1000 之外,剩下的 48 个因数组成 24 对,每一对因数的乘积为 $10^6$,所以 1,000,000 的全部因数之积为 $1000\cdot(10^6)^{24}=10^{147}$.

这里包括一对非真因数 1 与 $10^6$ 的积,所以全部真因数之积为

$$\frac{10^{147}}{10^6}=10^{141}.$$

由对数性质,这些真因数之积的对数即为每个真因数对数之和,即

$$S=\lg 10^{141}=141.$$

**[解 2]** 考察 1,000,000 中的素数因数 2 和 5 在它的全部因数中出现的次数,即全部因数的乘积中的 2 和 5 的幂指数.

注意到 $2^j(1\leqslant j\leqslant 6,\quad j\in N)$ 可以组成的因数有

$$2^j,\quad 2^j\cdot 5,\quad 2^j\cdot 5^2,\quad 2^j\cdot 5^3,\quad 2^j\cdot 5^4,\quad 2^j\cdot 5^5,\quad 2^j\cdot 5^6.$$

于是这些因数之积中 2 的指数为 $7j$.

对 $j$ 取 1,2,3,4,5,6 得

$$7(1+2+3+4+5+6)=147.$$

同样,所有因数之积中 5 的指数也是 147.

去掉非真因数 $1=2^0\cdot5^0$ 及 $10^6=2^6\cdot5^6$ 中 2 和 5 的指数,则 2 和 5 在所有真因数之积中的指数均为 141.

从而有 $$S=\lg2^{141}+\lg5^{141}=141.$$

**4·30** 用 $E(n)$ 表示可使 $5^k$ 是乘积 $1^1\cdot2^2\cdot3^3\cdot4^4\cdot\cdots\cdot n^n$ 的约数的最大整数 $k$,则 $E(150)$ 等于多少?

(中国上海市高一数学竞赛,1988 年)

[解] 1,2,3,…,150 中有 $\left[\frac{150}{5}\right]=30$ 个 5 的倍数,每个提去一个约数 5,连同它们相应的指数,可得 5 的指数

$$\begin{aligned}&5+5\cdot2+5\cdot3+\cdots+5\cdot30\\=&5(1+2+\cdots+30)\\=&2325.\end{aligned}$$

1,2,…,150 中有 $\left[\frac{150}{5^2}\right]=6$ 个 $5^2$ 的倍数,每个已提去一个约数 5,再提去一个约数 5,连同它们相应的指数,可得 5 的指数

$$\begin{aligned}&5^2+5^2\cdot2+\cdots+5^2\cdot6\\=&5^2(1+2+\cdots+6)\\=&525.\end{aligned}$$

1,2,…,150 中,有 $\left[\frac{150}{5^3}\right]=1$ 个是 $5^3$ 的倍数,它已提去两个约数 5,再可提去一个约数 5,连同它的相应指数,可得 5 的指数为 $5^3=125$.

1,2,…,150 中没有 $5^k(k\geqslant4)$ 的指数,于是

$$E(150)=2325+525+125=2975.$$

**4·31** 已知 $\{a_n\}$ 为正整数数列

$$a_{n+3}=a_{n+2}(a_{n+1}+2a_n)\quad(n\in N),\quad a_6=2288.$$

求 $a_1,a_2,a_3$.

(中国四川省高中数学联赛,1988 年)

[解] 由递推公式,

数论卷

$$a_4 = a_3(a_2 + 2a_1),$$
$$a_5 = a_3(a_2 + 2a_1)(a_3 + 2a_2),$$
$$a_6 = a_3^2(a_2 + 2a_1)(a_3 + 2a_2)(a_2 + 2a_1 + 2).$$

又　$a_6 = 2288 = 2^4 \cdot 11 \cdot 13.$

因为数列$\{a_n\}$为正整数数列,所以

$$a_3 + 2a_2 \geqslant 3, \quad a_2 + 2a_1 \geqslant 3.$$

又由于　$(a_2 + 2a_1 + 2) - (a_2 + 2a_1) = 2,$

而$a_6 = 2^4 \cdot 11 \cdot 13$中只有13与11是不小于3,且其差为2的因数,因此必有

$$\begin{cases} a_2 + 2a_1 + 2 = 13, \\ a_2 + 2a_1 = 11. \end{cases}$$

因此　$$a_3^2(a_3 + 2a_2) = 2^4. \qquad ①$$

若$a_3$为奇数,则上式左边为奇数,右边为偶数,所以不可能.

于是$a_3$为2的幂,由$a_3 + 2a_2 \geqslant 3$可知$a_3 = 2$.

将$a_3 = 2$代入①式得

$$4(2 + 2a_2) = 16.$$
$$a_2 = 1.$$

再由　$a_2 + 2a_1 = 11$得$a_1 = 5$.

于是　$$a_1 = 5, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = 2.$$

**4·32**　设$d_1, d_2, \cdots, d_k$为正整数$n$的全部因数,

$$1 = d_1 < d_2 < d_3 < \cdots < d_k = n,$$

求出使$k \geqslant 4$,并且$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 = n$的所有$n$.

(第6届巴尔干数学竞赛,1989年)

**[解]**　如果$n$为奇数,则它的因数$d_1, d_2, \cdots, d_k$全为奇数,而四个奇数的平方和$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2$为偶数不可能等于奇数$n$.

所以$n$为偶数.

于是　$d_1 = 1, \quad d_2 = 2.$

如果$n$是4的倍数,则

$$4 \in \{d_3, d_4\}.$$

这样,在前四个因数$d_1, d_2, d_3, d_4$的平方中,已有两个($2^2$和$4^2$)为4的倍数,1个为1,如果另一个因数为奇数,则它的平方被4除余1,

这时，$d_1^2+d_2^2+d_3^2+d_4^2$ 为 $4k+2$ 型的数，$n$ 不是 4 的倍数；如果另一个因数为偶数，则它的平方能被 4 整除，这时 $d_1^2+d_2^2+d_3^2+d_4^2$ 为 $4k+1$ 型的数，$n$ 也不是 4 的倍数.

所以 $n$ 是偶数，但不是 4 的倍数.

设 $n=2m$， $m$ 为奇数.

$d_3$ 应是 $m$ 的最小质因数，因此 $d_3$ 为奇数，这时，$d_1=1$， $d_2=2$，$d_3$ 为奇数，$d_4$ 为偶数，从而由题设有 $d_4=2d_3$.

于是
$$n=1^2+2^2+d_3^2+4d_3^2=5+5d_3^2.$$

从而 5 是 $n$ 的约数.

由于 $d_4\neq 4$，所以 $d_4\geqslant 6$.

从而 $d_3=5$， $d_4=10$. 则
$$n=1^2+2^2+5^2+10^2=130.$$

**4·33** 边长分别为 $1,3,5,\cdots,(2n-1)$cm 的 $n$ 个正方形的面积之和能否等于 $100\text{m}^2$，为什么？

（中国上海市数学竞赛，1979 年）

［解］ 假设能，则由题设有
$$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=10^6.$$
$$\sum_{k=1}^{2n}k^2-\sum_{k=1}^{n}(2k)^2=10^6,$$
$$\frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6}-\frac{4n(n+1)(2n+1)}{6}=10^6,$$
$$\frac{1}{3}n(4n^2-1)=10^6,$$
$$n(4n^2-1)=3\cdot10^6,$$
$$(2n-1)2n(2n+1)=2\cdot3\cdot10^6=2^7\cdot5^6\cdot3.$$

如果此式成立，则左端必有一因式是 5 的倍数，因为在连续三个自然数中，有 5 的因数不多于 1 个，所以左端必有一因式是 $5^6$ 的倍数，此时左端必大于 $6\cdot10^6$，这是不可能的.

所以不可能.

**4·34** 一整数恰有 4 个素因数，其平方和为 476，求这个整数.

（中国国家集训队训练题，1990 年）

**[解]** 由 $476 \equiv 2 \pmod 3$,及 $3 \nmid a$ 时,

$$a^2 \equiv 1 \pmod 3.$$

则 4 个素因数中有两个 3,剩下的两个素因数设为 $p,q$,则由题设

$$p^2 + q^2 + 3^2 + 3^2 = 476.$$

$$p^2 + q^2 = 458 < 22^2.$$

又设 $p \geqslant q$,则

$$2p^2 \geqslant 458,$$

$$15 < \sqrt{229} \leqslant p \leqslant 21.$$

于是 $p$ 为 17 或 19.

当 $p = 19$ 时, $q^2 = 97$.

此时无解.

当 $p = 17$ 时, $q^2 = 169$,即

$$q = 13.$$

于是所求的整数为

$$3 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 17 = 1989.$$

**4·35** 证明对任何整数 $x$ 和 $y$,下式

$$x^5 + 3x^4y - 5x^3y^2 - 15x^2y^3 + 4xy^4 + 12y^5$$

的值不会等于 33.

(第 9 届莫斯科数学奥林匹克,1946 年)

**[证]**

$$\begin{aligned}
&x^5 + 3x^4y - 5x^3y^2 - 15x^2y^3 + 4xy^4 + 12y^5\\
&= x^4(x + 3y) - 5x^2y^2(x + 3y) + 4y^4(x + 3y)\\
&= (x + 3y)(x^4 - 5x^2y^2 + 4y^4)\\
&= (x + 3y)(x^2 - y^2)(x^2 - 4y^2)\\
&= (x + 3y)(x + y)(x - y)(x + 2y)(x - 2y).
\end{aligned}$$

所以原式可分解成 5 个不同因式的乘积,而 $33 = 11 \cdot 3$,不可能分解成 5 个不同因数的乘积.

所以对任何整数 $x,y$,原式的值不会等于 33.

**4·36** $n(\geqslant 2)$ 名选手的比赛持续 $k$ 天,每天各选手的得分恰为 $1,2,\cdots,n$(无二人有相同得分),$k$ 天结束时,每位选手的总分都是 26. 试求所有可能的$(n,k)$值.

(第 22 届加拿大数学竞赛,1990 年)

**[解]** 计算全体选手所得总分之和,有

$$k(1+2+\cdots+n)=26n.$$

即
$$k(n+1)=52. \quad ①$$

对 52 进行素因数分解，$52=2^2\cdot13$，它共有 6 个不同的约数：

$$1,\ 2,\ 4,\ 13,\ 26,\ 52.$$

由于 $n+1\geqslant3$，$k\geqslant2$.（若 $k=1$，即只有一天比赛，各选手得分不可能相同），所以方程 ① 只有三组解：

$$(n,k)=(25,2),(12,4),(3,13).$$

事实上，这三组解都是可能的，我们可以列出这三组解中，各选手每天得分的情况.

$n=25$，$k=2$ 时，

1，2，3，…，25，（第 1 天）

25，24，23，…，1.（第 2 天）

$n=12$，$k=4$ 时，

1，2，3，…，12（第 1 天）

12，11，10，…，1（第 2 天）

1，2，3，…，12（第 3 天）

12，11，10，…，1（第 4 天）

$n=3$，$k=13$ 时，

1，2，3（第 1 天）

1，2，3（第 2 天）

1，2，3（第 3 天）

1，2，3（第 4 天）

2，3，1（第 5 天）

2，3，1（第 6 天）

2，3，1（第 7 天）

2，3，1（第 8 天）

2，1，3（第 9 天）

3，1，2（第 10 天）

3，1，2（第 11 天）

3，1，2（第 12 天）

3，2，1（第 13 天）

4·37　证明 1984 个连续正整数的平方和不是一个整数的平方.

（第 16 届加拿大数学竞赛，1984 年）

[证]　设 $n$ 为任意一个正整数. 1984 个连续正整数为

$$n,\quad n+1,\quad n+2,\quad \cdots,\quad n+1983.$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{1983}(n+k)^2 &= \sum_{k=0}^{1983}n^2 + 2n\sum_{k=0}^{1983}k + \sum_{k=0}^{1983}k^2 \\ &= 1984n^2 + 1983\cdot 1984n + \frac{1983\cdot 1984\cdot 3967}{6} \\ &= 1984n(n+1983) + 32\cdot 31\cdot 661\cdot 3967 \\ &= 32\cdot 62n(n+1983) + 32\cdot 31\cdot 661\cdot 3967 \\ &= 32[62n(n+1983) + 31\cdot 661\cdot 3967].\end{aligned}$$

由于 $62n(n+1983)+31\cdot 661\cdot\cdot 3967$ 是奇数，

所以不论 $n$ 为何值，$\sum\limits_{k=0}^{1983}(n+k)^2$ 能被 32 整除，但不能被 64 整除.

于是 $\sum\limits_{k=0}^{1983}(n+k)$ 的标准分解式中含有 $2^5$，所以不可能为完全平方数.

**4·38**　对自然数 $k$ 进行如下运算：先将它分解为素数的乘积 $k = p_1p_2\cdots p_{n-1}p_n$，然后求出和数 $p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}+p_n+1$. 再对所得的和数进行同样的操作，如此等等. 证明从某一时刻起，所求得的和数序列成为周期性的.

（第 36 届莫斯科数学奥林匹克，1973 年）

[证]　注意到不等式：

当 $a\geqslant 2,\quad b\geqslant 2$ 时，有

$$a+b\leqslant ab.$$

用记号 $f(k)$ 表示对数 $k$ 进行一次运算之后所得的数.

则对任何 $k$，都有

$$f(k)\leqslant k+1.$$

若 $k$ 为奇数，且 $f(k)$ 为奇数，如果 $f(f(k))$，以及以下的每一次运算都是奇数，这将是一个奇数的减数列，最终得到只有一个奇数的 $k$，这时下一次运算 $f(k)$ 将是偶数，

因此我们可以假定 $k$ 是偶数.

若 $k=2$，则得到数列

$$3,\quad 4,\quad 5,\quad 6,\quad 6,\quad 6,\cdots.$$

若 $k=4$,则得到数列

$$4,\quad 5,\quad 6,\quad 6,\quad 6,\quad \cdots.$$

若 $k=6$,则得到数列

$$6,\quad 6,\quad 6,\quad \cdots.$$

当 $k$ 为偶数,且 $k\geqslant 8$ 时,有

$$\begin{aligned} f(k) &= 2+p_2+\cdots+p_n+1 \\ &\leqslant 3+p_2\cdots p_n \\ &= 3+\frac{k}{2}<k. \end{aligned}$$

即 $$f(k)\leqslant k-1.$$

于是 $f(f(k))\leqslant k$.

这就表明所考察的数列仅在区间$[1,k+1]$中取值,于是必将两次取得某个相同的值,因而必为周期性的.

4·39 证明对任意的正整数 $n$,有不等式 $\lg n\geqslant k\lg 2$,其中 $\lg n$ 是数 $n$ 的以 10 为底的对数,$k$ 是 $n$ 的不同的素因子的个数.

(匈牙利数学奥林匹克,1896 年)

[证] (1) 当 $n=1$ 时,$k=0$,

$$\lg n=\lg 1\geqslant 0\cdot\lg 2=k\lg 2$$

显然成立.

(2) 当 $n>1$ 时,设 $n$ 的标准分解式为

$$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}.$$

其中 $p_i$ 是素数,$\alpha_i$ 是正整数,$i=1,2,\cdots,k$.

由于 $p_i\geqslant 2$, $i=1,2,\cdots,k$.则

$$\begin{aligned} n &\geqslant 2^{\alpha_1}2^{\alpha_2}\cdots 2^{\alpha_k} \\ &= 2^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k} \\ &\geqslant 2^k. \end{aligned}$$

即 $$\lg n\geqslant k\lg 2.$$

4·40 一个大于 1 的自然数,如果它恰好等于其不同真因子(除 1 及其本身的因子)的积,那么称它为"好的".求前十个"好的"自然数的和.

(第 5 届美国数学邀请赛,1987 年)

［解］ 设 $k$ 是一个正整数，令

$$1,\quad d_1,\quad d_2,\quad \cdots,\quad d_{n-1},\quad d_n,\quad k$$

为 $k$ 的所有的因子，且按递增顺序排列.

由此可得

$$1\cdot k = d_1 d_n = d_2\cdot d_{n-1} = \cdots \qquad ①$$

若 $k$ 是"好的"，则 $k$ 等于它的所有不同真因子之积，即有 $k = d_1 d_2\cdots d_n$.

又由 ① 式， $$k = d_1 d_n,$$

则 $$d_1 d_n = d_1 d_2\cdots d_{n-1} d_n.$$

即 $$d_n = d_2\cdots d_{n-1} d_n.$$

于是 $$n = 2.$$

即 $k$ 的全部真因子为 $d_1\cdot d_2$.

显然，$d_1$ 为素数.否则，若 $d_1$ 是合数，则 $d_1$ 的素因子 $p$ 必在上面的因数递增数列中出现，且应有 $1 < p < d_1$，这是不可能的.

同理，$d_2$ 也必须为素数或者 $d_1$ 的平方.否则，若 $d_2$ 为合数且不为 $d_1$ 的平方，则在 1 和 $d_2$ 之间不可能只有一个素数 $d_1$.

所以 $k$ 或是两个不同素数 $d_1$ 和 $d_2$ 的积 $d_1 d_2$，或是一个素数的立方 $d_1^3$.

这样，我们很容易列出前 10 个"好数"：

6， 8， 10， 14， 15， 21， 22， 26， 27， 33.

它们的和为 182.

**4·41** 已知 $n$ 为正整数，试确定下列方程 $\frac{xy}{x+y} = n$ 中，有序正整数对 $(x, y)$ 的解的个数.

（第 21 届美国普特南数学竞赛，1960 年）

［解］ 已知方程可化为

$$(x-n)(y-n) = n^2. \qquad ①$$

显然，若 $0 < x \leqslant n$， $0 < y \leqslant n$ 时，

$$|x-n||y-n| < n\cdot n = n^2,$$

因此，此时无整数解.

于是，方程若有解，必满足

$$x > n,\quad y > n.$$

令 $n$ 的素因数标准分解式为

$$n=\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i},$$

则

$$n^2=\prod_{i=1}^{k}p_i^{2\alpha_i}.$$

① 的整数解的个数等于 $n^2$ 分解成两有序因数的积的不同分法种数,这种数是

$$(2\alpha_1+1)(2\alpha_2+1)\cdots(2\alpha_k+1).$$

4·42　求所有不超过100的恰好有三个正整数因子的正整数的乘积.证明,所有这样的数是完全平方数.

（第 1 届墨西哥数学奥林匹克,1990 年）

[解]　首先证明:恰有三个正整数因子的正整数是素数的平方.

设 $n$ 恰有三个正整数因子.

则除 1 和 $n$ 本身外还有一个素因子,设这个素因子为 $p$,则

$$p\mid n,\quad p\neq n.$$

于是

$$n=p\cdot q,\quad q\neq n,\quad 1.$$

这样必有

$$p=q.$$

因此

$$n=p^2,$$

此时 $p$ 必为素数,否则,$n$ 就多于三个正整数因子.

而小于 100 的素数的平方只有 $2^2,3^2,5^2,7^2$.

于是所求的数的乘积为

$$2^2\cdot3^2\cdot5^2\cdot7^2=44100=(210)^2.$$

4·43　将$2^n$个素数写成一行.已知其中不同的数少于 $n$ 个.证明:可以从上述数列中选取一组写在一起的数,它们的乘积是一个完全平方数.

（基辅数学奥林匹克,1973 年）

[证]　要证明本题的结论,只要证明在某一组连续排列的数中,每一个素数都出现偶数次即可.

设所给的 $2^n$ 个素数为$a_1,a_2,\cdots,a_{2^n}$,其中不同的素数有 $m$ 个:

$$p_1,\quad p_2,\quad \cdots,\quad p_m.\quad m<n.$$

设所给素数第 1 项至第 $j$ 项的乘积$a_1a_2\cdots a_j$　$(1\leqslant j\leqslant 2^n)$中素数 $p_i(1\leqslant i\leqslant m)$的指数记为 $c_{ij}$.

又设 $d_{ij}$ 为 $c_{ij}$ 被 2 除所得的余数：

$$c_{ij}=2l_{ij}+d_{ij},\quad d_{ij}\in\{0,1\}.$$

形如$(d_{1j},d_{2j},d_{3j},\cdots,d_{mj})$的每一个数组都是由 $m$ 个0或1组成.

由于 $j=1,2,\cdots,2^n$，所以这样的数组共有 $2^n$ 个. 而由 $m$ 个 0 或 1 组成的数组总共只有 $2^m$ 个.

由于 $m<n$，则$2^m<2^n$，所以在构造的$2^n$个数组中一定有两个相同的数组，设为

$$(d_{1j},d_{2j},\cdots,d_{mj})=(d_{1k},d_{2k},\cdots,d_{mk}),$$

其中 $1\leqslant j<k\leqslant 2^n$.

这时相应的 $c_{ij},c_{ik}$ 就有

$$c_{ik}-c_{ij}=2(l_{ik}-l_{ij})+(d_{ik}-d_{ij})=2(l_{ik}-l_{ij}).$$

于是 $c_{ik}-c_{ij}$ 为偶数.

考虑到 $c_{ij}$ 的定义，则在乘积

$$a_{j+1}a_{j+2}\cdots a_k=\frac{a_1a_2\cdots a_k}{a_1a_2\cdots a_j}$$

中，素数 $p_i$ 的指数等于 $c_{ik}-c_{ij}$ 次，即 $p_i$ 的指数为偶数次. 于是 $a_{j+1}a_{j+2}\cdots a_k$ 为完全平方数.

**4·44** 由 $n(n\geqslant 1)$ 个已给素数的积(每个素数可出现几次，也可以不出现) 组成 $n+1$ 个正整数. 证明在这 $n+1$ 个数中可以取出几个数，它们的积为完全平方数.

(第 29 届国际数学奥林匹克候选题，1988 年)

[证] 设$p_1,p_2,\cdots,p_n$为已知的$n$个素数，$m_1,m_2,\cdots,m_{n+1}$是由已知 $n$ 个素数之积组成的$n+1$个正整数(其中 $p_i$ 可出现几次，也可不出现)，这样，这 $n+1$ 个数可表示为

$$m_j=\prod_{i=1}^{n}p_i^{\alpha_{ij}}.$$

其中 $\alpha_{ij}$ 为非负整数，$i=1,2,\cdots,n,\quad j=1,2,\cdots,n+1$.

从这 $n+1$ 个 $m_j$ 中任取若干个相乘，所得的乘积对应于$\{m_1,m_2,\cdots,m_{n+1}\}$ 的所有非空子集，因此这种乘积共有 $2^{n+1}-1$个，其中每一个都具备形式

$$p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_n^{\beta_n}=\prod_{i=1}^{n}p_i^{\beta_i}.$$

幂指数 $\beta_i$ 可能为奇数,也可能为偶数.

按照奇偶性来分,$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$ 共有 $2^n$ 种.

由于
$$2^{n+1}-1>2^n,$$

所以,必有积 $p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_n^{\beta_n}$ 与 $p_1^{\beta'_1}p_2^{\beta'_2}\cdots p_n^{\beta'_n}$ 的幂指数具有完全相同的奇偶性,因而乘积

$$(p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_n^{\beta_n})(p_1^{\beta'_1}p_2^{\beta'_2}\cdots p_n^{\beta'_n})=\prod_{i=1}^{n}p_i^{\beta_i+\beta'_i} \quad ①$$

中的指数 $\beta_i+\beta'_i(i=1,2,\cdots,n)$ 都是偶数.

于是 ① 是一个完全平方数.

① 是一些 $m_j$ 的乘积,去掉那些在 $\prod_{i=1}^{n}p_i^{\beta_i}$ 与 $\prod_{i=1}^{n}p_i^{\beta'_i}$ 中均出现的 $m_j$,则剩下的那些 $m_j$ 各出现一次,它们的积仍为完全平方.

**4·45** 如果 1986 个自然数的乘积恰好有 1985 个不同的素因数.证明:在这 1986 个自然数中,或者有 1 个是完全平方数,或者有某几个自然数的乘积是完全平方数.

(第 49 届莫斯科数学奥林匹克,1986 年)

**[证]** 已知的 1986 个自然数的集合记为 $A$.

考查 $A$ 的每一非空子集.

$A$ 的所有非空子集共有 $2^{1986}-1$ 个.

求出 $A$ 的每一非空子集中所有元素之积,并且将乘积表示成最大可能的完全平方数与一些素数的积的形式(例如某一子集中所有元素之积为 $N$,且 $N=2^{16}\cdot3^{15}\cdot5^{13}\cdot17^{19}$,则将 $N$ 表示为 $N=(2^8\cdot3^7\cdot5^6\cdot17^9)^2\cdot3\cdot5\cdot17$,若某一子集中所有元素之积为 $M$,且 $M=2^{16}\cdot13^{10}$,则将 $M$ 表示为 $M=(2^8\cdot13^5)^2$ 等等),再将上述乘积除以最大可能的完全平方数,所得的商就是一些素数的乘积,以这些素数为元素可以得到一个素数集合(例如,上述的 $N$ 可得到素数集合 $\{3,5,17\}$,上述的 $M$ 可得的集合为空集 $\varnothing$).

这样,我们就可以得到集合 $A$ 的每一子集与一个素数集合或空集 $\varnothing$ 的一个对应.

由于这 1986 个自然数的乘积恰有 1985 个素因数,所以上述素数集合都是这 1985 个素数集合(记作集合 $B$)的子集,而这种子集共有 $2^{1985}$ 个.

由于 $2^{1986}-1$ 个 $A$ 的子集对应 $2^{1985}$ 个 $B$ 的子集，且 $2^{1986}-1>2^{1985}$，所以一定有 $A$ 的两个不同的子集 $A_1$ 和 $A_2$，对应着 $B$ 的同一个子集 $\{p_1,p_2,\cdots,p_k\}$，也就是说 $A_1$ 中元素之积 $n_1$ 与 $A_2$ 中元素之积 $n_2$ 分别具有形式：

$$n_1=a^2\cdot p_1p_2\cdots p_k,$$
$$n_2=b^2\cdot p_1p_2\cdots p_k.$$

其中 $a$ 和 $b$ 是两个正整数.

这样一来，$n_1n_2=(abp_1p_2\cdots p_k)^2$ 是一个完全平方数.

但是在 $n_1n_2$ 中，将 $A_1\cap A_2$ 中的数连乘了两次，因而多乘了一个平方数. 因此在划去了 $A_1$ 和 $A_2$ 的公共元素之后，所剩下的数的乘积仍然是一个完全平方数.

4·46　已知 48 个自然数的乘积中恰好有 10 个不同的素因数. 证明由这 48 个自然数中可以挑出 4 个数来，它们的乘积是一个完全平方数.

（第 49 届莫斯科数学奥林匹克，1986 年）

［证］　将这 48 个自然数进行素因数分解. 并将这 48 个自然数中任何两数 $a,b$ 之积都表示成最大可能的平方数和一些素数的一次幂的乘积的形式（例如 $a=2^{13}\cdot3^4\cdot19^3$，$b=5^6\cdot7^7\cdot19$，则 $ab=(2^6\cdot3^2\cdot5^3\cdot19^2)^2\cdot2\cdot7$），再用 $ab$ 除以最大可能的平方数，得到的商就是一些素数一次幂的乘积，以这些素数为元素得到一个素数集合（如上述的 $ab$ 得到素数集合 $\{2,7\}$）.

这样我们就得到每一数对 $(a,b)$ 与素数集合的一个对应.

由于这 48 个数两两组成的数对 $(a,b)$ 共可能有 $C_{48}^2=\frac{48\cdot47}{2}=1128$ 对，而这 48 个自然数之乘积恰有 10 个不同的素因数，这 10 个素因数组成的集合共有 $2^{10}=1024$ 个子集.

由于 $1128>1024$，所以必可找到两个不同的数对 $(a,b)$ 和 $(c,d)$，它们对应着同一个素数集 $(p_1,p_2,\cdots,p_k)$ $(0\leqslant k\leqslant10)$，即

$$ab=m^2p_1p_2\cdots p_k,$$
$$cd=n^2p_1p_2\cdots p_k.$$

于是
$$abcd=(mnp_1p_2\cdots p_k)^2.$$
是一个完全平方数.

如果两个数对$(a,b)$和$(c,d)$没有公共元素，则$a,b,c,d$即为所求.

如果两个数对$(a,b)$和$(c,d)$有公共元素，不妨设$b=d$，则$ac$一定是完全平方数.

从这48个自然数中，暂时去掉$a$和$c$，还有46个元素，对这46个自然数做同样的考虑.

由于46个数的乘积仍仅有不超过10个的不同的素因数，并且$C_{46}^2=\frac{46\cdot 45}{2}=1035>1024=2^{10}$，所以一定可以从中找出两个不同的数对$(x,y)$和$(z,t)$，使得$xyzt$是完全平方数.

如果数对$(x,y)$和$(z,t)$没有公共元素，则$x,y,z,t$即为所求.

如果数对$(x,y)$和$(z,t)$有公共元素，设为$x=t$，那么$yz$必为完全平方数.此时$acyz$也为完全平方数，$a,c,y,z$即为所求.

**4·47** 设$x$是一个自然数，若一串自然数

$$x_0=1,\quad x_1,\quad x_2,\quad \cdots,\quad x_l=x,$$

满足

$$x_{i-1}<x_i,x_{i-1}\mid x_i,\quad i=1,2,\cdots,l.$$

则称$\{x_0,x_1,x_2,\cdots,x_l\}$为$x$的一条因子链，$l$为该因子链的长度.$L(x)$与$R(x)$分别表示$x$的最长因子链的长度和最长因子链的条数.

对于$x=5^k\cdot 31^m\cdot 1990^n$($k,m,n$是自然数)，试求$L(x)$与$R(x)$.

(第5届中国中学生数学冬令营，1990年)

**[解]** 对于任意自然数

$$x=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_n^{\alpha_n}$$

其中$p_1,p_2,\cdots,p_n$为互不相同的素数，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$为正整数.

显然，$x$的因子链存在且只有有限点，从而一定存在最长因子链.

设$\{x_0,x_1,\cdots,x_t\}$为$x$的一个最长因子链，我们证明$\frac{x_i}{x_{i-1}}$必为素数$(i=1,2,\cdots,t)$.

事实上，如果存在$i(1\leqslant i\leqslant t)$使得$\frac{x_i}{x_{i-1}}$不是素数，可设

$$\frac{x_i}{x_{i-1}}=q_1q_2,$$

其中$q_1,q_2$都是大于1的正整数，则

$$\{x_0,x_1,\cdots,x_{i-1},q_1x_{i-1},x_i,x_{i+1},\cdots,x_t\}$$

也是 $x$ 的一个因子链.



这与 $\{x_0,x_1,\cdots,x_{i-1},x_i,\cdots,x_t\}$ 是最长因子链相矛盾.

由此可知,对任何 $1\leqslant i\leqslant t$, $\dfrac{x_i}{x_{i-1}}$ 必是 $x$ 的一个素因子,从而

$$t=L(x)=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n.$$

反之,如果

$$\{x_0,\quad x_1,\quad \cdots,\quad x_m\}$$

为 $x$ 的一个因子链,而且对任何 $1\leqslant i\leqslant m$, $\dfrac{x_i}{x_{i-1}}$ 都是素数,由因子链的定义可知

$$m=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=L(x).$$

即 $\{x_0,x_1,\cdots,x_m\}$ 必为最长因子链.

因此,从 1 开始逐次乘 $x$ 的一个素因子直到达到 $x$ 为止,就得到 $x$ 的一个最长因子链,而且不同素因子乘的顺序不同得到不同的最长因子链,因而

$$R(x)=\frac{(\alpha_1+\cdots+\alpha_n)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_n!}.$$

对于

$$\begin{aligned}x&=5^k\cdot 31^m\cdot 1990^n\\&=2^n\cdot 5^{k+n}\cdot 31^m\cdot 199^n.\end{aligned}$$

则

$$L(x)=3n+k+m,$$

$$R(x)=\frac{(3n+k+m)!}{(n!)^2m!(k+n)!}.$$

**4·48** 在中心为 $O$ 的正 $n$ 边形的顶点上放着(+1)和(−1).可以同时改变在某一正 $k$ 边形顶点上的数的符号($k$ 边形的中心是 $O$,且可以等于 2).

证明当(1)$n=15$, (2)$n=30$, (3)$n$ 是任意大于 2 的自然数时,存在(+1)和(−1)的初始摆法,无论进行多少次改变符号都不能把所有顶点上的数都变成(+1).

(4)对于任意 $n$,试求满足以下条件的(+1),(−1)的不同摆法的最大个数 $K(n)$:任何一个摆法不能由另一个摆法经过若干次改变符号得到.例如证明 $K(200)=2^{80}$.

（第 10 届全苏数学奥林匹克，1976 年）

［解］　首先注意到对于正 $n$ 边形顶点上的 $+1$ 和 $-1$，由于每个顶点有两种放法的选择，所以对于正 $n$ 边形有 $2^n$ 种不同的放法.

我们约定：

如果两种放法能用题中指出的运算，即改变正 $n$ 边形顶点上符号的方法把一种放法变成另一种放法，那么就称它们"等价".

如果两次运算的结果与进行这两次运算的先后次序无关，就称它们为"换向"的.

任何一种运算的重复，等价于不改变放法的恒等运算，因此可排除重复运算.

可以只限制在正 $p$ 边形（$p$ 是素数）的顶点上改变符号（把这些点称为"生成点"）的运算，对任何能被 $p$ 整除的 $n$，正 $n$ 边形顶点的集合可以分成 $\frac{n}{p}$ 个生成 $p$ 边形.

各顶点都用 $+1$ 组成的放法叫作"单位放法"，我们用 $E$ 表示.

(1) 当 $n=15$ 时.

此时共存在 8 个生成 $p$ 边形：其中有 5 个三角形和 3 个五边形.

任何与 $E$ 等价的放法都可以表示为这 8 个 $p$ 边形的子集合，这样的子集共有 $2^8$ 个（包括空集）. 这个数小于放法的总数 $2^{15}$，因此存在不等价于 $E$ 的放法.

(2) 当 $n=30$ 时.

此时共存在 31 个生成 $p$ 边形：15 个 2 边形，10 个三角形和 6 个五边形.

为了减少生成多边形，我们在关于中心对称的每两个三角形（或五边形）中只取其中一个，并在它的顶点上改变符号，即在包含它的顶点的 3 个（或 5 个）"2 边形"上改变符号，这等价于在与它对称的另一个三角形（或五边形）上改变符号. 现在共剩下 $15+5+3=23$ 个生成多边形，于是至多有 $2^{23}$ 种放法等价于 $E$，它小于放法总数 $2^{30}$. 因此存在不等价于 $E$ 的放法.

(3) 对于任意的 $n$，设等价于 $E$ 的放法数为 $T(n)$.

注意到，与某个由 $+1$，$-1$ 构成的放法 $A$ 等价的放法个数也等于 $T(n)$，因为它们都是由放法 $A$ 与 $E$ 的等价类中的任意放法逐项相乘

得到的.

用 $K(n)$ 表示"等价类"的数量,于是

$$K(n)=\frac{2^n}{T(n)}.$$

设 $n$ 有 $S$ 个不相同的素因数,其标准分解式为

$$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}.$$

记 $$p_1p_2\cdots p_s=q,\quad \frac{n}{q}=m.$$

把正 $n$ 边形分成 $m$ 个正 $q$ 边形,这时,计算 $T(n)$ 的问题就归结为计算 $T(q)=T(p_1p_2\cdots p_s)$ 的问题.

因为每一个生成 $p_i$ 边形只包含在一个 $q$ 边形之中,即在不同的 $q$ 边形中所进行的符号的改变互不相关.因此有

$$T(n)=[T(q)]^{\frac{n}{q}}=[T(q)]^m,$$
$$K(n)=[K(q)]^m.$$

若 $s=2$,并设 $n=p_1p_2$.

把 $n$ 边形的顶点用数字 $0,1,2,\cdots,n-1$ 编号,并把这些数字写在 $p_1\times p_2$ 的表格中去.写法是,使在同一列中的数对模 $p_1$ 同余,同时在同一行中的数对模 $p_2$ 同余.例如 $p_1=3$, $p_2=5$, $n=15$ 时,就如同表中所示的写法.

| $p_1$ \ $p_2$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 6 | 12 | 3 | 9 |
| 1 | 10 | 1 | 7 | 13 | 4 |
| 2 | 5 | 11 | 2 | 8 | 14 |

将数 $\sigma(r_1,r_2)=+1$ 和 $-1$ 放置在表的方格里($r_1$ 是行号,$r_2$ 是列号)与 $+1$ 和 $-1$ 放置在 $n$ 边形的顶点上相对应,而改变行和列的符号 $\sigma$ 对应于改变在 $p_1$ 边形和 $p_2$ 边形中的符号.

用这种运算可以把任何放法都变成这样的放法:它的第一行和第一列中都是 $+1$.这些"所作的"放法将两两不等价.

事实上,在行和列中改变 $\sigma$ 的符号时,乘积

$$\sigma(r_1,r_2)\sigma(0,r_2)\sigma(r_1,0)\sigma(0,0)$$

的值保持不变,对于一切$(r_1,r_2)$, $1\leqslant r_1\leqslant p_1-1$, $1\leqslant r_2\leqslant p_2-1$,一组这样的值确定一等价类.

因此有

$$K(p_1p_2)=2^{(p_1-1)(p_2-1)},$$
$$T(p_1p_2)=2^{p_1+p_2-1}.$$

特别地 $K(15)=2^{(3-1)(5-1)}=2^8,\quad T(15)=2^7;$

$K(10)=2^{(2-1)(5-1)}=2^4,\quad T(10)=2^6.$

由 $n=200=2^3\cdot 5^2, q=2\cdot 5=10, m=\frac{200}{10}=20.$

$$K(200)=[K(10)]^{20}=(2^4)^{20}=2^{80}.$$

对于任意 $s$,可类似地求出 $K(n)$.

设 $q=p_1p_2\cdots p_s$,由中国剩余定理可知,从0到 $q-1$ 的号码 $k$ 由 $q$ 除以 $p_1,p_2,\cdots,p_s$ 的余数 $r_1,r_2,\cdots,r_s$ 所惟一确定.

放法 $\sigma(r_1,r_2,\cdots,r_s)$ 是数组 $r_i(0\leqslant r_i\leqslant p_i-1,\quad i=1,2,\cdots,s)$ 的集合上取值 $\pm 1$ 的函数,借助于这些放法能同时改变一"排"的符号,这一"排"由 $p_i$ 个数构成,且这些数组的第 $i$ 个分量 $r_i$ 取值为从0至 $p_i-1$ 的数,而其余的 $s-1$ 个数 $r_i$ 固定(对每一个 $i=1,2,\cdots,s$).

任何放法都可用上述运算归结为这样的放法:如果至少一个 $r_i$ 等于0, $\sigma(r_1,r_2,\cdots,r_s)=+1$,所得的这些放法相互不等价,因为对于把某些分量换为0后所得到的这些数组来说,$2^s$ 个$\sigma$的值的乘积保持不变.

对于 $q=p_1p_2\cdots p_s$ 和任何的 $n=qm$,结果为如下形式

$$K(q)=2^{(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_s-1)},$$
$$K(n)=2^{\varphi(n)}.$$

其中 $\varphi(n)$ 为欧拉函数 $\varphi(n)=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_s}\right)$.

特别地 $K(30)=2^{(2-1)(3-1)(5-1)}=2^8,$

又 $T(30)=\frac{2^{30}}{2^8}=2^{22}.$

4·49 任何一组 $m$ 个非负数的积的$m$ 次方根是这$m$ 个非负数的几何平均数.

(1) 对于哪些正整数 $n$,有 $n$ 个不同正整数的有限集合$S_n$,使得 $S_n$ 的任何子集的几何平均数都是整数?

(2) 有没有不同正整数的无限集合 $S$,能使 $S$ 的任何有限子集的几何平均数都是整数?

（第13届美国数学奥林匹克，1984年）

［解］ (1)$m$ 个非负数的积的 $m$ 次方根是整数的一个充分条件是：

已知的 $m$ 个数都是非负整数的幂，并且幂指数是 $m$ 的正整数倍数.

由于 $n$ 个不同正整数的集合 $S_n$ 的任意非空子集可以含有1个，或2个，…，或 $n$ 个元素，只要这些元素是正整数的幂，并且幂指数是1，2，3，…，$n$ 的正整数倍，例如幂指数是 $n!$，这时任何非空子集的几何平均数就是整数.

因此，对于每一个正整数 $n$，都有 $n$ 个不同正整数为元素的有限集合 $S_n$ 满足要求，因为总有 $n$ 个不同的正整数的 $n!$ 次幂可以作为 $S_n$ 的元素.

(2) 这样的无限集合 $S$ 不存在.

我们用反证法.

设有不同正整数的无限集合 $S$，它的任何有限子集的几何平均数都是整数.

我们从这些数所含素因数的幂指数来寻找矛盾.

若数 $a$ 的标准分解式为

$$a = \prod_{i=1}^{t} p_i^{k_i}$$

其中 $p_i$ 为素数，$k_i$ 为正整数，$i = 1,2,\cdots,t$.

并对素数 $p_i$ 的指数 $k_i$ 记作

$$e(p_i, a) = k_i.$$

显然，$p^k \parallel a$，即 $p^k \mid a$，且 $p^{k+1} \nmid a$.

设 $a, b$ 是 $S$ 中的两个不同的元素.

因为 $a \neq b$，所以至少有一个素数 $p$，使得

$$e(p,a) \neq e(p,b).$$

依假设，对任意正整数 $m$，$S$ 有 $m$ 元子集 $\{a, \ n_1, \ n_2, \ \cdots, \ n_{m-1}\}$ 和 $\{b, \ n_1, \ n_2, \ \cdots, \ n_{m-1}\}$，此时素数 $p$ 在子集里各数中的指数之和应该是 $m$ 的倍数，即

$$e(p,a) + e(p,n_1) + \cdots + e(p,n_{m-1})$$

和 $$e(p,b) + e(p,n_1) + \cdots + e(p,n_{m-1})$$

都应该是 $m$ 的倍数,从而它们的差即

$$e(p,a)-e(p,b)$$

也是 $m$ 的倍数.

由于 $m$ 是任意的,所以只有 0 才是任意正整数的倍数,即

$$e(p,a)-e(p,b)=0,$$

$$e(p,a)=e(p,b).$$

这与 $e(p,a)\neq e(p,b)$ 相矛盾.

所以这样的无限集合 $S$ 不存在.

4·50 定义在正整数集上的函数 $D(n)$ 满足条件:

(i) $D(1)=0$,

(ii) 当 $p$ 是素数时,$D(p)=1$,

(iii) 对任意两个正整数 $u,v$,

$$D(uv)=uD(v)+vD(u).$$

(1) 求证这三个条件是相容的(即互不矛盾),且惟一确定函数 $D(n)$. 推导出$\dfrac{D(n)}{n}$的公式(设 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$,其中 $p_1,p_2,\cdots,p_k$ 是不同的素数).

(2) 求 $n$,使 $D(n)=n$.

(3) 令 $D^1(n)=D(n)$, $D^{k+1}(n)=D(D^k(n))(k=1,2,\cdots)$,求当 $m\to\infty$ 时,$D^m(63)$ 的极限.

(第 10 届美国普特南数学竞赛,1950 年)

**[解]** (1) 令

$$D(n)=\begin{cases}0, & \text{当 } n=1.\\ n\left(\dfrac{\alpha_1}{p_1}+\dfrac{\alpha_2}{p_2}+\cdots+\dfrac{\alpha_k}{p_k}\right), & \text{当 } n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}.\end{cases}$$

显然,$D(n)$ 满足条件(i),(ii).

设 $u=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$, $v=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_k^{\beta_k}$,则

$$uv=p_1^{\alpha_1+\beta_1}p_2^{\alpha_2+\beta_2}\cdots p_k^{\alpha_k+\beta_k}.$$

$$\begin{aligned}&uD(v)+vD(u)\\=&\ uv\left(\frac{\beta_1}{p_1}+\frac{\beta_2}{p_2}+\cdots+\frac{\beta_k}{p_k}\right)+vu\left(\frac{\alpha_1}{p_1}+\frac{\alpha_2}{p_2}+\cdots+\frac{\alpha_k}{p_k}\right)\\=&\ uv\left(\frac{\alpha_1+\beta_1}{p_1}+\cdots+\frac{\alpha_k+\beta_k}{p_k}\right)\end{aligned}$$

$= D(uv)$.

故 $D(n)$ 也满足条件(iii)，即条件(i)，(ii)，(iii) 是相容的. 下面证明这三个条件可惟一确定 $D(n)$.



由条件(iii) 得

$$\frac{D(uv)}{uv}=\frac{D(u)}{u}+\frac{D(v)}{v}.$$

利用数学归纳法可证：对任意 $k$ 个正整数 $u_1,u_2,\cdots,u_k$，有

$$\frac{D(u_1u_2\cdots u_k)}{u_1u_2\cdots u_k}=\frac{D(u_1)}{u_1}+\frac{D(u_2)}{u_2}+\cdots+\frac{D(u_k)}{u_k}.$$

从而，若 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$，则

$$\frac{D(n)}{n}=\underbrace{\frac{D(p_1)}{p_1}+\cdots+\frac{D(p_1)}{p_1}}_{\alpha_1\text{项}}+\underbrace{\frac{D(p_2)}{p_2}+\cdots+\frac{D(p_2)}{p_2}}_{\alpha_2\text{项}}+\cdots+\underbrace{\frac{D(p_k)}{p_k}+\cdots+\frac{D(p_k)}{p_k}}_{\alpha_k\text{项}}.$$

由条件(ii) 得

$$\frac{D(n)}{n}=\frac{\alpha_1}{p_1}+\frac{\alpha_2}{p_2}+\cdots+\frac{\alpha_k}{p_k}.$$

结合条件(i)，得

$$D(n)=\begin{cases}0, & \text{当 } n=1.\\ n\left(\frac{\alpha_1}{p_1}+\frac{\alpha_2}{p_2}+\cdots+\frac{\alpha_k}{p_k}\right), & \text{当 } n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}.\end{cases}$$

(2) 若 $D(n)=n$，则 $n>1$，可得

$$\frac{\alpha_1}{p_1}+\frac{\alpha_2}{p_2}+\cdots+\frac{\alpha_k}{p_k}=1 \qquad ①$$

若 $k>1$，则

$$\frac{\alpha_1}{p_1}p_2\cdots p_k=p_2\cdots p_k\left(1-\frac{\alpha_2}{p_2}-\cdots-\frac{\alpha_k}{p_k}\right)$$

的右边为整数，从而左边为整数，故 $\alpha_1$ 能被 $p_1$ 整除，由①，只能有 $\frac{\alpha_1}{p_1}=1$，即 $\alpha_1=p_1$，故 $\alpha_2=\cdots=\alpha_k=0$，$n=p^p$，其中 $p$ 是素数.

(3) 因为 $63=3^2\cdot 7$，则

$$D(63)=63\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{7}\right)=51.$$

又可求出 $D^2(63)=20,\quad D^3(63)=24.$

我们证明:当 $m\geqslant 2$ 时,

$$D^{m+1}(63)>D^m(63),$$

$$D^m(63)=4u_m\quad(u_m\text{ 是某个正整数}).\qquad ②$$

当 $m=2$ 时,② 是显然的.

假设 $m=t$ 时,② 成立,则当 $m=t+1$ 时,

$$\begin{aligned}D^{t+1}(63)&=D(D^t(63))=D(4u_t)\\&=4D(u_t)+u_tD(4)\\&=4(D(u_t)+u_t).\end{aligned}$$

令 $u_{t+1}=D(u_t)+u_t$,则

$$\begin{aligned}D^{t+2}(63)&=4(D(u_{t+1})+u_{t+1})\\&>4u_{t+1}\\&=D^{t+1}(63).\end{aligned}$$

所以,② 当 $m=t+1$ 时成立.

由 ②,当 $m\to\infty$ 时,$D^m(63)\to+\infty$.

4·51 试找出最小的(大于 1) 的自然数,使它比自己的每个素约数至少大 600 倍?

(列宁格勒数学奥林匹克,1989 年)

[解] 注意到,当所求的自然数 $m$ 含有大于 3 的素约数时,则有

$$m\geqslant 5\cdot 600=3000.$$

因此,为求最小的自然数 $m$,应首先考虑形如 $2^a\cdot 3^b$ 形式的数.

由于 $2\cdot 600=1200,\quad 3\cdot 600=1800$,则

$$m\geqslant 1800.$$

而大于 1800 仅含素约数 2 和 3 的最小自然数 $m=1944=2^3\cdot 3^5$,从而 1944 即为所求.

4·52 证明存在无限多个 $n\in N$,使得对 $k=1,2,\cdots,n-1$,有 $\frac{\sigma(n)}{n}>\frac{\sigma(k)}{k}$.其中 $\sigma(n)$ 表示 $n$ 的所有因数之和.

(第 24 届国际数学奥林匹克候选题,1983 年)

[证] 设 $a_n=\frac{\sigma(n)}{n}$.

假设结论不成立,即只有有限个 $n \in N$,使得当 $k=1,2,\cdots,n-1$ 时

$$a_n > a_k.$$

设 $t$ 是这些 $n$ 中的最大者,则数列

$$A_n = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \{a_i\}.$$

以 $A_t$ 为上界(因为 $A_1 \leqslant A_2 \leqslant \cdots \leqslant A_t$),并且对每个 $n > t$,有 $A_n = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \{A_{n-1}, a_n\} = A_{n-1}$(因为存在 $k \in \{1,2,\cdots,n-1\}$,使得 $a_k \geqslant a_n$).

于是 $$A_t = A_{t+1} = A_{t+2} = \cdots.$$

所以数列 $\{a_n\}$ 也以 $A_t$ 为上界. 因为当 $i=1, 2, \cdots, N-1$ 时,$a_i < a_t$,因此 $A_t = a_t$.

另一方面,$2t$ 的因数是形如 $2d$ 的数和 1,其中 $d \mid t$,因此

$$\sigma(2t) \geqslant 2\sigma(t) + 1.$$

从而有

$$a_{2t} \geqslant \frac{2\sigma(t)+1}{2t} = a_t + \frac{1}{2t} > a_t = A_t.$$

出现矛盾.

因此,存在无限多个符合题目要求的 $n \in N$.

4·53 对给定的一个正整数 $n$,设 $p(n)$ 表示 $n$ 的各位上的非零的数字乘积(如果 $n$ 只有一位数字,那么 $p(n)$ 等于那个数字),若 $S = p(1)+p(2)+p(3)+\cdots+p(999)$,则 $S$ 的最大素因子是多少?

(第 12 届美国数学邀请赛,1994 年)

[**解**] 考虑所有小于 1000 的正整数,若不是三位数,我们在该数的前面补上 0,使之成为三位数.

所有这样的正整数各位数字的乘积的和是

$$0\cdot0\cdot0+0\cdot0\cdot1+0\cdot0\cdot2+\cdots+9\cdot9\cdot8+9\cdot9\cdot9)-0\cdot0\cdot0$$
$$=(0+1+2+\cdots+9)^3-0.$$

然而,$p(n)$ 是 $n$ 的非零数字的乘积,这个乘积的和可以将上面表达式中的 0 用 1 代替而得到. 于是

$$\sum_{n=1}^{999} p(n) = (1+1+2+3+\cdots+9)^3 - 1$$
$$= 46^3 - 1 = 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 103.$$

所以,所求的最大素因子是 103.

4·54 确定所有的正整数 $n$,满足 $n=[d(n)]^2$,其中 $d(n)$ 表示 $n$ 的所有正约数的个数(包括 1 及其本身).

(加拿大数学奥林匹克,1999 年)

[解] 设 $n$ 的标准分解式为

$$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}(p_i\text{ 是素数},\alpha_i\geqslant 0).$$

有 $$d(n)=(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_k).$$

由题意,$n=[d(n)]^2$,则 $n$ 为完全平方数,$\alpha_i$ 为偶数,记 $\alpha_i=2\beta_i$,

于是 $$p_1^{2\beta_1}p_2^{2\beta_2}\cdots p_\kappa^{2\beta_\kappa}=(1+2\beta_1)^2(1+2\beta_2)^2\cdots(1+2\beta_k)^2,$$

$$p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_k^{\beta_k}=(1+2\beta_1)(1+2\beta_2)\cdots(1+2\beta_k).\qquad(※)$$

上式右边是奇数,于是 $p_i$ 为奇素数,$p_i\geqslant 3$.

当 $\beta_i>0$ 时,有 $p_i^{\beta_i}\geqslant 3^{\beta_i}=(1+2)^{\beta_i}>1+2\beta_i$,

$$p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_k^{\beta_k}>(1+2\beta_1)(1+2\beta_2)\cdots(1+2\beta_k).\qquad(※※)$$

(※)式与(※※)式矛盾.

$\therefore$ 对所有 $i$,$\beta_i=0$. 因此 $n=1$.

4·55 设 $b,m,n$ 为正整数,满足 $b>1$ 且 $m\neq n$. 证明若 $b^m-1$ 和 $b^n-1$ 的素约数相同,则 $b+1$ 是 2 的幂.

(第 38 届国际数学奥林匹克预选题,1997 年)

[证] 对任意正整数 $x$ 和 $y$,我们用符号 $x\sim y$ 表示它们的素约数相同.

由已知 $(b^m-1)\sim(b^n-1)$,因此,对任何能够整除 $b^m-1$ 的素数也能整除 $b^n-1$,因而也能整除它们的最大公约数 $(b^m-1,b^n-1)$,于是

$$(b^m-1,b^n-1)\sim(b^m-1)\sim(b^n-1).$$

另一方面,设 $d=(m,n)$,则 $(b^m-1,b^n-1)=b^d-1$.

故设 $a=b^d$,$k=\dfrac{m}{d}$,有 $a^k-1\sim a-1$.

先证明原命题的一个特殊情况,即证明

$$a^k-1\sim a-1\Rightarrow a+1\text{ 是 2 的乘方}.$$

为此证明一个引理:设 $a,k$ 为正整数,$p$ 为奇素数,若 $p^\alpha\parallel a-1$ 且 $p^\beta\parallel k$,则 $p^{\alpha+\beta}\parallel a^k-1$. 其中 $\alpha\geqslant 1,\beta\geqslant 0$.

对 $\beta$ 施行数学归纳法.

数论卷

若 $\beta=0$，由于 $a^k-1=(a-1)(a^{k-1}+a^{k-2}+\cdots+a+1)$，

又 $a\equiv1 \pmod p$ 可以推出，对所有 $j\geqslant0$，$a^j\equiv1 \pmod p$，

则 $a^{k-1}+a^{k-2}+\cdots+a+1\equiv k \pmod p$.

由于 $p^\beta \| k$ 及 $\beta=0$，则 $p\nmid k$，因此 $p^\alpha \| a^k-1$.

$\beta=0$ 时，引理成立，

现在假设结论对某个 $\beta$ 成立，并令 $k=lp^{\beta+1}$，其 $(l,p)=1$. 由归纳假设，

$$p^{\alpha+\beta} \| a^{lp^\beta}-1.$$

于是存在某个与 $p$ 互素的 $m$，使得 $a^{lp^\beta}=mp^{\alpha+\beta}+1$，

$$\begin{aligned}\text{则有 } a^k-1 &=(a^{lp^\beta})^p-1=(mp^{\alpha+\beta}+1)^p-1\\ &=(mp^{\alpha+\beta})^p+\cdots+C_p^2(mp^{\alpha+\beta})^2+mp^{\alpha+\beta+1}.\end{aligned}$$

$p$ 是奇数，$p\mid C_p^2$，则在上式中倒数第二项的素因数分解中 $p$ 的指数为 $2\alpha+2\beta+1$，由于它大于最后一项 $p$ 的指数 $\alpha+\beta+1$，于是由上式，$a^k-1$ 的分解式中 $p$ 的最高次幂是 $\alpha+\beta+1$，

即 $$p^{\alpha+\beta+1} \| a^k-1.$$

由此，引理得证.

下面证明：若 $a>1$，且对于某个 $k>1$，且 $a^k-1\sim a-1$，则 $a+1$ 是 2 的乘方.

首先注意到，若 $\delta$ 是 $k$ 的约数，则由 $a^k-1\sim a-1$ 可以推出 $a^\delta-1\sim a-1$.

事实上，$a^\delta-1$ 的任意素约数都能整除 $a^k-1$，因而也能整除 $a-1$. 假设 $k$ 有一个奇素约数 $p$，且令 $\delta=p^\beta$，其中 $p^\beta \| k$. 由于

$$a^\delta-1=(a-1)(a^{\delta-1}+a^{\delta-2}+\cdots+a+1),$$

设 $q$ 是 $A=a^{\delta-1}+a^{\delta-2}+\cdots+a+1$ 的一个素约数，则由 $q$ 的整除 $a^\delta-1$，因而能整除 $a-1$.

由此可知，对所有的 $j=0,1,2,\cdots$，$a^j\equiv1 \pmod q$，

于是 $A\equiv\delta \pmod q$.

$q$ 的整除 $\delta=p^\beta$，表明 $q=p$，由此知 $A$ 是 $p$ 的乘方.

我们同时证明了 $p$ 能整除 $a-1$.

令 $p^\alpha \| a-1$，则由引理可知 $p^{\alpha+\beta} \| \alpha^\delta-1$.

于是，由 $\alpha^\delta-1$ 的分解式可知 $p$ 在 $A$ 的素约数分解式中的次数为

$(\alpha+\beta)-\alpha=\beta$. 另一方面，$p$ 是 $A$ 的惟一的素约数，因此，$A=p^{\beta}=\delta$，但这是不可能的. 因为由 $a>1$ 可得 $A>\delta$.

这样，我们证明了 $k$ 是 2 的乘方，特别地因为 $k>1$，所以 $k$ 是偶数，得到

$$a-1\sim a^{2}-1=(a-1)(a+1).$$

这表明 $a+1$ 的任一素约数 $q$ 也是 $a-1$ 的约数，即意味着 $q$ 能整除 $(a+1)-(a-1)=2$，于是 $q=2$，由此可知，$a+1$ 也是 2 的乘方.

再回到 $a=b^{d}$ 的情况.

若 $d$ 为偶数，因 $b$ 是奇数，则有 $a+1=b^{d}+1\equiv 2 \pmod 4$.

因为 $a+1$ 是 2 的乘方，则只有 $a+1=2$ 这与条件 $a>1$ 矛盾.

所以 $d$ 必为奇数，则 $b+1\mid b^{d}+1$.

由于 $b^{d}+1$ 为 2 的乘方，所以 $b+1$ 也是 2 的乘方.

# 第五章　公约数和公倍数

5·1　若 $r$ 是1059,1417与2312被 $d$ 除后的余数,这里 $d$ 是大于1的整数,求 $d-r$ 的值.

（第29届国际数学奥林匹克候选题,1988年）

[解]　由已知 $1059 \equiv 1417 \equiv 2312 \pmod d$.

则
$$d \mid 2312-1417=895,$$
$$d \mid 1417-1059=358.$$

而
$$(895,358)=179,$$

所以有
$$d \mid 179.$$

又因为179是素数,$d>1$,所以
$$d=179.$$

再由
$$1059=179\cdot 5+164,$$

于是
$$r=164.$$

$$d-r=179-164=15.$$

5·2　若 $n$ 为小于50的自然数,求使代数式 $4n+5$ 和 $7n+6$ 的值有大于1的公约数的所有的 $n$ 的值.

（中国天津市初二数学竞赛,1991年）

[解]　设 $(4n+5,7n+6)=d>1$,则
$$d \mid 4n+5,\quad d \mid 7n+6,$$

从而
$$d \mid (7n+6)-(4n+5)=3n+1,$$
$$d \mid (4n+5)-(3n+1)=n+4,$$
$$d \mid (3n+1)-2(n+4)=n-7,$$
$$d \mid (n+4)-(n-7)=11.$$

因为 11 是素数,则 $d = 11$.

设 $n - 7 = 11k$,则

$$0 < n = 11k + 7 < 50$$

解得 $k = 0,1,2,3.$

于是 $n = 7,18,29,40.$

5·3 若$\frac{3n+1}{n(2n-1)}$可写成有限的十进制小数的形式.求自然数 $n$.

(基辅数学奥林匹克,1983 年)

[解] 由于$(n, 3n+1) = 1$.

若 $3n + 1$ 与 $2n - 1$ 互素,则分数 $p = \frac{3n+1}{n(2n-1)}$ 是既约分数.

若 $3n + 1$ 与 $2n - 1$ 不互素,设它们有公约数 $d$,且 $d > 1$.设

$$3n + 1 = da,\ 2n - 1 = db,$$

则 $$d(2a - 3b) = 2(3n + 1) - 3(2n - 1) = 5.$$

故 $3n + 1$ 与 $2n - 1$ 的公约数是 5,此时分数 $p$ 的分子与分母只有公约数 5.

由于 $p$ 可以写成有限的十进制小数的形式,故在约分之后,$p$ 的分母除了 2 与 5 之外,没有其他的约数.

因此,$n(2n-1)$ 仅能被 2 或 5 整除,即

$$n(2n - 1) = 2^k \cdot 5^m.$$

因为 $2n - 1$ 是奇数,且 $n$ 和 $2n - 1$ 互素.于是有

$$\begin{cases} n = 2^k, \\ 2n - 1 = 5^m. \end{cases}$$

即 $$2^{k+1} = 5^m + 1.$$

由于 $$5^m + 1 \equiv 2 \pmod 4,$$

则 $$2^{k+1} \equiv 2 \pmod 4.$$

于是只能有 $k + 1 = 1,\quad k = 0.$

从而有 $m = 0$.

因此仅当 $n = 1$ 时,$p$ 才满足条件.

5·4 自然数 $a_1, a_2, \cdots, a_{49}$ 的和为 999,令 $d$ 为 $a_1, a_2, \cdots, a_{49}$ 的最大公约数,$d$ 的最大值为多少?

(基辅数学奥林匹克,1979年)

[解] 由于 $d=(a_1,a_2,\cdots,a_{49})$,则

$$d \mid a_1+a_2+\cdots+a_{49}=999.$$

即 $d$ 是 $999=3^3\cdot 37$ 的约数.

又因为 $$d \mid a_k,\quad k=1,2,\cdots,49,$$

则 $$a_k\geqslant d.$$

于是必有 $$999=a_1+a_2+\cdots+a_{49}\geqslant 49d,$$

$$d\leqslant\frac{999}{49}<21.$$

又由 $d$ 是 999 的约数可知 $d$ 只能为 1, 3, 9.

又因为 999 能写成 49 个数的和.

$$\underbrace{9+9+\cdots+9}_{48个}+567=999.$$

其中每一个数都能被 9 整除,所以 $d$ 的最大值为 9.

5·5 100个正整数之和为101101,则它们的最大公约数的最大可能值是多少?证明你的结论.

(中国上海市初中数学竞赛,1986年)

[解] 设100个正整数 $a_1,a_2,\cdots,a_{100}$ 的最大公约数为 $d$,并令

$$a_j=da_j'\quad(1\leqslant j\leqslant 100).$$

由于
$$\begin{aligned}&a_1+a_2+\cdots+a_{100}\\=&d(a_1'+a_2'+\cdots+a'_{100})\\=&101101\\=&101\cdot 1001\end{aligned}$$

于是 $a_1',a_2',\cdots,a'_{100}$ 不可能都是1,从而

$$a_1'+a_2'+\cdots+a'_{100}\geqslant 1\cdot 99+2=101.$$

从而 $$d\leqslant 1001.$$

另一方面,取 $a_1=a_2=\cdots=a_{99}=1001$, $a_{100}=2002$,这时满足

$$a_1+a_2+\cdots+a_{100}=101101.$$

而 $$(1001,1001,\cdots,1001,2002)=1001.$$

所以 $a_1,a_2,\cdots,a_{100}$ 的最大公约数的最大可能值为1001.

5·6 设 $S_n=\sum_{k=1}^{n}(k^5+k^7)$. 求 $S_n$ 与 $S_{3n}$ 的最大公约数.

（第 26 届国际数学奥林匹克候选题，1985 年）

**[解]**　由于 $S_1 = 1^5 + 1^7 = 2$,

$S_2 = (1^5 + 1^7) + (2^5 + 2^7) = 2 \cdot 81 = 2 \cdot (1+2)^4$,

$S_3 = 2 \cdot 3^4 + (3^5 + 3^7) = 2 \cdot 6^4 = 2 \cdot (1+2+3)^4$,

$S_4 = 2 \cdot 6^4 + (4^5 + 4^7) = 2^5 \cdot 5^4 = 2 \cdot (1+2+3+4)^4$.

由此猜想，

$$S_n = 2(1+2+\cdots+n)^4. \qquad ①$$

下面用数学归纳法证明.

$n = 1$ 时，显然成立.

假设 $n = k$ 时，① 式成立，

那么 $n = k+1$ 时，

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= 2(1+2+\cdots+k)^4 + (k+1)^5 + (k+1)^7 \\ &= \frac{1}{8}k^4(k+1)^4 + (k+1)^5 + (k+1)^7 \\ &= \frac{1}{8}(k+1)^4[k^4 + 8(k+1) + 8(k+1)^3] \\ &= \frac{1}{8}(k+1)^4(k^4 + 8k^3 + 24k^2 + 32k + 16) \\ &= \frac{1}{8}(k+1)^4(k+2)^4 \\ &= 2[1+2+\cdots+k+(k+1)]^4. \end{aligned}$$

所以 $n = k+1$ 时，① 式成立.

于是对所有自然数 $n$，① 式成立.

因此

$$S_n = 2 \cdot \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^4,$$

$$S_{3n} = 2 \cdot \left[\frac{3n(3n+1)}{2}\right]^4.$$

(1) 当 $n = 2k$ 时，

$$\begin{aligned} d &= (S_n, S_{3n}) \\ &= \left(2 \cdot \left[\frac{2k(2k+1)}{2}\right]^4,\ 2 \cdot \left[\frac{6k(6k+1)}{2}\right]^4\right) \\ &= (2k^4(2k+1)^4, 2 \cdot 81k^4(6k+1)^4). \end{aligned}$$

因为 $(2k+1, 6k+1) = 1$，所以

第五章　公约数和公倍数

$$d = 2k^4((2k+1)^4, 81).$$

当 $k = 3t+1$ 时,

$$(2k+1)^4 = (6t+3)^4 = 81(2t+1)^4.$$

所以 $$d = 2 \cdot 81k^4 = 2 \cdot 81 \cdot \frac{n^4}{2^4} = \frac{81}{8}n^4.$$

当 $k \neq 3t+1$ 时,

$$d = 2k^4 = \frac{n^4}{8}.$$

(2) 当 $n = 2k+1$ 时,

$$S_n = 2[(2k+1)(k+1)]^4,$$
$$S_{3n} = 2[3(2k+1)(3k+2)]^4.$$

因为 $(3k+2, 2k+1) = 1, (3k+2, k+1) = 1,$

所以 $$d = 2(2k+1)^4(3^4, (k+1)^4).$$

当 $k = 3t+2$ 时, $k+1 = 3(t+1)$,

所以 $$d = 2n^4 \cdot 3^4 = 162n^4.$$

当 $k \neq 3t+2$ 时,

$$d = 2n^4.$$

5·7 斐波那契数定义为

$$a_0 = 0,\ a_1 = a_2 = 1,\ a_{n+1} = a_n + a_{n-1} (n \geqslant 1).$$

求第 1960 项与 1988 项的最大公约数.

(第 29 届国际数学奥林匹克候选题,1988 年)

[解] 由 $a_1 = a_2 = 1$

及 $$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad (n > 1) \qquad ①$$

可逐步算出数列的前 28 项为

1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,610,987,1597,2584,4181,6765,10946,17711,28657,46368,75025,121393,196418,317811.

对斐波那契数,我们证明

$$(a_m, a_n) = a_{(m,n)}. \qquad ②$$

首先用数学归纳法证明

$$(a_n, a_{n-1}) = 1. \quad ③$$

当 $n = 1$ 时，$(a_1, a_0) = 1$，

当 $n = 2$ 时，$(a_2, a_1) = (1,1) = 1$.

所以当 $n = 1,2$ 时，③ 式成立.

假设当 $n = k$ 时，③ 式成立，即

$$(a_k, a_{k-1}) = 1.$$

则由 ① 式 $(a_{k+1}, a_k) = (a_k, a_{k-1}) = 1$.

所以对所有自然数 $n$，③ 式成立.

我们设 $m \geqslant n$，由 ① 式可推出

$$a_m = a_n a_{m-n+1} + a_{n-1} a_{m-n}. \quad ④$$

由 ④ 可以看出，$a_{m-n}$ 与 $a_n$ 的最大公约数一定是 $a_m$ 的约数，$a_m$ 与 $a_n$ 的最大公约数一定是 $a_{n-1}a_{m-n}$ 的约数.

由 ③，$a_n$ 与 $a_{n-1}$ 互素，则 $a_m$ 与 $a_n$ 的最大公约数也是 $a_{m-n}$ 的约数，所以

$$(a_m, a_n) = (a_{m-n}, a_n) \quad ⑤$$

设 $m = qn + r,\ 0 \leqslant r < n$，

则由 ⑤ 得 $(a_m, a_n) = (a_r, a_n)$.

注意到 $(m, n) = (r, n)$.

由 $n > r$，继续上面的过程可得

$$(a_m, a_n) = a_{(m,n)}.$$

由于 $(1988, 1960) = 28$，则

$$(a_{1988}, a_{1960}) = a_{(1988,1960)} = a_{28} = 317811.$$

5·8 数列 $\{u_n\}$ 定义为

$$u_1 = 1, u_2 = 1, u_n = u_{n-1} + 2u_{n-2}, n = 3,4,\cdots.$$

证明对任意自然数 $n, p\ (p > 1)$ 有 $u_{n+p} = u_{n+1}u_p + 2u_n u_{p-1}$.

求出 $u_n$ 与 $u_{n+3}$ 的最大公约数.

（第 31 届国际数学奥林匹克候选题，1990 年）

[证]

$$u_{n+p} = u_{n+p-1} + 2u_{n+p-2},$$
$$u_{n+p-1} = u_{n+p-2} + 2u_{n+p-3},$$
$$\cdots\cdots$$

$$u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n.$$

将以上各式分别乘以 $u_1, u_2, \cdots, u_{p-1}$,得

$$u_1 u_{n+p} = u_1 u_{n+p-1} + 2u_1 u_{n+p-2},$$

$$u_2 u_{n+p-1} = u_2 u_{n+p-2} + 2u_2 u_{n+p-3},$$

$$\cdots\cdots$$

$$u_{p-1} u_{n+2} = u_{p-1} u_{n+1} + 2u_{p-1} u_n.$$

相加得

$$\begin{aligned} u_{n+p} &= u_{n+p-1}(u_1 - u_2) + u_{n+p-2}(u_2 + 2u_1 - u_3) + \cdots \\ &\quad + u_{n+1}(u_{p-1} + 2u_{p-2}) + 2u_{p-1}u_n \\ &= u_{n+1}u_p + 2u_{p-1}u_n. \end{aligned}$$

在上式中取 $p = 3$ 得

$$\begin{aligned} u_{n+3} &= u_{n+1}u_3 + 2u_n u_2 \\ &= 3u_{n+1} + 2u_n. \end{aligned}$$

从而 $u_{n+3}$ 与 $u_n$ 的最大公约数

$$(u_{n+3}, u_n) = d \mid 3u_{n+1}.$$

由 $u_1 = 1$, $u_2 = 1$ 是奇数,及 $u_n = u_{n-1} + 2u_{n-2}$ 可推出 $u_n$ 均为奇数,从而由

$$u_n = u_{n-1} + 2u_{n-2}$$

可知 $$(u_n, u_{n-1}) = (u_{n-1}, u_{n-2}) = \cdots = (u_2, u_1) = 1.$$

于是由 $d \mid u_n$, $d \mid 3u_{n+1}$ 得

$$d \mid 3.$$

即 $d = 1$ 或 3.

再由 $$u_{n+3} = u_{n+2} + 2u_{n+1},$$

$$u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n,$$

相加可得 $$u_{n+3} = 3u_{n+1} + 2u_n.$$

由此易得,当且仅当 $3 \mid n$ 时,$3 \mid u_n$.

所以有 $$d = (u_n, u_{n+3}) = \begin{cases} 1, & 若\ 3 \nmid n; \\ 3, & 若\ 3 \mid n. \end{cases}$$

5·9 数列 101,104,116,$\cdots$ 的通项是 $a_n = 100 + n^2$,其中 $n = 1, 2, 3, \cdots$. 对于每一个 $n$,用 $d_n$ 表示 $a_n$ 与 $a_{n+1}$ 的最大公约数. 求 $d_n$ 的最大值. 其中 $n$ 取一切正整数.

（第3届美国数学邀请赛，1985年）

［解］ 我们可以证明更一般的结论：

如果 $a$ 是正整数，且 $d_n$ 是 $a+n^2$ 与 $a+(n+1)^2$ 的最大公约数，则当 $n=2a$ 时，$d_n$ 达到最大值是 $4a+1$.

由于 $d_n$ 是 $a+n^2$ 与 $a+(n+1)^2$ 的最大公约数，则

$$d_n \mid (a+n^2),$$

$$d_n \mid [a+(n+1)^2].$$

从而 $$d_n \mid [a+(n+1)^2]-(a+n^2).$$

即 $$d_n \mid (2n+1). \quad ①$$

又因为 $2(a+n^2)=n(2n+1)+(2a-n)$，则由

$$d_n \mid (a+n^2), \quad d_n \mid (2n+1)$$

得 $$d_n \mid (2a-n). \quad ②$$

由①，②知 $d_n \mid [(2n+1)+2(2a-n)]$，即

$$d_n \mid (4a+1).$$

因此有 $$1 \leqslant d_n \leqslant 4a+1.$$

下面我们证明 $d_n$ 可以达到 $4a+1$.

事实上，当 $n=2a$ 时，

$$a+n^2=a(4a+1),$$

$$a+(n+1)^2=(a+1)(4a+1).$$

因为 $$(a, a+1)=1,$$

所以 $a+n^2$ 和 $a+(n+1)^2$ 的最大公约数为 $4a+1$.

所以 $d_n$ 达到的最大值为 $4a+1$.

特别地，当 $a=100$ 时，$d_n$ 的最大值为 401.

5·10 自然数 $a$ 和 $b$ 互素.证明 $a+b$ 与 $a^2+b^2$ 的最大公约数等于1或2.

（第3届全俄数学奥林匹克，1963年）

［证］ 设 $d$ 是 $a^2+b^2$ 及 $a+b$ 的最大公约数，则有

$$d \mid a^2+b^2, \quad d \mid a+b.$$

于是 $$d \mid (a+b)^2-(a^2+b^2)=2ab.$$

进而 $$d \mid 2a(a+b)-2ab=2a^2,$$

$$d \mid 2b(a+b)-2ab=2b^2.$$

因此，$d$ 是 $2a^2$ 和 $2b^2$ 的公约数.

由题设，$(a,b)=1$，则

$$(a^2,b^2)=1.$$

所以 $2a^2$ 和 $2b^2$ 不可能被大于 2 的数整除.

因而 $$d\leqslant 2.$$

即 $a^2+b^2$ 与 $a+b$ 的最大公约数是 1 或 2.

5·11　证明　$m(m+1)$ 不是任何整数的幂，其中 $m$ 为自然数.

（第 4 届全俄数学奥林匹克，1964 年）

［证］　假设 $m(m+1)$ 是某一个自然数的 $k$ 次幂，由于

$$(m,\ m+1)=1,$$

则必有 $$m=a^k,\ m+1=b^k,\ b\geqslant a+1.$$

由于 $$\begin{aligned}(a+1)^k&>(a+1)a^{k-1}.\\&=a^k+a^{k-1}\\&>a^k+1\\&=m+1.\end{aligned}$$

则 $$b^k<(a+1)^k.$$

即 $$b<a+1.$$

出现矛盾.

于是 $m(m+1)$ 不是任何整数的幂.

5·12　$A$ 为整数组成的无限集，每一元素 $a\in A$ 是至多 1987 个素数的乘积（重数计算在内）. 证明，必存在一个无限集 $B\subset A$ 及一个正整数 $b$，使 $B$ 中任意两个数的最大公约数为 $b$.

（第 28 届国际数学奥林匹克候选题，1987 年）

［证］　(1) 若每个素数都只是集合 $A$ 中有限多个元素的约数，那么可取一个 $A$ 的子集 $B$，使 $B$ 是无限集，且 $B$ 中每两个数都互素（即 $b=1$）.

具体构造 $B$ 的方法如下：

先取元素 $a_1$，再取与 $a_1$ 互素的数 $a_2$，再取与 $a_1,a_2$ 互素的数 $a_3$. 由于 $A$ 中每一元素都至多有 1987 个素约数，且每个素数都只是集合 $A$ 中有限多个元素的约数，所以这样的取法是可以做到的.

一般地，当取定 $a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$ 之后，再取 $a_n$ 与这 $n-1$ 个数互素.

这样得到的 $B=\{a_1,a_2,\cdots,a_{n-1},a_n,\cdots\}$ 及 $b=1$ 符合题目的要

求.

(2) 若存在素数 $p_1$ 为 $A$ 中无限多个元素的约数,考虑集合

$$A_1 = \{\frac{a}{p_1},\ p_1 \mid a,\ \ a \in A\},$$

则 $A_1$ 是无限集.

这时有两种可能:

或者存在无限集 $B_1 \subset A_1$, $B_1$ 中每两个数都互素,从而取集合 $B$,使 $B$ 中的元素由 $B_1$ 中的每个元素的 $p_1$ 倍组成,则 $B$ 及 $b = p_1$ 符合题目要求.

或者存在无限集

$$A_2 = \{\frac{a}{p_1 p_2}, p_1 p_2 \mid a,\ a \in A\}.$$

如此继续下去.由于 $A$ 中每个元素至多有 1987 个素约数,所以最终将得到符合要求的无限集 $B$ 及数 $b$.

5·13　数列 $\{a_n\}$ 由如下关系式定义:

$$a_0 = 0,\ a_n = P(a_{n-1}),\ n = 1,2,\cdots,$$

其中 $P(x)$ 为某个正整数系数的多项式.

证明对于任何两个具有最大公约数 $d$ 的自然数 $m$ 和 $k$,数 $a_m$ 和 $a_k$ 的最大公约数都是 $a_d$.

(第 22 届全苏数学奥林匹克,1988 年)

[证 1]　先证明如下的引理:

如果整数数列 $a_0 = 0, a_1, a_2, a_3, \cdots$ 具有性质:
对任何下标 $m > k \geqslant 1$,都有

$$(a_m, a_k) = (a_{m-k}, a_k), \qquad ①$$

则必有

$$(a_m, a_k) = a_d.$$

其中 $d = (m, k)$,记号 $(x, y)$ 表示 $x$ 和 $y$ 的最大公约数.

事实上,由 $(m,k) = (m-k,k)$,我们可从任何数对 $(m,k)$ 开始,反复运用 $(m,k) \to (m-k,k)$,即由数对中的较大者减去其中的较小者,而保持较小者不动,终将得到数对 $(d,0)$,其中 $d = (m,k)$.实际上,这正是通常的辗转相除法.

这样,由 ① 式即可推得

$$(a_m, a_k) = (a_{m-k}, a_k) = \cdots = (a_d, a_0) = a_d.$$

数论卷

下面再来证明问题本身.

记 $$\underbrace{P(P(P\cdots(P}_{n重}(x))\cdots)) = P_n(x),$$

则 $P_n(x)$ 为整系数多项式,且有

$$a_m = P_m(a_0) \quad 及 \quad a_m = P_{m-k}(a_k),\ m > k.$$

若记 $$P_n(x) = a_n + xQ_n(x),$$

则 $Q_n(x)$ 也是整系数多项式.

下面只需再验证 ① 式成立即可.

对 $m > k \geqslant 1$,我们有

$$\begin{aligned}(a_m, a_k) &= (P_{m-k}(a_k), a_k)\\ &= (a_{m-k} + a_kQ_{m-k}(a_k), a_k)\\ &= (a_{m-k}, a_k).\end{aligned}$$

因而 ① 式成立.

由引理,即有$(a_m, a_k) = a_d$,其中 $d = (m, k)$.

[证 2] 我们用数学归纳法证明:

对一切自然数 $m \leqslant n$ 和$k \leqslant n$,有

$$(a_m, a_k) = a_d. \qquad ①$$

其中 $d = (m, k)$.

当 $n = 1$ 时,结论显然成立.

假设对一切 $n \leqslant n_0$ 结论成立,我们证明当 $n = n_0 + 1$ 时结论也成立.

如果 $m \leqslant n_0$,且 $k \leqslant n_0$,那么由归纳假设可知,等式 ① 成立.

如果 $m = k = n_0 + 1$,① 显然成立.

剩下只要考察 $m$ 或者$k$,其中一个等于 $n_0 + 1$,而另一个不超过 $n_0$ 的情形.

为确定起见,设 $m = n_0 + 1,\ k \leqslant n_0$.

那么 $n_0 = m - 1 \geqslant m - k = n_0 - k + 1 \geqslant 1$,即 $m - k$ 是不超过 $n_0$ 的自然数.

因此,由于$(m, k) = (m - k, k)$及归纳假设,有

$$a_d = a_{(m,k)} = a_{(m-k,k)} = (a_{m-k}, a_k). \qquad ②$$

所以为了证明当 $m = n_0 + 1, k \leqslant n_0$ 时,等式 ① 成立,只要验证

$$(a_m, a_k) = (a_{m-k}, a_k).$$

由已知条件得 $a_m = P_{m-k}(a_k)$,其中记号 $P_n(x)$ 同证法 1. 又记

$$P_n(x) = a_n + xQ_n(x),$$

则同证法 1,有

$$(a_m, a_k) = (a_{m-k}, a_k).$$

于是由 ② 式有 $(a_m, a_k) = a_d$.

因而 ① 式对 $m = n_0 + 1$, $k \leqslant n_0$ 成立.

从而对所有 $m \leqslant n$, $k \leqslant n$, ① 式成立.

**5·14** 证明如果 $a$ 和 $b$ 是正整数,那么等差数列

$$a, 2a, 3a, \cdots, ba$$

中能被 $b$ 整除的项的个数等于数 $a$ 和 $b$ 的最大公约数.

(匈牙利数学奥林匹克,1901 年)

**[证]** 设 $d$ 是 $a$ 和 $b$ 的最大公约数.

$a = dr$, $b = ds$. 其中 $r$ 和 $s$ 是互素的整数.

如果所有的数 $a, 2a, 3a, \cdots, ba$ 用 $b$ 去除,那么它们的商可以写成

$$\frac{r}{s}, \frac{2r}{s}, \frac{3r}{s}, \cdots \frac{(ds)r}{s}.$$

由于 $(r, s) = 1$,则上面各数中,能为整数的数,必须是分子中 $r$ 的系数为

$$s, 2s, 3s, \cdots, ds.$$

这样的个数恰为 $d$ 个.

即 $a, 2a, 3a, \cdots, ba$ 中能被 $b$ 整除的项的个数为 $d$ 个,即 $a$ 和 $b$ 的最大公约数.

**5·15** 假设 $d$ 是正整数 $a$ 和 $b$ 的最大公约数,$d'$ 是正整数 $a'$ 和 $b'$ 的最大公约数. 证明数 $aa', ab', ba', bb'$ 的最大公约数等于 $dd'$.

(匈牙利数学奥林匹克,1913 年)

**[证 1]** 由题设,可设

$$a = a_1 d, \quad b = b_1 d,$$
$$a' = a_1' d', \quad b' = b_1' d'.$$

其中 $$(a_1, b_1) = 1, (a_1', b_1') = 1.$$

于是 $$aa' = dd' a_1 a_1', \ ab' = dd' a_1 b_1',$$
$$ba' = dd' b_1 a_1', \ bb' = dd' b_1 b_1'.$$

因此,$dd'$ 是数 $aa'$, $ab'$, $ba'$, $bb'$ 的公约数.

若要证明 $dd'$ 是 $aa'$, $ab'$, $ba'$, $bb'$ 的最大公约数,则只要证明 $a_1a_1'$, $a_1b_1'$, $b_1a_1'$, $b_1b_1'$ 没有公共素约数即可.

假设 $a_1a_1'$, $a_1b_1'$, $b_1a_1'$, $b_1b_1'$ 有公共素约数 $p$.

因为 $a_1$ 和 $b_1$ 互素,则 $a_1$ 和 $b_1$ 中至少有一个不能被 $p$ 整除,假设 $a_1$ 不能被 $p$ 整除,这样,乘积 $a_1a_1'$ 能被 $p$ 整除,因此 $a_1'$ 能被 $p$ 整除.

同样,由数 $a_1b_1'$ 能被 $p$ 整除可知 $b_1'$ 能被 $p$ 整除.

但是 $a_1'$ 与 $b_1'$ 互素,因此 $a_1'$ 和 $b_1'$ 不能同时被 $p$ 整除.从而导致矛盾.

于是 $a_1a_1'$, $a_1b_1'$, $b_1a_1'$, $b_1b_1'$ 没有公共素约数,即 $dd'$ 是数 $aa'$, $ab'$, $ba'$, $bb'$ 的最大公约数.

[证 2]　由最大公约数性质可得

$$(aa', ab', ba', bb') = ((aa', ab'),(ba', bb')).$$

但是

$$(aa', ab') = a(a', b') = ad',$$

$$(ba', bb') = b(a', b') = bd'.$$

因此　$(aa', ab', ba', bb') = (ad', bd') = (a,b)d' = dd'$.

即 $dd'$ 是数 $aa'$, $ab'$, $ba'$, $bb'$ 的最大公约数.

5·16　某国某王朝无限制地发行面值分别为 $n_1, n_2, n_3, n_4, \cdots$ 戈比的硬币,其中 $n_1 < n_2 < n_3 < n_4 < \cdots$ 是由自然数组成的无穷数列.

证明可以截断这个数列,即可以找到 1 个数 $N$,使得只要使用面值为 $n_1, n_2, \cdots, n_N$ 戈比的硬币,即可支付可用现行货币直接支付(不用找钱)的一切款额.

(第 47 届莫斯科数学奥林匹克,1984 年)

[证]　设 $d$ 为所给出的所有整数的最大公约数,即　$d = (n_1, n_2, n_3, n_4, \cdots)$.

并记

$$d_s = (n_1, n_2, n_3, \cdots, n_s).$$

由于 $n_1 < n_2 < n_3 < n_4 < \cdots$,

所以

$$d_1 \geqslant d_2 \geqslant d_3 \geqslant \cdots.$$

于是对某个 $k \geqslant 2$,就有

$$d_k = d_{k+1} = \cdots = d.$$

取出数 $n_1, n_2, \cdots, n_k$,并考察可以用这些面值的硬币来支付的所有不同的款项.

将所有这些款项依递增顺序排列起来，易见，自某项之后，它是一个以 $d_k = d$ 为公差的等差数列.

显然，由原先的无穷多种面值 $\{n_1, n_2, n_3, \cdots\}$ 的硬币所能支付的款项，也形成了这样的等差数列，这个数列与上述数列不同的至多只是这两个数列前面的有限项. 因此只要适当在 $n_1, n_2, \cdots, n_k$ 之中补入若干项 $n_{k+1}, n_{k+2}, \cdots, n_N$，就可以使两个数列变成相同的数列.

于是由有限种面值 $n_1, n_2, \cdots, n_N$ 的硬币即可支付由 $n_1, n_2, n_3, \cdots$ 所能支付的一切费用.

5·17　两数之和为 667，它们的最小公倍数除以最大公约数所得的商等于 120，求这两数.

（基辅数学奥林匹克，1954 年）

［解］　设所求的数为 $x$ 和 $y$，且 $d = (x, y)$.

则　$x = dx_1,\ y = dy_1,\ (x_1, y_1) = 1.$

于是　$[x, y] = \dfrac{xy}{d} = dx_1y_1.$

由题意，有

$$\begin{cases} d(x_1 + y_1) = 667, & ① \\ \dfrac{dx_1y_1}{d} = 120. & ② \end{cases}$$

由　$x_1y_1 = 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5,$

又　$667 = 1 \cdot 23 \cdot 29.$

因此由 ①，② 可得

$$x_1 = 8,\ y_1 = 15.$$

或

$$x_2 = 24,\ y_2 = 5.$$

相应的　$d_1 = 29,\quad d_2 = 23.$

因此，所求的数有两组：

$$x_1 = 232,\ y_1 = 435,$$

或

$$x_2 = 552,\ y_2 = 115.$$

5·18　已知两数中，每一个除以它们的最大公约数所得的商之和等于 18，它们的最小公倍数等于 975，求这两个正整数.

（基辅数学奥林匹克，1952 年）

［解］　设两个正整数为 $x, y$，且 $d = (x, y)$.

则 $x = dx_1,\ y = dy_1,\ (x_1, y_1) = 1.$

于是$[x, y] = \dfrac{xy}{d} = dx_1y_1.$



由题意,有

$$\begin{cases} x_1 + y_1 = 18, \\ dx_1y_1 = 975. \end{cases}$$

显然 $x_1 \leqslant 17,\ y_1 \leqslant 17$,又

$$975 = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 13.$$

又由 $x_1,\ y_1$ 一定是975的约数,则只能有

$$x_1 = 5,\ y_1 = 13,\ d = 15.$$

因此 $x = 75,\ y = 195.$

5·19 设记号$(a, b, \cdots, g)$和$[a, b, \cdots, g]$分别表示正整数$a, b, \cdots, g$的最大公约数和最小公倍数,例如$(3,6,9) = 3,\ [6,15] = 30.$

证明$\dfrac{[a,b,c]^2}{[a,b][b,c][c,a]} = \dfrac{(a,b,c)^2}{(a,b)(b,c)(c,a)}.$

(第1届美国数学奥林匹克,1972年)

[证1] 设 $a = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_n^{\alpha_n}$,

$b = p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_n^{\beta_n}$,

$c = p_1^{\gamma_1}p_2^{\gamma_2}\cdots p_n^{\gamma_n}$.

其中 $p_i$ 是素数,$\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ 是非负整数,$i = 1, 2, \cdots, n$.

由最大公倍数和最小公倍数的定义可得

$$[a, b] = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\max(\alpha_i, \beta_i)},$$

$$(a, b) = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\min(\alpha_i, \beta_i)},$$

其中$\max(\alpha_i, \beta_i)$表示$\alpha_i, \beta_i$中较大者,$\min(\alpha_i, \beta_i)$表示$\alpha_i, \beta_i$中较小者.

于是本题相当于证明

$$2\max(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) - \max(\alpha_i, \beta_i) - \max(\beta_i\gamma_i) - \max(\gamma_i, \alpha_i)$$
$$= 2\min(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) - \min(\alpha_i, \beta_i) - \min(\beta_i, \gamma_i) - \min(\gamma_i, \alpha_i).$$

不失一般性,令 $\alpha_i \leqslant \beta_i \leqslant \gamma_i$,对任意的 $i$ 都成立$(i = 1, 2, \cdots, n)$,则

$$2\max(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i)-\max(\alpha_i,\beta_i)-\max(\beta_i\gamma_i)-\max(\gamma_i,\alpha_i)$$
$$=2\gamma_i-\beta_i-\gamma_i-\gamma_i$$
$$=-\beta_i.$$
$$2\min(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i)-\min(\alpha_i,\beta_i)-\min(\beta_i,\gamma_i)-\min(\gamma_i,\alpha_i)$$
$$=2\alpha_i-\alpha_i-\beta_i-\alpha_i$$
$$=-\beta_i.$$

于是欲证的等式成立.

从而本题得证.

**[证 2]** 利用数论中的结果

$$[a,b]=\frac{ab}{(a,b)},$$
$$[a,b,c]=\frac{abc(a,b,c)}{(a,b)(b,c)(c,a)}.$$

可得

$$\frac{[a,b,c]^2}{[a,b][b,c][c,a]}$$
$$=\frac{\left\{\dfrac{abc(a,b,c)}{(a,b)(b,c)(c,a)}\right\}^2}{\dfrac{ab}{(a,b)}\cdot\dfrac{bc}{(b,c)}\dfrac{ca}{(c,a)}}$$
$$=\frac{(a,b,c)^2}{(a,b)(b,c)(c,a)}.$$

5·20 设$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$都是大于等于$A$的正整数,对于任意的$i,j$, $1\leqslant i,\ j\leqslant n$,有$(a_i,a_j)\leqslant B$.证明

$$[a_1,a_2,\cdots,a_n]\geqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{A^i}{B^{\frac{i(i-1)}{2}}},\ A,B\in N.$$

记号$(a_i,a_j)$表示$a_i$和$a_j$的最大公约数,$[a_1,a_2,\cdots,a_n]$表示$a_1,a_2,\cdots,a_n$的最小公倍数.

(中国国家集训队训练题,1990年)

**[证]** 用数学归纳法.

(1)$n=1,2$时,结论显然成立.

(2)假设$n=k$时结论成立,即

$$[a_1,a_2,\cdots,a_k]\geqslant\max_{1\leqslant i\leqslant k}\frac{A^i}{B^{\frac{i(i-1)}{2}}}.$$

那么,当 $n=k+1$ 时,由 $a_{k+1}\geqslant A$,有

$$\begin{aligned}&[a_1,a_2,\cdots,a_k,a_{k+1}]\\=&[[a_1,a_2,\cdots,a_k],a_{k+1}]\\=&\frac{[a_1,a_2,\cdots,a_k]\cdot a_{k+1}}{([a_1,a_2,\cdots,a_k],a_{k+1})}\\\geqslant&\max_{1\leqslant i\leqslant k}\frac{A^i}{B^{\frac{i(i-1)}{2}}}\cdot\frac{a_{k+1}}{([a_1,a_2,\cdots,a_k],a_{k+1})}\\\geqslant&\max_{1\leqslant i\leqslant k}\frac{A^i}{B^{\frac{i(i-1)}{2}}}.\qquad①\end{aligned}$$

这里,最后一步用到 $a_{k+1}\geqslant([a_1,a_2,\cdots,a_k],a_{k+1})$.

另一方面,由

$([a_1,a_2,\cdots,a_k],a_{k+1})\leqslant\prod_{i=1}^{k}(a_i,a_{k+1})\leqslant B^k$ 及 $a_{k+1}\geqslant A$,则有

$$\begin{aligned}[a_1,a_2,\cdots,a_k,a_{k+1}]&=\frac{[a_1,a_2,\cdots,a_k]\cdot a_{k+1}}{([a_1,a_2,\cdots,a_k],a_{k+1})}\\&\geqslant\frac{A^k\cdot a_{k+1}}{B^{\frac{k(k-1)}{2}}([a_1,a_2,\cdots,a_k],a_{k+1})}\\&\geqslant\frac{A^k\cdot A}{B^{\frac{k(k-1)}{2}}\cdot B^k}\\&=\frac{A^{k+1}}{B^{\frac{k(k+1)}{2}}}.\qquad②\end{aligned}$$

由 ①,② 得

$$[a_1,a_2,\cdots,a_k,a_{k+1}]\geqslant\max_{1\leqslant i\leqslant k+1}\frac{A^i}{B^{\frac{i(i-1)}{2}}}.$$

于是 $n=k+1$ 时,结论成立.

从而对所有自然数 $n$,结论成立.

5·21　设 $[r,s]$ 表示正整数 $r$ 和 $s$ 的最小公倍数.求有序三元正整数组 $(a,b,c)$ 的个数,　其中　$[a,b]=1000$,　$[b,c]=2000$,$[c,a]=2000$.

(第 5 届美国数学邀请赛,1987 年)

**[解]**　由 $[a,b]=1000$, $[b,c]=2000$, $[c,a]=2000$ 可知:$a$,

$b,c$ 均为 $2^m \cdot 5^n$ 型的数.

不妨设 $a = 2^{m_1}5^{n_1}$, $b = 2^{m_2}5^{n_2}$, $c = 2^{m_3}5^{n_3}$.

由 $[a,b] = 2^3 \cdot 5^3$, $[b,c] = [c,a] = 2^4 \cdot 5^3$ 及最小公倍数的性质可得

$$\max\{m_1,m_2\} = 3,$$
$$\max\{m_2,m_3\} = 4,$$
$$\max\{m_3,m_1\} = 4,$$
$$\max\{n_1,n_2\} = 3,$$
$$\max\{n_2,n_3\} = 3,$$
$$\max\{n_3,n_1\} = 3.$$

由此可知, $m_3 = 4$, $m_1$ 和 $m_2$ 中必有一个是3,此时另一个可取0,1,2或3,不计重复,一共有7种不同情况.

$n_1,n_2,n_3$ 中必有2个是3,此时第3个数可取0,1,2或3,不计重复,一共有10种不同情况.

从而满足本题条件的数组 $(a,b,c)$ 共有

$$7 \cdot 10 = 70(\text{个}).$$

**5·22** 设 $r$ 与 $s$ 是正整数,试推导满足下列条件的有序正整数四元组 $(a,b,c,d)$ 的个数公式:

$$3^r \cdot 7^s = [a,b,c] = [a,b,d] = [a,c,d] = [b,c,d].$$

要求答案是 $r$ 与 $s$ 的函数.

记号 $[x,y,z]$ 表示 $x,y,z$ 的最小公倍数.

(第41届美国普特南数学竞赛,1980年)

**[解]** 因为3与7是素数,则 $a,b,c,d$ 中每一个都具有 $3^m \cdot 7^n$ 的形式,其中 $m \in \{0,1,2,\cdots,r\}$, $n \in \{0,1,2,\cdots,s\}$.

首先证明, $a,b,c,d$ 中至少有二个 $m = r$,至少有二个 $n = s$.

否则,若至多有一个 $m = r$,不失一般性,令 $a = 3^r \cdot 7^n$,且 $b,c,d$ 中的 $m < r$,那么

$$[b,c,d] \neq 3^r 7^n.$$

与已知 $[b,c,d] = 3^r \cdot 7^s$ 矛盾.

所以至少有二个 $m = r$.

同理至少有二个 $n = s$.

下面寻找符合条件的$(a,b,c,d)$的个数.

若$(a,b,c,d)$中有二个的因数3的指数为$r$,另二个的$m\in\{0,1,2,\cdots,r-1\}$,即每一个有$r$种选择,所以共有$C_4^2C_r^1C_r^1$(个).

若$(a,b,c,d)$中有三个因数3的指数为$m=r$,则另一个$m$在$\{0,1,\cdots,r-1\}$中选择有$r$种可能,所以共有$C_4^3C_r^1$(个).

若$(a,b,c,d)$中有四个因数3的指数为$m=r$,则只有一种可能.

即有
$$1+C_4^3C_r^1+C_4^2C_r^1C_r^1$$
种方法可决定$r$.

同理有
$$1+C_4^3C_s^1+C_4^2C_s^1C_s^1$$
种方法可决定$s$.

于是共有
$$(1+C_4^3C_r^1+C_4^2C_r^1C_r^1)(1+C_4^3C_s^1+C_4^2C_s^1C_s^1)$$
$$=(1+4r+6r^2)(1+4s+6s^2)$$
组满足条件的有序四元数组$(a,b,c,d)$.

5·23 $M_n$为$1,2,\cdots,n$的最小公倍数(如$M_1=1$, $M_2=2$, $M_3=6$, $M_4=12$, $M_5=60$, $M_6=60$).对什么样的正整数$n$, $M_{n-1}=M_n$成立.证明你的结论.

(澳大利亚数学竞赛,1991年)

[解] 若$n$是某个质数的幂,即
$$n=p^k, p\text{ 是质数}.$$
则
$$M_n=[1,2,\cdots,n-1,n]$$
$$=[M_{n-1},n]$$
$$=[M_{n-1},p^k]$$
$$=pM_{n-1}.$$
此时
$$M_{n-1}\neq M_n.$$
若$n$不是某个质数的幂.设
$$n=ab,\quad 1<a<n,\quad 1<b<n.$$
则
$$a\leqslant n-1,\quad b\leqslant n-1.$$
再令$(a,b)=1$,则
$$a\mid M_{n-1},\quad b\mid M_{n-1}.$$
所以
$$n=ab\mid M_{n-1}.$$
于是
$$M_n=M_{n-1}.$$

因此，$M_{n-1}=M_n$ 的充要条件是：自然数 $n$ 不是某个质数的幂.

5·24 设 $n$ 是自然数.我们研究以 $n$ 为最小公倍数的自然数对 $(u,v)$（如果 $u\neq v$，那么我们认为数对 $(u,v)$ 和数对 $(v,u)$ 是不同的）.

证明对给定的数值 $n$，这种数对的个数等于数 $n^2$ 的正约数的个数.

（匈牙利数学奥林匹克，1962 年）

［证 1］ 设数 $n$ 的标准分解式为

$$n=\prod_{i=1}^{s}p_i^{\alpha_i},$$

其中 $p_i$ 是不同的素数，$\alpha_i$ 是正整数，$i=1,2,\cdots,s$.

用记号 $[u,v]$ 表示 $u$ 和 $v$ 的最小公倍数.

由于 $[u,v]=n$，则数 $u$ 和 $v$ 的标准分解式中只能包含素数

$$p_1,\quad p_2,\quad \cdots,\quad p_s.$$

现在我们来确定在数 $u$ 和 $v$ 的标准分解式中，素数 $p_i(i=1,2,\cdots,s)$ 的指数.

因为 $p_i$ 在 $[u,v]=n$ 的标准分解式中的指数为 $\alpha_i$，所以在 $u$ 和 $v$ 的标准分解式中，$p_i$ 的指数都不大于 $\alpha_i$.

在数 $u$ 和 $v$ 中，素数 $p_i$ 的所有可能的指数分配可分成如下三种情形：

(1) 在 $u$ 和 $v$ 的标准分解式中，素数 $p_i$ 的指数都为 $\alpha_i$，这时只有 1 种可能；

(2) 在 $u$ 的标准分解式中，素数 $p_i$ 的指数为 $\alpha_i$，而在 $v$ 的标准分解式中，$p_i$ 的指数小于 $\alpha_i$，即指数可为 $0,1,2,\cdots,\alpha_i-1$，这时有 $\alpha_i$ 种可能；

(3) 在 $v$ 的标准分解式中，素数 $p_i$ 的指数为 $\alpha_i$，而在 $u$ 的标准分解式中，$p_i$ 的指数小于 $\alpha_i$，这时也有 $\alpha_i$ 种可能.

于是，素数 $p_i$ 的指数分配共有 $\alpha_i+\alpha_i+1=2\alpha_i+1$ 种可能.

对 $i$ 取 $1,2,\cdots,s$.则在 $u$ 和 $v$ 的标准分解式中，素数 $p_1,p_2,\cdots,p_s$ 的指数可能取的方法的总数等于 $(2\alpha_1+1)(2\alpha_2+1)\cdots(2\alpha_s+1)$.

于是满足 $[u,v]=n$ 的数对 $(u,v)$ 的个数为

$$\prod_{i=1}^{s}(2\alpha_i+1).$$

另一方面 $$n^2 = \prod_{i=1}^{s} p_i^{2\alpha_i}.$$



其所有正约数的个数也为$\prod_{i=1}^{s}(2\alpha_i + 1)$.

从而,满足$[u,v] = n$的数对$(u,v)$的个数等于$n^2$的正约数的个数.

**[证 2]** 如果能够建立最小公倍数为$n$的数对$(u,v)$与$n^2$的约数之间的一一映射,那么本题就可得证.

我们令每一数对$(u,v)$与数$d$对应,$d$满足

$$\frac{u}{v} = \frac{d}{n}. \qquad ①$$

显然数$d$是整数.

这是因为 $$d = u \cdot \frac{n}{v}.$$

而 $$v \mid n.$$

另一方面 $$n^2 = \left(u \cdot \frac{n}{v}\right)\left(v \cdot \frac{n}{u}\right) = d \cdot \left(v \cdot \frac{n}{u}\right),$$

因而$d$是$n^2$的约数.

下面我们再证明:如果$\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2}$,那么

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{[u_1,v_1]}{[u_2,v_2]}. \qquad ②$$

事实上,为了求得给定的数的最小公倍数,只需求出两个尽可能小的数,这两个数具有这样的性质,其中一个数乘上给定一个数的乘积等于另一个数乘上另一个给定的数的乘积,因此这两个数的选取只与给定的两个数的比有关.这样一来,如果我们将一个数对$(u_1,v_1)$变到另一个具有相同比例的数对$(u_2,v_2)$$\left(\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2}\right)$时,最小公倍数成比例地变化.从而②式成立.

因为$[u,v] = n$,那么由①,②可得

$$\frac{u}{d} = \frac{v}{n} = \frac{[u,v]}{[d,n]} = \frac{n}{[d,n]}. \qquad ③$$

这样,如果知道了数$d$,就可求出$u,v$.

$$u = \frac{dn}{[d,n]}, \quad v = \frac{n^2}{[d,n]}. \qquad ④$$

于是，$n^2$ 的每一个约数 $d$ 对应于不多于一个的数对$(u,v)$.

同时，如果 $d$ 是$n^2$ 的约数，那么由关系式④所确定的 $u$ 和$v$ 都是整数，这是因为 $dn$ 和$n^2$ 都是 $d$ 和$n$ 的公倍数，因而

$$[d,n] \mid dn, \quad [d,n] \mid n^2.$$

即 $u$ 和$v$ 是整数.

因此，选取数 $n^2$ 的任一约数 $d$ 之后，由关系式可得整数 $u,v$，它们满足关系式③，于是由②推出$[u,v] = n$.

于是，数 $n^2$ 的每一个约数对应于一个且仅仅一个有序数对$(u, v)$，从而满足$[u,v] = n$ 的数对$(u,v)$的个数等于 $n^2$ 的约数的个数.

**5·25** (1) 设$0 < a < b$ 为整数. 证明或否定：在任一由 $b$ 个连续正整数组成的集合中，存在两个（不一定是连续的）数，其乘积能被 $ab$ 整除.

(2) 设$0 < a < b < c$ 为整数. 证明或否定：在任一由 $c$ 个连续正整数组合的集合中，存在三个（不一定是连续的）数，其乘积被 $abc$ 整除.

（加拿大数学奥林匹克训练题，1988 年）

**[解]** (1) 在 $b$ 个连续整数中必有一数$x$ 被$b$ 整除，也必有一数 $y$ 被 $a$ 整除.

如果 $x \neq y$，则 $xy$ 能被$ab$ 整除.

如果 $x = y$. 设 $a,b$ 的最小公倍数为$m$，最大公约数为 $d$，则

$$md = ab.$$

且 $x$ 能被$m$ 整除.

由于 $a < b$，所以

$$d \leqslant \min(a, b-a) \leqslant \frac{b}{2}.$$

从而在不含 $x$ 的$\left[\frac{b}{2}\right]$个连续整数中，必有一数 $z$ 能被$d$ 整除.

于是 $xz$ 被$md = ab$ 整除.

因此本题的答案是肯定的.

(2) 本题的答案是否定的.

即可以找到$0 < a < b < c$ 的三个整数，使$c$ 个连续正整数的集合中，任何三个数的积不能被 $abc$ 整除.

取三个素数，其中最大的不超过最小的 2 倍，例如 7，11 和 13. 令

$$a = 7 \cdot 11, \quad b = 7 \cdot 13, \quad c = 11 \cdot 13 = 143.$$

$$abc = 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2.$$

考虑区间$[6006-66, 6006+76]$中的143个连续整数.



这个区间中的数$6006 = 6 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$能被$a, b$和$c$中的任一个整除.

由于　$66 < 76 < a < b < c$,所以这个区间的其余的142个数均不被$a, b$和$c$中的任一个整除.

如果选取的3个数中有一个是6006,那么其余的两个数的乘积应被$7 \cdot 11 \cdot 13$整除,从而必有一个数能被$a, b, c$之一整除,但这样的数在上述区间中不存在.

如果选取的3个数中没有6006,那么这3个数均不能被$a, b$和$c$整除,所以这3个数应分别被$7^2, 11^2, 13^2$整除.

但是,由于$6006 = 35 \cdot 169 + 7 \cdot 13$,

在区间$[6006-66, 6006+76]$中13的倍数只有

$$35 \cdot 169 + 2 \cdot 13, 35 \cdot 169 + 3 \cdot 13, \cdots, 35 \cdot 169 + 12 \cdot 13.$$

其中没有一个数能被169整除.

所以不可能选出三个数使它们的乘积能被$abc$整除.

5·26　设有10个自然数$a_1 < a_2 < \cdots < a_{10}$.证明它们的最小公倍数不小于$10a_1$.

(第44届莫斯科数学奥林匹克,1981年)

[证]　设$a_1, a_2, \cdots, a_{10}$的最小公倍数为$A$,则

$$A = [a_1, a_2, \cdots, a_{10}].$$

从而存在正整数$k_i (i = 1, 2, \cdots, 10)$使

$$A = k_1 a_1 = k_2 a_2 = \cdots = k_{10} a_{10}.$$

由于　$$a_1 < a_2 < \cdots < a_{10},$$

所以　$$k_1 > k_2 > \cdots > k_{10}.$$

因为$k_i$是正整数,则必有$k_1 \geqslant 10$.

于是　$$A = k_1 a_1 \geqslant 10a_1.$$

5·27　若$n, a_1, a_2, \cdots, a_k$是整数,$n \geqslant a_1 > a_2 > \cdots > a_k > 0$,且对于所有的$i$和$j$,　$a_i$和$a_j$的最小公倍数不超过$n$.证明对于$1 \leqslant i \leqslant k$,　$ia_i \leqslant n$.

(加拿大数学奥林匹克训练题,1992年)

[证]　我们对 $i$ 用数学归纳法.

(1) 当 $i=1$ 时,由题设 $a_1 \leqslant n$,所以 $i=1$ 时结论正确.

(2) 假设结论对 $\leqslant i-1$ 的正整数都成立.

若对于某些整数 $p$ 和 $q$,

$$[a_{i-1}, a_i] = pa_{i-1} = qa_i.$$

因为 $a_{i-1} > a_i$,则 $q > p$.

如果 $q < i$,则

$$i(q-p) \geqslant i > q,$$

即
$$(i-1)q > ip, \quad \frac{p}{q} < \frac{i-1}{i}.$$

由归纳假设可推出

$$\begin{aligned} ia_i &= ia_{i-1} \cdot \frac{p}{q} \\ &< ia_{i-1} \cdot \frac{i-1}{i} \\ &= (i-1)a_{i-1} \\ &\leqslant n. \end{aligned}$$

如果 $q \geqslant i$,则由归纳假设有

$$ia_i \leqslant qa_i = [a_{i-1}, a_i] \leqslant n.$$

于是结论对 $i$ 成立.

由(1),(2),对所有的 $1 \leqslant i \leqslant k$,　$ia_i \leqslant n$ 成立.

5·28　设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为正整数,均不超过 $2n$,　$n \neq 4$.证明

$$\min_{1 \leqslant i < j \leqslant n} [a_i, a_j] \leqslant 6\left(\left[\frac{n}{2}\right] + 1\right).$$

记号$[a_i, a_j]$表示 $a_i$ 和 $a_j$ 的最小公倍数.

(中国国家集训队训练题,1990 年)

[证]　(1) 若 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中有一个是另一个的倍数,则

$$\min_{1 \leqslant i < j \leqslant n} [a_i, a_j] \leqslant 2n \leqslant 6\left(\left[\frac{n}{2}\right] + 1\right)$$

成立.

(2) 若 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中每一个均不是其他数的倍数.

若 $a_i \leqslant n$,则用 $2a_i$ 代替 $a_i$,于是总可以假定

$$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}=\{n+1,n+2,\cdots,2n\}=A.$$

(i) 若 $2\mid n+1$,则$\frac{3}{2}(n+1)\in A$.

$$\begin{aligned}\min_{1\leqslant i<j\leqslant n}[a_i,a_j]&\leqslant\left[n+1,\frac{3}{2}(n+1)\right]\\&=3(n+1)\\&=6\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right).\end{aligned}$$

(ii) 若 $2\mid n+2$.

当 $n>4$ 时,$\frac{3}{2}(n+2)\in A$.

$$\begin{aligned}\min_{1\leqslant i<j\leqslant n}[a_i,a_j]&\leqslant\left[n+2,\frac{3}{2}(n+2)\right]\\&=3(n+2)\\&=6\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right).\end{aligned}$$

当 $n=2$ 时,$A=\{3,4\}$.

则
$$[3,4]=12=6\left(\left[\frac{2}{2}\right]+1\right).$$

由以上,命题得证.

5·29　(1) 对什么样的自然数 $n>2$,有一个由 $n$ 个相继自然数组成的集合,使得集合中最大一个数是其余 $n-1$ 个数的最小公倍数的约数?

(2) 对什么样的自然数 $n>2$,恰有一个集合具有上述性质?

(第 22 届国际数学奥林匹克,1981 年)

**[解 1]**　(1) 首先,我们证明 $n\neq 3$.

否则,设 3 个相继自然数的集合为$\{r,r+1,r+2\}$ 具有题中要求的性质:

$$r+2\mid r(r+1).$$

由于
$$(r+1,\quad r+2)=1,$$

所以
$$r+2\mid r.$$

这是不可能的.

下面分 $n$ 为奇偶数讨论 $n\geqslant 4$ 的情形.

(i) 若 $n=2k$. 则 $n-1$ 是奇数,此时 $n$ 个数的集合$\{n-1,\quad n,$

$n+1, \cdots, 2n-2\}$ 满足题目要求.

(ii) 若 $n=2k+1$. 则 $n-2$ 是奇数,此时 $n$ 个数的集合 $\{n-3, n-2, n-1, \cdots, 2n-4\}$ 满足题目要求.

由(i),(ii)可知,当 $n \geqslant 4$ 时,总有一个由 $n$ 个相继自然数组成的集合满足题目要求.

(2) 首先证明:当 $n \geqslant 5$ 时,满足题目要求的 $n$ 个相继自然数的集合至少有两个.

当 $n=5$ 时,集合 $\{2,3,4,5,6\}$ 和 $\{8,9,10,11,12\}$ 都满足题目要求;

当 $n=7$ 时,集合 $\{4,5,6,7,8,9,10\}$ 和 $\{6,7,8,9,10,11,12\}$ 都满足题目要求;

当 $n$ 为 $\geqslant 9$ 的奇数时,除(1)中指出的 $\{n-3, n-2, n-1, \cdots, 2n-4\}$ 之外, $\{n-7, n-6, n-5, \cdots, 2n-8\}$ 也满足题目要求;

当 $n$ 为 $\geqslant 6$ 的偶数时,除(1)中指出的 $\{n-1, n, n+1, \cdots, 2n-2\}$ 之外, $\{n-5, n-4, n-3, \cdots, 2n-6\}$ 也满足题目要求.

因此, $n \geqslant 5$ 时,至少有两个满足题目要求的 $n$ 个相继自然数的集合.

下面证明:当 $n=4$ 时,只有惟一的集合 $\{3,4,5,6\}$ 满足题目要求.

设 $\{k, k+1, k+2, k+3\}$ 满足题目要求. 则 $k+3$ 能整除 $k$, $k+1, k+2$ 的最小公倍数.

因为 $(k+2, k+3)=1$,所以又有 $k+3$ 能整除 $k$ 和 $k+1$ 的最小公倍数,注意到 $(k, k+1)=1$,所以 $(k+3) \mid k(k+1)$.

由于 $k$ 为偶数时, $(k+1, k+3)=1$,此时由 $(k+3) \mid k(k+1)$ 导致 $(k+3) \mid k$,这是不可能的,

$k$ 为奇数时,设 $k+3=2m$,则有

$$2m \mid (2m-3)(2m-2),$$

即

$$m \mid (m-1)(2m-3).$$

又由 $(m, m-1)=1$,则 $m \mid 2m-3$,从而有 $m \mid 3$.

由于 $m \neq 1$,所以只能有 $m=3$. 此时恰好为集合 $\{3,4,5,6\}$.

即 $\{3,4,5,6\}$ 是满足题目的要求的惟一集合,因此 $n=4$ 时,只有

惟一集合满足要求.

[解 2]　设集合$\{k+1, \ k+2, \ \cdots, \ k+n\}$满足题目要求,即

$$k+n \mid [k+1, \ k+2, \ \cdots, \ k+n-1].$$



对非负整数 $k$,由于

$$\begin{aligned}&([k+1, k+2, \cdots, k+n-1], k+n) \\ =& [(k+1, k+n), (k+2, k+n), \cdots, (k+n-1, k+n)] \\ =& [(n-1, k+n), (n-2, k+n), \cdots, (1, k+n)] \\ =& ([n-1, n-2, \cdots, 1], k+n).\end{aligned}$$

则 $k+n \mid [k+1, k+2, \cdots, k+n-1]$ 的充要条件是

$$k+n \mid [1,2,\cdots,n-1]. \qquad ①$$

(i) 当 $n=3$ 时,对任何 $k \geqslant 0$, $k+3 \nmid [1,2]=2$,所以 $n=3$ 不具有题目要求的性质.

(ii) 当 $n=4$ 时,由 $k+4 \mid [1,2,3]=6$ 可得 $k=2$,即 $n=4$ 时,只有一个集合即$\{3,4,5,6\}$满足题目要求.这时 $6 \mid [3,4,5]$.

(iii) 当 $n \geqslant 5$ 时,我们证明至少有两个集合具有题目要求的性质.

为此,只需证明对于 $n$,至少存在两个 $k$ 值使 ① 式成立.

由于$(n-1, \ n-2)=1$,而

$$n-1 \mid [1,2,\cdots,n-1], \quad n-2 \mid [1,2,\cdots,n-1],$$

所以
$$(n-1)(n-2) \mid [1,2,\cdots,n-1].$$

同样,由$(n-2, \ n-3)=1$,及

$$n-2 \mid [1,2,\cdots,n-1], \quad n-3 \mid [1,2,\cdots,n-1].$$

得
$$(n-2)(n-3) \mid [1,2,\cdots,n-1].$$

令 $k+n=(n-1)(n-2)$ 得

$$k_1=n^2-4n+2=n(n-4)+2>0,$$

令 $k+n=(n-2)(n-3)$ 得

$$k_2=n^2-6n+6=(n-3)^2-3>0.$$

所以当 $n \geqslant 5$ 时,至少存在两个不同的正整数 $k_1$ 和 $k_2$,使 ① 式成立.

即 $n \geqslant 5$ 时,至少有两个集合满足题目要求.

例如 $n=5$ 时,$k_1=7, k_2=1$,则集合$\{8,9,10,11,12\}$满足 $12 \mid [8,9,10,11]$ 及$\{2,3,4,5,6\}$满足 $6 \mid [2,3,4,5]$.

至此,(1),(2) 均得以解决.

5·30　一个十进制数的某一位数码称作是周期重复的，是指这个数码在小数点后的位置号从左到右依序构成等差数列．证明区间(0,1)内的任何一个十进制无理数，至少有一位数码不是周期重复的．

（第16届全俄数学奥林匹克，1990年）

［证］　结论等价于：若十进制数 $A \in (0,1)$，且它的每位数码都是周期重复的，则 $A$ 是有理数．

设 $A$ 中用到的不同数码为 $i_1, i_2, \cdots, i_k$．各个数码的重复周期依次是 $T_1, T_2, \cdots, T_k$，这些周期的最小公倍数为

$$T = [T_1, T_2, \cdots, T_k].$$

即每 $T$ 个数码为一组周期重复，因此 $A$ 是有理数．

5·31　证明对任何整数 $n > 1$，$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ 都不是整数．

（新加坡数学竞赛，1985年）

［证］　设 $1, 2, \cdots, n$ 的最小公倍数是 $a$，对 $n$ 存在正整数 $r$，使得

$$2^r \leqslant n < 2^{r+1}.$$

将 $a$ 分解为素因数的乘积，因为 $n \geqslant 2$，则 $\frac{a}{2}$ 为整数，由 $r$ 的规定

$$\frac{a}{2^{r+1}} \notin Z$$

由于
$$\frac{\frac{a}{2}}{2^r} \notin Z, \quad \frac{a}{2} \in Z, \qquad ①$$

又当 $1 \leqslant j \leqslant n$，$j \neq 2^r$ 时，

$$\frac{\frac{a}{2}}{j} \in Z. \qquad ②$$

若
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \in Z,$$

则
$$\frac{a}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \in Z. \qquad ③$$

另一方面，由于

$$a = 2^r \cdot 3^s \cdot 5^t \cdots$$

其中 $r, s, t, \cdots$ 为非负整数，则

$$\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{2^r}\notin Z,$$



于是由 ①,②

$$\frac{a}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\notin Z. \qquad ④$$

③ 与 ④ 矛盾.

因此 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ 对任何整数 $n(n>1)$ 都不是整数.

5·32　证明对任意自然数 $n\geqslant k$, $C_n^k, C_{n+1}^k, \cdots, C_{n+k}^k$ 的最大公约数等于 1.

（美国纽约数学奥林匹克,1974 年）

［证］　设 $d\in N$ 是 $C_n^k, C_{n+1}^k, \cdots, C_{n+k}^k$ 的公约数,则 $d$ 也是 $C_n^{k-1}=C_{n+1}^k-C_n^k, C_{n+1}^{k-1}=C_{n+2}^k-C_{n+1}^k, \cdots, C_{n+k-1}^{k-1}=C_{n+k}^k-C_{n+k-1}^k$ 的公约数.

同理,$d$ 也是

$$C_n^{k-2}, C_{n+1}^{k-2}, \cdots, C_{n+k-2}^{k-2}.$$
$$C_n^{k-3}, C_{n+1}^{k-3}, \cdots, C_{n+k-3}^{k-3}.$$
$$\cdots$$

的公约数.

如此继续,$d$ 是 $C_n^0$ 的约数,即 $d=1$.

因此 $C_n^k, C_{n+1}^k, \cdots, C_{n+k}^k$ 的最大公约数等于 1.

5·33　对给定的自然数 $m$ 与 $n$,　$m<n$,试确定:是否任意一个由 $n$ 个连续整数组成的集合都含有两个不同的数,它们的积能被 $mn$ 整除.

（美国纽约数学奥林匹克,1976 年）

［解］　结论是肯定的.

设已给定 $n$ 个连续整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$.

则由 $m<n\leqslant a_n-(a_1-1)$ 可知,在这 $n$ 个数中,必有 $n$ 的倍数 $a_i$ 和 $m$ 的倍数 $a_j$.

如果 $i\neq j$,则乘积 $a_ia_j$ 被 $mn$ 整除.

如果 $i=j$. 记 $d=(m,n)$,　$q=[m,n]$,则

$$mn=dq,\quad d\mid a_i,\quad q\mid a_i.$$

我们证明,$d$ 的倍数 $a_i+d$ 或 $a_i-d$ 至少有一个属于集合

$$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}.$$

否则,则有 $a_i+d>a_n,\quad a_i-d<a_n$,由此得

$$i+d\geqslant n+1,\quad i-d<1.$$

从而 $$2d>n.$$

但是 $d\mid n$,因此 $d=n>m$ 与 $d\mid m$ 矛盾.

于是 $a_i$ 与 $a_i+d$(或相应地 $a_i-d$)即为所求.这是因为 $a_i(a_i\pm d)$ 能被 $dq=mn$ 整除.

**5·34** 设 $a$ 和 $b$ 是两个给定的正整数,使得 $\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a}$ 是一个整数,求证:$a$ 和 $b$ 的最大公约数不超过 $\sqrt{a+b}$.

(第 20 届全俄数学奥林匹克,1994 年)

**[解]** 由于 $$\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a}=\frac{a^2+b^2+a+b}{ab} \quad ①$$

设 $(a,b)=d$,则 $d^2\mid ab$.显然有 $d^2\mid a^2+b^2$.

由①式.$d^2\mid a+b$,

于是 $\quad a+b\geqslant d^2,\sqrt{a+b}\geqslant d$,

即 $\quad (a,b)\leqslant\sqrt{a+b}$.

**5·35** 有多少对正整数 $x,y$ 满足条件 $(x,y)=5!$ 且 $[x,y]=50!$

(加拿大数学奥林匹克,1997 年)

**[解]** 设 7 到 47 之间的素数

7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47 依次用 $p_1,p_2,\cdots,p_{12}$ 表示,则

$5!\ =2^3\cdot3^1\cdot5^1\cdot p_1^0\cdot p_2^0\cdots p_{12}^0$,

$50!\ =2^{\alpha_1}\cdot3^{\alpha_2}\cdot5^{\alpha_3}\cdot p_1^{b_1}\cdot p_2^{b_2}\cdot\cdots p_{12}^{b_{12}}$.

由于 $x\mid50!,y\mid50!$.

所以 $x,y$ 具有下面的形式:

$$x=2^{n_1}\cdot3^{n_2}\cdot5^{n_3}\cdot p_1^{n_4}\cdots p_{12}^{n_{15}},$$

$$y=2^{m_1}\cdot3^{m_2}\cdot5^{m_3}\cdot p_1^{m_4}\cdots p_{12}^{m_5}.$$

其中 $\max\{n_i,m_i\}$ 是 50! 的第 $i$ 个素数的指数,$\min\{n_i,m_i\}$ 是 5! 的第 $i$ 个素数的指数.

在不考虑 $x<y$ 的情况下，$n_i(i=1,2,\cdots,15)$的选取方式有两种，所以 $x$ 的个数为 $2^{15}$个.



当 $x$ 选定之后，$y$ 是惟一确定的.

又当 $x$ 取定之后，得到 $y$，有 $x<y$ 或 $x>y$ 两种可能.

故满足题设条件的正整数对有$\frac{2^{15}}{2}=2^{14}$个.

5·36　正整数 $n>1$，$A_n=\{x\in N|(x,n)\neq 1\}$. 如果对于 $x,y\in A_n$，有 $x+y\in A_n$，称 $n$ 为有趣的. 求所有有趣的大于 1 的正整数 $n$.

(保加利亚数学奥林匹克，1994 年)

［解］　设 $p$ 是一个素数，我们首先证明，对于所有 $n=p^s(s\in N)$ 是有趣的正整数.

若 $n=p^s$，如果有 $x\in N$，$(x,n)\neq 1$，那么 $p$ 一定是 $x$ 的因子，因而对于任何 $x,y\in A_{p^s}$，$x,y$ 都是 $p$ 的倍数，于是 $x+y$ 也是 $p$ 的倍数，从而$(x+y,p^s)\neq 1$，即 $x+y\in A_{p^s}$. 所以 $n=p^s$ 是有趣的大于 1 的正整数.

如果正整数 $n$ 至少有两个不同的素因子，记 $n=p^sq$，这里 $p$ 是一个素数，$s$ 是一个正整数，$q$ 是一个与 $p$ 互素的正整数，且 $q>1$.

由于$(p,p^sq)=p$，$(q,p^sq)=q$，那么有 $p\in A_{p^sq}$，$q\in A_{p^sq}$，如果$(p+q,p^sq)=r$，$r>1$，$r\in N$，由于 $p+q$ 是 $r$ 的倍数，$p$ 和 $q$ 互素，则大于 1 的正整数 $r$ 既与 $p$ 互素，又与 $q$ 互素，这与 $p^sq$ 是 $r$ 的倍数矛盾. 因此有$(p+q,p^sq)=1$，这样，$p+q$ 就不在$A_{p^sq}$内，则 $n=p^sq$ 不是有趣的正整数.

所以，所求的全部大于 1 的有趣的正整数为 $n=p^s$，这里 $p$ 是任意一个素数，$s$ 是任意一个正整数.

5·37　求证对于正整数 $k,m$ 和 $n$，有

$[k,m]\cdot[m,n]\cdot[n,k]\geqslant[k,m,n]^2$.

这里$[a,b,\cdots,z]$表示正整数 $a,b,\cdots,z$ 的最小公倍数.

(第 20 届全俄数学奥林匹克，1994 年)

［证］　设 $k,m,n$ 的素因子标准分解式为

$$k=\prod_{i=1}^{t}p_i^{\alpha_i},\ m=\prod_{i=1}^{t}p_i^{\beta_i},\ n=\prod_{i=1}^{t}p_i^{\gamma_i}.$$

这里 $p_i(i=1,2,\cdots,t)$为素数,$\alpha_i,\beta_i,\gamma_i(i=1,2,\cdots,t)$为非负整数. 则

$$[k,m]=\prod_{i=1}^{t}p_i^{\max(\alpha_i,\beta_i)},[m,n]=\prod_{i=1}^{t}p_i^{\max(\beta_i,\gamma_i)},$$

$$[n,k]=\prod_{i=1}^{t}p_i^{\max(\gamma_i,\alpha_i)},[k,m,n]=\prod_{i=1}^{t}p_i^{\max(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i)},$$

$$[k,m,n]^2=\prod_{i=1}^{t}p_i^{2\max(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i)}.$$

将 $\alpha_i,\beta_i,\gamma_i(1\leqslant i\leqslant t)$中最小的一个记为 $\alpha_i^※$,最大的一个记为 $\gamma_i^※$,中间一个记为 $\beta_i^※$,即有 $\alpha_i^※\leqslant\beta_i^※\leqslant\gamma_i^※$.

于是有

$$\begin{aligned}&\max(\alpha_i,\beta_i)+\max(\beta_i,\gamma_i)+\max(\gamma_i,\alpha_i)\\&=\beta_i^※+\gamma_i^※+\gamma_i^※=\beta_i^※+2\gamma_i^※\\&\geqslant 2\gamma_i^※=2\max(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i).\end{aligned}$$

这样就有

$$\begin{aligned}&[k,m]\cdot[m,n]\cdot[n,k]\\&=\prod_{i=1}^{t}p_i^{\max(\alpha_i,\beta_i)+\max(\beta_i,\gamma_i)+\max(\gamma_i,\alpha_i)}\\&\geqslant\prod_{i=1}^{t}p_i^{2\max(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i)}\\&=[k,m,n]^2.\end{aligned}$$

**5·38** 用$(m,n)$表示正整数 $m$ 和$n$ 的最大公约数,若在各项都是正整数的数列$\{a_i\}$中,对于任何 $i\neq j$,都有$(a_i,a_j)=(i,j)$. 证明对一切 $i\in N$,都有 $a_i=i$.

(第 21 届全俄数学奥林匹克,1995 年)

**[证]** 由题设,对每一个 $a_i$,都有$(a_i,a_{2i})=(i,2i)=i$. 即 $i\mid a_i$. 下面证明 $a_i=i$.

若 $a_i>i$,一方面有$(a_{a_i},a_i)=(a_i,i)=i$, ①

另一方面$(a_{a_i},a_i)=a_i>i$. ②

①与②矛盾. 于是只能有 $a_i=i$.

**5·39** 已知 $n$ 个正整数 $a_i(1\leqslant i\leqslant n)$,满足 $a_1<a_2<\cdots<a_n\leqslant 2n$,其中任意两个 $a_i,a_j(i\neq j)$的最小公倍数都大于 $2n$,求证 $a_1>$

$\left[\frac{2n}{3}\right]$.（$\left[\frac{2n}{3}\right]$表示$\frac{2n}{3}$的整数部分）

（中国上海市数学竞赛，1994 年）

[证] 将每个 $a_i$ 写成 $2^{\alpha_i}(2t_i-1)$的形式，其中 $\alpha_i$ 为非负整数，$t_i$ 为正整数.

因为 $[a_i,a_j]>2n$（对任意的 $i\neq j$）

所以 $2t_i-1\neq 2t_j-1$.

由此推知 $2t_1-1,2t_2-1,\cdots,2t_n-1$，是 $1,3,\cdots,2n-1$ 的一个排列.

若 $a_1\leqslant\left[\frac{2}{3}n\right]\leqslant\frac{2}{3}n$，则 $3a_1\leqslant 2n$

且 $3a_1=2^{\alpha_1}(6t_1-3)$，

则 $6t_1-3$ 也是不超过 $2n-1$ 的正奇数.

因为 $6t_1-3\neq 2t_1-1$，

所以存在大于 1 的整数 $j$，使得 $6t_1-3=2t_j-1$.

于是有 $a_j=2^{\alpha_j}(2t_j-1)=2^{\alpha_j}(6t_1-3)$，

则 $[a_1,a_j]=\begin{cases}2^{\alpha_1}(2t_j-1)=3a_1\leqslant 2n,若\ \alpha_1\geqslant\alpha_j,\\ \alpha^j(2t_j-1)=\alpha_j\leqslant 2n,若\ \alpha_1<\alpha_j.\end{cases}$

与题设 $[a_1,a_j]>2n$ 矛盾，

因此 $a_1>\left[\frac{2n}{3}\right]$.

5·40 在正方体的每个顶点上各记上一个互不相同的自然数，在它的每条棱上记上它的两端上的两个自然数的最大公约数. 那么，是否有可能使各顶点上的各数之和等于棱上各数之和？证明你的结论.

（第 22 届全俄数学奥林匹克，1996 年）

[解] 不可能. 理由如下：

设 $a,b$ 为两个自然数，且 $a>b$，记它们的最大公约数为$(a,b)$，则有

$(a,b)\leqslant b$ 且$(a,b)\leqslant\frac{a}{2}$.

这是因为，若 $q=(a,b)$，$a=a_1q$，$b=b_1q$，显然 $a_1\neq 1$，否则 $a=q<b_1q=b$ 与$a>b$ 矛盾.

所以，$a=a_1q\geqslant 2q$，即 $q\leqslant\frac{a}{2}$.

因此，当 $a\neq b$ 时，由

$$a+b=(a_1+b_1)q\geqslant 3q$$

得
$$q\leqslant\frac{a+b}{3},$$

即
$$(a,b)\leqslant\frac{a+b}{3}.$$

由正方体的 12 条棱组成的 12 个上述不等式：

记正方体的一个面上四个自然数依逆时针顺序为 $a_1,a_2,a_3,a_4$，与它相对面的相应顶点的自然数为 $b_1,b_2,b_3,b_4$，则

$$(a_1,a_2)\leqslant\frac{a_1+a_2}{3},(b_1,b_2)\leqslant\frac{b_1+b_2}{3},$$

$$(a_2,a_3)\leqslant\frac{a_2+a_3}{3},(b_2,b_3)\leqslant\frac{b_2+b_3}{3},$$

$$(a_3,a_4)\leqslant\frac{a_3+a_4}{3},(b_3,b_4)\leqslant\frac{b_3+b_4}{3},$$

$$(a_4,a_1)\leqslant\frac{a_4+a_1}{3},(b_4,b_1)\leqslant\frac{b_4+b_1}{3},$$

$$(a_1,b_1)\leqslant\frac{a_1+b_1}{3},(a_2,b_2)\leqslant\frac{a_2+b_2}{3},$$

$$(a_3,b_3)\leqslant\frac{a_3+b_3}{3},(a_4,b_4)\leqslant\frac{a_4+b_4}{3}.$$

将以上 12 个不等式相加可得

$$\sum(m,n)\leqslant a_1+\cdots+a_4+b_1+\cdots+b_4.$$

其中 $\sum(m,n)$ 是棱上各标数之和.

若题目的要求成立，必须使上述不等式的等号成立，而等号成立的充要条件是

$$(a,b)=\frac{a+b}{3},\text{这时},a=2b.$$

考察从记有数 $a$ 的顶点出发的另外两棱的另一个端点的数 $c$ 和 $d$，其中每一个数或者是 $2a$ 或者 $\frac{a}{2}$，如果其中至少有一个是 $\frac{a}{2}$，则它应与 $b$ 相等，(如 $a_1=a,a_2=\frac{a}{2}=b$，则 $b_2,a_3$ 都必须是 $\frac{a}{4}$，而不能是 $a$，否则与 $a_1=a$ 相等，从而 $b_1=\frac{a}{8}$ 或 $\frac{a}{2}$，这不可能). 如果两个都比 $a$ 大，则它们应该都是 $2a$，也产生矛盾，于是结论得证.

# 第六章　欧拉-费马定理、孙子定理和互素数

6·1　证明对任意自然数 $n$,分数 $\frac{21n+4}{14n+3}$ 不可约.

（第 1 届国际数学奥林匹克,1959 年）

[证 1]　假设 $\frac{21n+4}{14n+3}$ 可约,则由

$$\frac{21n+4}{14n+3}=1+\frac{7n+1}{14n+3}$$

可知,若 $\frac{21n+4}{14n+3}$ 可约,则 $\frac{14n+3}{7n+1}$ 可约,即

$$\frac{14n+3}{7n+1}=2+\frac{1}{7n+1}.$$

于是 $\frac{1}{7n+1}$ 可约.

然而 $\frac{1}{7n+1}$ 对所有自然数 $n$ 都不可约.

因此,$\frac{21n+4}{14n+3}$ 对任意自然数 $n$,都不可约.

[证 2]　假设 $\frac{21n+4}{14n+3}$ 可约,且设 $21n+4$ 与 $14n+3$ 有大于 1 的公约数 $d$.

由于　　$21n+4=(14n+3)+(7n+1)$,

则由 $21n+4$ 与 $14n+3$ 能被 $d$ 整除,可得 $7n+1$ 也能被 $d$ 整除.

又因为　　$14n+3=2(7n+1)+1$,

则由 $14n+3$ 和 $7n+1$ 能被 $d$ 整除,可得 1 也能被 $d$ 整除,这与 $d>1$

矛盾.

因此,对任意自然数 $n$,$\frac{21n+4}{14n+3}$ 不可约.

[证 3] 设 $21n+4$ 与 $14n+3$ 的最大公约数为 $d$,

则有
$$\begin{cases}21n+4=kd, & ①\\ 14n+3=td. & ②\end{cases}$$
其中 $k,t$ 为自然数,且 $(k,t)=1$.

从 ①,② 中消去 $n$,得
$$d(3t-2k)=1. \quad ③$$
因为 $d\geqslant 1$ 及 $3t-2k$ 为整数,则由 ③ 式得 $d=1$.

于是 $21n+4$ 与 $14n+3$ 互素.

因此,$\frac{21n+4}{14n+3}$ 对任意自然数 $n$ 都不可约.

6·2 证明对任意整数 $n$,分数$\frac{2n+1}{2n(n+1)}$ 不可约.

(基辅数学奥林匹克,1939 年)

[证] 假设分数$\frac{2n+1}{2n(n+1)}$ 可约.

设分子 $2n+1$ 与分母 $2n(n+1)$ 能被素数 $p(p>2)$ 整除.

因为
$$(2n+1,2n+2)=1,$$
所以 $n$ 和 $2n+1$ 能被 $p$ 整除.

设 $n=kp$, $2n+1=sp$,其中 $k$ 与 $s$ 均为整数,则有
$$(s-2k)p=1.$$
显然,这是不可能的.

因此,分数$\frac{2n+1}{2n(n+1)}$ 不可约.

6·3 证明若 $a,b,c,d$ 均为整数,且 $ad-bc=1$,则分数$\frac{a^2+b^2}{ac+bd}$ 不可约.

(基辅数学奥林匹克,1936 年)

[证] 注意到恒等式
$$(ac+bd)^2+(ad-bc)^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2).$$
$$(ad-bc)^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ac+bd)^2. \quad ①$$
若分数$\frac{a^2+b^2}{ac+bd}$ 可约,则存在自然数 $m(m\neq 1)$ 使得

$$m \mid a^2+b^2,\ m \mid ac+bd.$$

于是由①式，$m \mid (ad-bc)^2=1$.

然而，这是不可能的.

因此，分数$\dfrac{a^2+b^2}{ac+bd}$不可约.

6·4　证明　$1979^2+2^{1979}$与1979互素.

（基辅数学奥林匹克，1979年）

[证]　令　　$N=1979^2+2^{1979}$.

假设$N$与1979不互素，即$N$与1979有一个大于1的公约数$p$，则有

$$N=pn,\quad n\in N. \qquad ①$$

$$1979=pm,\quad m\in N. \qquad ②$$

由②可知，$p$是奇数，又

$$2^{1979}=N-1979^2=pn-p^2m^2=p(n-pm^2), \qquad ③$$

由③可知，$p$是偶数.

于是导出矛盾.

因此，$1979^2+2^{1979}$与1979没有大于1的公约数，即它们互素.

6·5　$(x,y)$表示正整数$x$和$y$的最大公约数. 设$a$和$b$是两个正整数，$(a,b)=1$，$p\geqslant 3$为一素数，$\alpha=\left(a+b,\ \dfrac{a^p+b^p}{a+b}\right)$，试证

(1)$(\alpha,a)=1$;

(2)$\alpha=1$或$\alpha=p$.

（新加坡数学竞赛，1985年）

[证]　由$\alpha=\left(a+b,\ \dfrac{a^p+b^p}{a+b}\right)$知

$$\begin{cases} a+b=\alpha t, & ①\\ \dfrac{a^p+b^p}{a+b}=\alpha s. & ② \end{cases}$$

其中$s,t$为正整数.

由①，②得　　$a^p+b^p=\alpha^2 st$.

$$\begin{aligned}\alpha^2 st &= a^p+b^p\\ &= a^p+(\alpha t-a)^p\\ &= \alpha^p t^p - pa\alpha^{p-1}t^{p-1}+\cdots+pa^{p-1}\alpha t.\end{aligned}$$

$$\alpha s = \alpha^{p-1}t^{p-1} - pa\alpha^{p-2}t^{p-2} + \cdots + pa^{p-1}.$$

从而有 $\alpha \mid pa^{p-1}$.

现在证$(\alpha,a) = 1$.

若$(\alpha,a) = k > 1$.

令 $q$ 是$k$ 的一个素因子.

则 $q \mid k,\ q \mid \alpha,\ q \mid a.$

又因为 $\alpha \mid a + b,$

所以 $q \mid a + b,$

进而有 $q \mid b.$

与$(a,b) = 1$矛盾.

所以 $(a,\alpha) = 1.$

因为 $\alpha \mid pa^{p-1}$,且$(\alpha,a) = 1$,

则 $\alpha \mid p.$

又由于 $p$ 是$\geqslant 3$的素数,所以

$$\alpha = 1 \text{ 或 } \alpha = p.$$

6·6 证明当 $m$ 为任意自然数时,$1978^m - 1$不能被$1000^m - 1$整除.

(第 12 届全苏数学奥林匹克,1978 年)

[证] 设$1000^m - 1 = d$.

若 $1000^m - 1 \mid 1978^m - 1,$

则 $1978^m - 1 = kd,\quad k \in N,$

即 $1978^m - 1 - d = (k-1)d.$

$$1978^m - 1000^m = (k-1)d.$$

$$2^m(989^m - 500^m) = (k-1)d.$$

因为 $(2^m,d) = 1,$

则有 $d \mid 989^m - 500^m.$

然而 $989^m - 500^m \neq 0$ 且$989^m - 500^m < d$.

这是不可能的.

因此 $d \nmid 989^m - 500^m.$

于是 $1978^m - 1$不能被$1000^m - 1$整除.

6·7 假设 $m$ 和$n$ 是两个不同的正整数.证明$2^{2^m}+1$和$2^{2^n}+1$不可能有大于 1 的公因子.

（匈牙利数学奥林匹克，1940 年）

**[证 1]** 设 $a_k=2^{2^k}$.

首先证明：在数列

$$a_1-1,a_2-1,a_3-1,\cdots,a_n-1,a_{n+1}-1,\cdots$$

中，从第二项起，每一项都能被前一项整除.

这是因为

$$\begin{aligned}a_{n+1}-1&=2^{2^{n+1}}-1\\&=(2^{2^n})^2-1\\&=a_n^2-1\\&=(a_n-1)(a_n+1).\end{aligned}$$

于是 $$a_n-1\mid a_{n+1}-1.$$

由此可推得，当 $p<q+1$ 时，$a_{q+1}-1$ 能被 $a_p-1$ 整除，并且由于 $a_p+1$ 是 $a_{p+1}-1$ 的约数，于是也是 $a_{q+1}-1$ 的约数.

于是，当 $m<n$ 时，

$$\begin{aligned}a_n+1-2&=a_n-1\\&=t(a_m+1).\end{aligned}$$

即 $$a_n+1=t(a_m+1)+2,$$

其中 $t$ 是整数.

由此式可推得 $a_m+1$ 与 $a_n+1$ 的公约数一定是 2 的约数.

然而，$a_m+1$ 与 $a_n+1$ 都是奇数，所以 $a_m+1$ 与 $a_n+1$ 的最大公约数只能是 1，即

$$2^{2^m}+1 \text{ 和 } 2^{2^n}+1$$

的最大公约数是 1.

**[证 2]** 我们计算

$$\begin{aligned}&(1+2)(1+2^2)(1+2^4)(1+2^8)\cdots(1+2^{2^{n-1}})\\=&(2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)\cdots(2^{2^{n-1}}+1)\\=&(2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)\cdots(2^{2^{n-1}}+1)\\=&(2^4-1)(2^4+1)\cdots(2^{2^{n-1}}+1)\\=&\cdots\cdots\end{aligned}$$

$$= 2^{2^n} - 1.$$

于是有

$$2^{2^n} + 1 = (2+1)(2^2+1)(2^4+1)\cdots(2^{2^{n-1}}+1) + 2.$$

显然,当 $m < n$ 时,$2^{2^m}+1$ 与 $2^{2^n}+1$ 的最大公约数是 2 的约数,又 $2^{2^m}+1$ 与 $2^{2^n}+1$ 都是奇数,于是 $2^{2^m}+1$ 与 $2^{2^n}+1$ 的最大公约数是 1.

6·8　设 $d,a,n$ 为自然数,且 $3 \leqslant d \leqslant 2^{n+1}$,求证 $d \nmid a^{2^n}+1$.

(中国国家集训队测验题,1991 年)

[证]　假设 $d \mid a^{2^n}+1$,则

$$d \mid (a^{2^n}+1)(a^{2^n}-1),$$

即

$$d \mid a^{2^{n+1}} - 1. \quad ①$$

显然有

$$(a,d) = 1. \quad ②$$

考虑以 $d$ 为模的数列 $\{a^k \pmod d\}$,显然由 ①,② 可得

$$d \mid a^{2^{n+1}+k} - a^k,$$

即

$$a^{2^{n+1}+k} \equiv a^k \pmod d,$$

于是 $2^{n+1}$ 是模周期数列 $\{a^k \pmod d\}$ 的一个周期.

设 $T_a(d)$ 是 $\{a^k \pmod d\}$ 的最小正周期,则

$$T_a(d) \mid 2^{n+1}.$$

由欧拉定理:若 $(a,m) = 1$,则

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m,$$

其中 $\varphi(m)$ 是欧拉函数,可知

$$T_a(d) \mid \varphi(d).$$

从而

$$T_a(d) \mid (2^{n+1}, \varphi(d)).$$

注意到 $\varphi(d) \leqslant d-1$,而 $d \leqslant 2^{n+1}$,所以

$$\varphi(d) < 2^{n+1},$$

因此

$$(2^{n+1}, \varphi(d)) \leqslant 2^n.$$

又

$$(2^{n+1}, \varphi(d)) \mid 2^n,$$

于是

$$T_a(d) \mid 2^n.$$

所以，$\{a^k \pmod d\}$ 以 $2^n$ 为一个周期，即有 $a^{2^n} \equiv 1 \pmod d$.

于是

$$a^{2^n} + 1 \equiv 1 + 1 \equiv 2 \pmod d.$$

又由假设 $d \mid a^{2^n} + 1$，从而有

$$2 \equiv 0 \pmod d.$$

这与题设 $d \geqslant 3$ 矛盾.

这一矛盾说明 $d \nmid a^{2^n} + 1$.

6·9 设 $T_1 = 2$, $T_{n+1} = T_n^2 - T_n + 1 (n > 0)$. 求证当 $m \neq n$ 时，$T_m$ 与 $T_n$ 互素.

(第 16 届美国普特南数学竞赛，1956 年)

[证] 首先我们用数学归纳法证明：对任意固定的正整数 $n$ 及对任意的正整数 $k$，恒有某个整数 $C_k$（与 $n, k$ 有关），使

$$T_{n+k} = C_k T_n + 1 \quad ①$$

当 $k = 1$ 时，取 $C_1 = T_n - 1$，则

$$T_{n+1} = T_n^2 - T_n + 1 = C_1 T_n + 1,$$

即 ① 式成立.

假设当 $k = h (h \geqslant 1)$ 时，有整数 $C_h$，使

$$T_{n+h} = C_h T_n + 1.$$

那么当 $k = h + 1$ 时，

$$\begin{aligned} T_{n+h+1} &= T_{n+h}^2 - T_{n+h} + 1 \\ &= T_{n+h}(T_{n+h} - 1) + 1 \\ &= T_{n+h} C_h T_n + 1. \end{aligned}$$

只要取 $C_{h+1} = T_{n+h} C_h$，则 ① 式对 $k = h + 1$ 成立.

下面证明本题：

当 $m \neq n$ 时，不妨设 $m > n$，在 ① 中取 $k = m - n$，则

$$T_m = C_{m-n} T_n + 1$$

这时 $T_m$ 与 $T_n$ 的任何公约数也是 1 的约数，即 $T_m$ 与 $T_n$ 只有公约数 $+1, -1$，从而 $T_m$ 与 $T_n$ 互素.

6·10 已知 $p$ 是奇数，且方程 $x^2 + px - 1 = 0$ 的两个根为 $x_1, x_2$. 证明对任何整数 $n \geqslant 0$，数 $x_1^n + x_2^n$ 和 $x_1^{n+1} + x_2^{n+1}$ 是互素的整数.

(波兰数学竞赛，1964 年)

[证]　用数学归纳法.

(1) $n=0$ 时,

$$x_1^0+x_2^0=2,$$

$$x_1+x_2=-p.$$

因为 $p$ 是奇数,则 $(2,p)=1$,于是 $x_1^0+x_2^0$ 与 $x_1+x_2$ 互素.

假设整数 $x_1^n+x_2^n$ 与 $x_1^{n+1}+x_2^{n+1}$ 互素.我们证明 $x_1^{n+1}+x_2^{n+1}$ 与 $x_1^{n+2}+x_2^{n+2}$ 互素.

事实上,

$$\begin{aligned}&(x_1^{n+1}+x_2^{n+1})(x_1+x_2)\\=&(x_1^{n+2}+x_2^{n+2})+x_1x_2(x_1^n+x_2^n)\end{aligned}$$

将 $x_1+x_2=-p$, $x_1x_2=-1$ 代入得

$$x_1^{n+2}+x_2^{n+2}=-p(x_1^{n+1}+x_2^{n+1})+(x_1^n+x_2^n).$$

由于 $x_1^{n+1}+x_2^{n+1}$ 与 $x_1^n+x_2^n$ 是整数,所以 $x_1^{n+2}+x_2^{n+2}$ 也是整数.

并且 $x_1^{n+2}+x_2^{n+2}$ 与 $x_1^{n+1}+x_2^{n+1}$ 的公约数也是 $x_1^n+x_2^n$ 的约数,因而也是 $x_1^{n+1}+x_2^{n+1}$ 与 $x_1^n+x_2^n$ 的公约数.由归纳假设,$x_1^{n+1}+x_2^{n+1}$ 与 $x_1^n+x_2^n$ 互素,所以 $x_1^{n+2}+x_2^{n+2}$ 与 $x_1^{n+1}+x_2^{n+1}$ 也互素.

于是对所有非负整数 $n$,命题成立.

6·11　证明对于数字全部是由 1 组成的两个自然数,当且仅当它们的位数互素时,这两个自然数互素.

(波兰数学竞赛,1962 年)

[证]　我们用 $J_m$ 表示数字全部是由 1 组成的 $m$ 位数:

$$J_m=10^{m-1}+10^{m-2}+\cdots+10+1=\frac{1}{9}(10^m-1).$$

可以证明如下两个引理:

引理 1　对 $m,d\in N$,若 $d\mid m$,则 $J_d\mid J_m$.

事实上,由 $d\mid m$ 可设

$$m=kd(k\in N).$$

$$\begin{aligned}J_m&=J_{kd}\\&=\frac{1}{9}(10^{kd}-1)\\&=\frac{1}{9}(10^d-1)(10^{kd-d}+10^{kd-2d}+\cdots+10^d+1)\end{aligned}$$

$$= J_d(10^{kd-d} + 10^{kd-2d} + \cdots + 10^d + 1)$$

由于 $10^{kd-d} + 10^{kd-2d} + \cdots + 10^d + 1$ 是整数,所以

$$J_d \mid J_m.$$

引理 2　如果 $m, n \in N$,且 $m > n$,则

$$J_{m-n} \mid J_m - J_n.$$

事实上,

$$\begin{aligned} J_m - J_n &= \frac{1}{9}(10^m - 1) - \frac{1}{9}(10^n - 1) \\ &= \frac{1}{9}(10^m - 10^n) \\ &= \frac{1}{9}(10^{m-n} - 1) \cdot 10^n \\ &= J_{m-n} \cdot 10^n. \end{aligned}$$

因此 $$J_{m-n} \mid J_m - J_n.$$

现设 $J_m, J_n$ 是两个已知数,且 $m > n$.

(1) 我们证明:若 $J_m$ 和 $J_n$ 互素,则 $m$ 和 $n$ 也互素.

事实上,若 $m$ 和 $n$ 不互素,则 $(m, n) = d > 1$. 于是由引理 1 必有

$$J_d \mid J_m,\ J_d \mid J_n.$$

因而 $J_m$ 与 $J_n$ 有大于 1 的公约数,与 $J_m$ 和 $J_n$ 互素矛盾.

(2) 我们再证明,若 $m$ 和 $n$ 互素,则 $J_m$ 和 $J_n$ 也互素.

对 $m$ 和 $n$ 应用辗转相除法:

$$\begin{aligned} m &= nq + r,\ 0 < r < n, \\ n &= rq_1 + r_1,\ 0 < r_1 < r, \\ r &= r_1q_2 + r_2,\ 0 < r_2 < r_1, \\ &\cdots\cdots \\ r_{k-2} &= r_{k-1}q_k + r_k,\ 0 < r_k < r_{k-1}; \\ r_{k-1} &= r_kq_{k+1}. \end{aligned}$$

由以上一系列等式可知,$r_k$ 是 $r_{k-1}, r_{k-2}, \cdots, r, n$ 和 $m$ 的公约数. 因为 $m$ 和 $n$ 互素,所以有

$$r_k = 1.$$

由引理 2 有 $$J_r \mid J_m - J_{nq}.$$

由引理 1 有 $$J_n \mid J_{nq}.$$

因此，若 $D$ 是 $J_m$ 和 $J_n$ 的公约数，则 $D$ 也是 $J_m - J_{nq}$ 的约数.

由于
$$J_m - J_{nq} = J_r \cdot 10^{nq},$$
并且 $D$ 显然没有约数 2 和 5，因此 $D$ 与 $10^{nq}$ 互素，因此 $D$ 能整除 $J_r$.

类似地可以证明 $D$ 能整除 $J_{r_1}, J_{r_2}, \cdots, J_{r_k}$.

由于 $r_k = 1$，则
$$J_{r_k} = J_1 = 1.$$
因此
$$D = 1.$$
于是 $J_m$ 与 $J_n$ 互素.

6·12　证明在任意十个连续的整数中，至少有一个数与其他九个数都互素.

（第 27 届美国普特南数学竞赛，1966 年）

［证］　在连续十个整数中，

恰有 5 个数能被 2 整除；

至多有 4 个数能被 3 整除，但其中至多只有 2 个不是偶数；

至多有 2 个数能被 7 整除，但其中至多只有一个不是偶数；

恰有 2 个数能被 5 整除，但仅有一个不是偶数.

所以，在连续十个整数中，不能被 2,3,5,7 中任一个整除的数，至少有 $10-(5+2+1+1)=1$ 个，设这个数 $a$.

我们证明 $a$ 与其余九个都互素.

设 $b$ 为其余 9 个数中的任一个.

若 $p$ 是 $a$ 和 $b$ 的公共素约数.

由于 $|a-b| \leqslant 9$，则 $p$ 必为 2,3,5,7 中的一个，而 $a$ 又不能被 2,3,5,7 整除，则 $p$ 不等于 2,3,5,7 中的任一个，于是 $a$ 和 $b$ 不可能有公共素约数，所以 $a$ 和 $b$ 互素.

因此，$a$ 与其余 9 个数都互素.

6·13　设 $f(x) = x^2 - x + 1$. 证明对于任意自然数 $m > 1$，数 $m$，$f(m)$，$f(f(m))$，$\cdots$ 两两互素.

（第 12 届全苏数学奥林匹克，1978 年）

［证］　由于　$f(0) = f(1) = 1$，

则多项式 $p_n(x)=\underbrace{f(f(\cdots(f}_{n个f}(x))\cdots))$ 的常数项等于1.

数论卷

于是 $P_n(m)$ 为 $Am+1$ 的形式,从而 $P_n(m)$ 除以 $m$ 的余数为1,即 $m$ 与 $P_n(m)$ 互素.

我们用 $m'=P_k(m)$ 代替 $m$,又可得到 $P_{n+k}(m)$ 与 $m'$ 互素.

因此,数 $m,f(m),f(f(m)),\cdots$ 两两互素.

6·14 假设项链 $A$ 有14个珠,$B$ 有19个珠.证明对于每一个奇数 $n\geqslant 1$,能够找到一种方法,使之能用数组

$$\{n,n+1,n+2,\cdots,n+32\}$$

中的数给每个珠标上一个数,使得每个数恰好用上一次,且相邻的珠子标的数互素.

(这里一个项链可以看成是一些珠围成的一个圆,其中每个珠与另外两个珠相邻)

(第19届美国数学奥林匹克,1990年)

[证] 取一整数 $m$, $1\leqslant m\leqslant 18$.

用连续的自然数 $n+m,n+m+1,\cdots,n+m+13$ 这14个数给项链 $A$ 的珠子标数,只要保证 $n+m$ 和 $n+m+13$ 互素,即

$$(n+m,n+m+13)=1, \qquad ①$$

我们的标法就符合要求.这是因为一对相邻的整数总是互素的,又有 $n+m$ 和 $n+m+13$ 互素,则项链 $A$ 上相邻珠子标的数都互素.

然后用 $n+m+14$ 到 $n+32(m+14\leqslant 32)$ 及 $n$ 到 $n+m-1$ 为项链 $B$ 的珠子标号,其条件是

$$(n,n+32)=1, \qquad ②$$

和

$$(n+m-1,n+m+14)=1. \qquad ③$$

由于 $(a,b)=(a,b-a)$,则①、②、③化为

$$(n,32)=(n+m-1,15)=(n+m,13)=1.$$

由于 $n$ 是奇数,则 $(n,32)=1$ 自然成立.

关于 $(n+m-1,15)=1$,我们考虑以15为模的剩余类.

注意到 $n+m-1\not\equiv 0 \pmod{15}$,

等价于

$$m\not\equiv 1-n \pmod 3,$$
$$m\not\equiv 1-n \pmod 5.$$

又由 $(n+m,13)=1$ 可知

$$m \not\equiv -n \pmod{13}.$$

因为在 $m$ 的18个可能的数$\{1,2,\cdots,18\}$中，只有6个满足 $m\equiv 1-n \pmod 3$，至多有4个满足 $m\equiv 1-n \pmod 5$，至多有2个满足 $m\equiv -n \pmod{13}$.

因此，至少剩下 $18-(6+4+2)=6$ 个 $m$ 的值满足要求.

6·15　设 $k$ 为正整数，一元二次方程

$$(k-1)x^2-px+k=0$$

有两个正整数根，求 $k^{kp}(p^p+k^k)$ 之值.

（中国北京市初中二年级数学竞赛，1984年）

［解］　因为 $k$ 为正整数，且方程

$$(k-1)x^2-px+k=0 \qquad ①$$

是一元二次方程，则 $k\geqslant 2$.

设方程①的两个正整数根为 $x_1$ 和 $x_2$，由韦达定理有

$$x_1x_2=\frac{k}{k-1}.$$

若 $k-1\neq 1$，则 $(k-1,k)=1$，此时$\frac{k}{k-1}$不能为整数.

所以必有 $k-1=1,k=2$.

这时，$$x_1x_2=2=1\cdot 2.$$

又由 $x_1$ 和 $x_2$ 为正整数可知，$x_1$ 和 $x_2$ 只能一个为1，一个为2.

再由韦达定理　$$x_1+x_2=3=\frac{p}{k-1}=p,$$

所以　$$k^{kp}(p^p+k^k)=2^{2\cdot 3}(3^3+2^2)=1984.$$

6·16　证明如果 $n$ 是奇数，那么 $46^n+296\cdot 13^n$ 能被1947整除.

（匈牙利数学奥林匹克，1947年）

［证1］　已知表达式可化为

$$\begin{aligned}&46^n+296\cdot 13^n\\&=(46^n-13^n)+297\cdot 13^n\\&=(46^n-13^n)+9\cdot 33\cdot 13^n.\end{aligned}$$

由于　$$46-13=33\mid 46^n-13^n,$$

$$33\mid 9\cdot 33\cdot 13^n.$$

则　$$33\mid 46^n+296\cdot 13^n. \qquad ①$$

已知表达式又可化为

$$
\begin{aligned}
&46^n+296\cdot 13^n\\
&=(46^n+13^n)+295\cdot 13^n\\
&=(46^n+13^n)+5\cdot 59\cdot 13^n.
\end{aligned}
$$

由于 $n$ 是奇数,则

$$46+13=59\mid 46^n+13^n,$$

$$59\mid 5\cdot 59\cdot 13^n.$$

于是 $$59\mid 46^n+296\cdot 13^n, \quad ②$$

因为$(33,59)=1$,由 ①,② 得

$$33\cdot 59=1947\mid 46^n+296\cdot 13^n.$$

[证 2] 已知表达式可化为

$$
\begin{aligned}
&46^n+296\cdot 13^n\\
&=46\cdot 46^{n-1}+296\cdot 13\cdot 13^{n-1}\\
&=46(46^{n-1}-13^{n-1})+(46+296\cdot 13)\cdot 13^{n-1}.
\end{aligned}
$$

由于 $n$ 是奇数,则 $n-1$ 是偶数. 于是

$$46^2-13^2\mid 46^{n-1}-13^{n-1}.$$

而 $$46^2-13^2=59\cdot 33=1947,$$

于是 $$1947\mid 46^{n-1}-13^{n-1}.$$

又 $$46+296\cdot 13=1947\cdot 2,$$

从而 $$1947\mid (46+296\cdot 13)\cdot 13^{n-1}.$$

于是 $$1947\mid 46^n+296\cdot 13^n.$$

6·17 证明对任意自然数 $n$,表达式

$$A=2903^n-803^n-464^n+261^n$$

能被 1897 整除.

(匈牙利数学奥林匹克,1899 年)

[证] 将数 $A$ 写成

$$A=(2903^n-464^n)-(803^n-261^n).$$

由于 $$2903-464=2439=9\cdot 271,$$

$$803-261=542=2\cdot 271,$$

于是 $$9\cdot 271\mid 2903^n-464^n,$$

$$2\cdot 271\mid 803^n-261^n.$$

所以 $$271\mid A. \quad ①$$

数 $A$ 又可写成

$$A=(2903^n-803^n)-(464^n-261^n).$$

由于 $$2903-803=2100=7\cdot 300,$$

$$464-261=203=7\cdot 29,$$

于是 $$7\cdot 300\mid 2903^n-803^n,$$

$$7\cdot 29\mid 464^n-261^n.$$

所以 $$7\mid A. \quad ②$$

因为 $(271,7)=1$,由 ①,② 得

$$271\cdot 7\mid A,$$

即 $$1897\mid A.$$

6·18 证明若 $p$ 是素数,$p>2$,则分数

$$\frac{m}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{p-1}$$

的分子能被 $p$ 整除.

(基辅数学奥林匹克,1978 年)

[证] 把给定的分数改写为

$$\frac{m}{n}=\left(1+\frac{1}{p-1}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{p-2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\frac{p-1}{2}}+\frac{1}{\frac{p+1}{2}}\right)$$

$$=p\left[\frac{1}{1\cdot(p-1)}+\frac{1}{2\cdot(p-2)}+\cdots+\frac{1}{\frac{(p-1)(p+1)}{4}}\right]$$

用 $(p-1)!$ 乘上面等式的两边,因为上面等式右边方括号内的每一个分母的约数均不大于 $p-1$,因此当乘以 $(p-1)!$ 之后,方括号变成整数 $q$,即上式化为

$$m(p-1)!=npq.$$

因为 $p$ 是素数,则 $(p,(p-1)!)=1$,于是 $m$ 能被 $p$ 整除.

6·19 设 $P=\{$不小于 3 的自然数$\}$,在 $P$ 上定义函数 $f$ 如下:若 $n\in P$, $f(n)$ 表示不是 $n$ 的约数的最小自然数,例如 $f(7)=2$,$f(12)=5$ 等等.

现记 $f(n)$ 的值域为集合 $M$.求证 $19\in M$, $88\notin M$.

(中国北京市高中一年级数学竞赛,1988 年)

[证] 设 $n=18!$ 时,显然,1,2,3,…,17,18 都是 18! 的约数,而 19 为不是 18! 的约数的自然数中最小的一个.

所以 $$f(18!)=19.$$

因此 $$19\in M.$$

若 $88\in M$,即存在某个 $k\in P$,使得 $f(k)=88=8\cdot 11$.

由定义有 $$88\nmid k.$$

并且 $1,2,3,\cdots,86,87$ 都是 $k$ 的约数.

特别地 $$8\mid k,11\mid k.$$

由于 $$(8,11)=1,$$

所以 $$88\mid k.$$

这与 $88\nmid k$ 矛盾.

因此 $$88\notin M.$$

6·20　证明由7个自然数组成的公差为30的等差数列中,有一个而且只有一个数能被7整除.

（波兰数学竞赛,1954年）

[证]　公差为30的7个自然数可写为

$$a,a+30,a+2\cdot 30,\cdots,a+6\cdot 30.\qquad ①$$

这些数任两个数之差为

$$r=(a+k\cdot 30)-(a+m\cdot 30)=(k-m)\cdot 30$$

这里 $k$ 和 $m$ 是整数,并且 $0\leqslant k\leqslant 6,\quad 0\leqslant m\leqslant 6,\quad k\neq m$,从而 $-6\leqslant k-m\leqslant 6,\quad k-m\neq 0$.

因为 $(30,7)=1,7\nmid |k-m|$,于是

$$7\nmid (k-m)\cdot 30.$$

这就是说,① 中的7个数 $a+k\cdot 30(k=0,1,\cdots,6)$ 中任两数被7除所得的余数互不相同,因此,这7个数中有一个且只有一个能被7整除.

6·21　(1) 设 $(m,k)=1$. 证明存在整数 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 与 $b_1,b_2,\cdots,b_k$,使每一乘积 $a_ib_j(i=1,2,\cdots,m,\quad j=1,2,\cdots,k)$ 除以 $mk$ 时得出不同的余数.

(2) 设 $(m,k)>1$. 证明对任意整数 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 与 $b_1,b_2,\cdots,b_k$,总有两个乘积 $a_ib_j$ 与 $a_sb_t(i,j)\neq(s,t)$ 除以 $mk$ 时得到相同的余数.

（第28届国际数学奥林匹克候选题,1987年）

[证]　(1) 令 $a_i=ik+1,\quad b_j=jm+1.$

$$i=1,2,\cdots,m,\quad j=1,2,\cdots,k.$$

若有两个乘积 $a_ib_j$ 与 $a_{i'}a_{j'}$ 对模 $mk$ 同余，即

$$a_ib_j \equiv a_{i'}b_{j'} \pmod{mk}.$$

$$ijkm + ik + jm + 1 \equiv i'j'km + i'k + j'm + 1 \pmod{mk}$$

$$ik + jm \equiv i'k + j'm \pmod{mk}$$

$$k(i - i') \equiv - m(j - j') \pmod{mk}$$

因为 $$(k, m) = 1,$$

所以 $$k \mid j - j'.$$

又 $$1 \leqslant j, j' \leqslant k,$$

则 $$|j - j'| < k,$$

从而有 $$j = j',$$

同样有 $$i = i'.$$

所以每一乘积 $a_ib_j$ 除以 $mk$ 时的余数都不同.

(2) 若 $a_ib_j(i = 1,2,\cdots,m, j = 1,2,\cdots,k)$ 表示模 $mk$ 的 $mk$ 个不同的剩余类，则不妨设

$$a_1b_1 \equiv 0 \pmod{mk}.$$

记 $a' = (a_1, mk)$，$b' = (b_1, mk)$.

则 $$a'b' \equiv 0 \pmod{mk}.$$

如果 $a' < m$，则在 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 这 $m$ 个数中，必有两数 $a_s, a_t$ 对模 $a'$ 同余，即必有

$$a_s \equiv a_t \pmod{a'}.$$

从而有 $$a_sb_1 \equiv a_tb_1 \pmod{mk}.$$

这与 $a_ib_j$ 表示对模 $mk$ 的不同的剩余类相矛盾.

所以有 $$a' \geqslant m.$$

但在 $mk$ 个积 $a_ib_j$ 中至少有 $k$ 个：$a_1b_1, a_1b_2, \cdots, a_1b_k$ 是 $a'$ 的倍数，而这 $mk$ 个数分别与 $0,1,2,\cdots, mk-1$ 对模 $mk$ 同余.

所以其中至多有 $\frac{mk}{a'} \leqslant \frac{mk}{m} = k$ 个为 $a'$ 的倍数.

于是 $mk$ 个积 $a_ib_j$ 中有 $k$ 个是 $a'$ 的倍数.

因而 $$a' = m.$$

从而 $b_1, b_2, \cdots, b_k$ 必属于模 $k$ 的不同类（否则 $a'b_j$ 中将有属于模 $mk$ 的同一类的）.

同样，$a_1, a_2, \cdots, a_m$ 属于模 $m$ 的不同类.

若$(k,m)>1$,设素数 $p\mid(m,k)$.

则 $a_i$ 中有 $m-\frac{m}{p}$ 个不被 $p$ 整除,$b_j$ 中有 $k-\frac{k}{p}$ 个不被 $p$ 整除.

从而有$(m-\frac{m}{p})(k-\frac{k}{p})$ 个 $a_ib_j$ 不被 $p$ 整除.

另一方面,对于模 $mk$, $a_ib_j$ 不在同一类中,所以应有 $mk-\frac{mk}{p}$ 个不被 $p$ 整除.

由于
$$mk-\frac{mk}{p}\neq(m-\frac{m}{p})(k-\frac{k}{p}).$$
从而导出矛盾.

这表明 $a_ib_j$ 中必有两个数除以 $mk$ 得到相同的余数.

6·22 证明如果两个不可约分数之和是整数,那么这两个分数的分母相同.

(第 1 届墨西哥数学奥林匹克,1990 年)

[证] 设两个不可约分数为$\frac{q}{p}$,和$\frac{n}{m}$,则$\frac{q}{p}+\frac{n}{m}=\frac{qm+pn}{pm}$是整数.

即
$$pm\mid(qm+pn).$$
(1) 由 $p\mid(qm+pn)$ 可知
$$p\mid qm.$$
又 $(p,q)=1$,则
$$p\mid m,$$
(2) 由 $m\mid(qm+pn)$,可知
$$m\mid pn.$$
又$(m,n)=1$,则 $m\mid p$.因此
$$p=m.$$
于是两个分数的分母相同.

6·23 对于正整数 $n$ 与 $k$,定义
$$F(n,k)=\sum_{r=1}^{n}r^{2k-1}.$$
求证 $F(n,1)$ 可整除 $F(n,k)$.

(第 18 届加拿大数学竞赛,1986 年)

[证] 注意到,当 $n$ 为正奇数时,

$$a+b \mid a^n+b^n.$$

对 $n$ 分为奇数和偶数讨论.

(1) 当 $n$ 为偶数时,设 $n=2t$,则

$$F(n,1)=F(2t,1)=\sum_{r=1}^{2t} r=t(2t+1).$$

$$\begin{aligned}F(n,k)&=F(2t,k)\\&=\sum_{r=1}^{2t} r^{2k-1}\\&=\sum_{r=1}^{t} r^{2k-1}+\sum_{r=1}^{t}(2t+1-r)^{2k-1}\\&=\sum_{r=1}^{t}[r^{2k-1}+(2t+1-r)^{2k-1}].\end{aligned}$$

因为 $2k-1$ 是奇数,且

$$r+(2t+1-r)=2t+1,$$

则
$$2t+1 \mid r^{2k-1}+(2t+1-r)^{2k-1},$$

即
$$2t+1 \mid F(n,k).$$

另一方面,

$$\begin{aligned}F(n,k)&=F(2t,k)\\&=\sum_{r=1}^{t-1}[r^{2k-1}+(2t-r)^{2k-1}]+t^{2k-1}+(2t)^{2k-1}.\end{aligned}$$

由于 $r+(2t-r)=2t$,于是

$$t \mid r^{2k-1}+(2t-r)^{2k-1},$$

从而
$$t \mid F(n,k).$$

又因为 $t$ 与 $2t+1$ 互素,所以

$$t(2t+1) \mid F(n,k),$$

即
$$F(n,1) \mid F(n,k).$$

(2) 当 $n$ 为奇数时,设 $n=2t+1$.

$$F(n,1)=F(2t+1,1)=\sum_{r=1}^{2t+1} r=(t+1)(2t+1).$$

$$\begin{aligned}F(n,k)&=F(2t+1,k)\\&=\sum_{r=1}^{t}[r^{2k-1}+(2t+2-r)^{2k-1}]+(t+1)^{2k-1}.\end{aligned}$$

由于 $r+(2t+2-r)=2(t+1)$,所以

$$t+1 \mid r^{2k-1}+(2t+2-r)^{2k-1},$$

于是 $$t+1 \mid F(n,k).$$

另一方面,

$$F(n,k)=F(2t+1,k)$$
$$=\sum_{r=1}^{t}[r^{2k-1}+(2t+1-r)^{2k-1}]+(2t+1)^{2k-1}.$$

由于 $r+(2t+1-r)=2t+1$,所以

$$2t+1 \mid r^{2k-1}+(2t+1-r)^{2k-1},$$

于是 $$2t+1 \mid F(n,k),$$

再由 $t+1$ 与 $2t+1$ 互素可得

$$(t+1)(2t+1) \mid F(n,k),$$

即 $$F(n,1) \mid F(n,k).$$

综合以上,对正整数 $n,k$ 总有

$$F(n,1) \mid F(n,k).$$

**6·24** 在公比是大于 1 的等比数列中,最多有几项是在 100 和 1000 之间的整数.

(第 4 届加拿大数学竞赛,1972 年)

**[解]** 设公比为 $r(r>1)$ 的等比数列满足

$$100 \leqslant a < ar < ar^2 < \cdots < ar^{n-1} \leqslant 1000.$$

其中 $ar^k(k=0,1,\cdots,n-1)$ 均为整数.

显然,$r$ 必为有理数.设 $r=\frac{p}{q}(p>q>1).(p,q)=1.$

因为 $$ar^{n-1}=\frac{ap^{n-1}}{q^{n-1}}$$

以及 $p$ 和 $q$ 互素,则有 $q^{n-1}$ 能整除 $a$, $\frac{a}{q^{n-1}} \geqslant 1.$

为使等比数列的项数最多,我们取 $p=q+1$,

从而有

$$100 \leqslant a < a\left(\frac{q+1}{q}\right) < \cdots < a\left(\frac{q+1}{q}\right)^{n-1} \leqslant 1000.$$

若 $q \geqslant 3$,则

$$1000 \geqslant a\left(\frac{q+1}{q}\right)^{n-1} \geqslant (q+1)^{n-1} \geqslant 4^{n-1}.$$

所以 $$n-1\leqslant\frac{3}{\lg4},$$
$$n\leqslant5.$$
若 $q=1$,则
$$1000\geqslant a(\frac{q+1}{q})^{n-1}=a\cdot2^{n-1}\geqslant100\cdot2^{n-1}.$$
$$n-1\leqslant\frac{1}{\lg2},$$
$$n\leqslant4.$$
若 $q=2$,则
$$1000\geqslant a(\frac{q+1}{q})^{n-1}=a(\frac{3}{2})^{n-1}\geqslant100\cdot(\frac{3}{2})^{n-1}.$$
$$n-1\leqslant\frac{1}{\lg\frac{3}{2}}$$
$$n\leqslant6.$$
因此,数列最长有 6 项.

当 $n=6$ 时,取 $q=2,r=\frac{3}{2}$,可由
$$a\cdot(\frac{3}{2})^5\leqslant1000$$
得 $$100\leqslant a\leqslant\frac{32000}{243}\qquad①$$
取满足不等式 ①,且 $2^5\mid a$ 的整数 $a$,可得
$$a=128.$$
从而有满足条件的数列
$$128,192,288,432,648,972.$$

6·25　求出所有正整数 $k$,使多项式 $x^{2k+1}+x+1$ 被 $x^k+x+1$ 整除.对每个满足上述条件的 $k$,求出使 $x^n+x+1$ 被 $x^k+x+1$ 整除的正整数 $n$.

(英国数学奥林匹克,1991 年)

**[解]**　因为 $x^k+x+1\mid x^{2k+1}+x+1,$

则 $$x^k+x+1\mid(x^{2k+1}+x+1)-(x^k+x+1),$$
即 $$x^k+x+1\mid x^k(x^{k+1}-1).\qquad①$$
因为 $$x+1\mid x^k-(-1)^k,$$

数论卷

所以 $$(x^k, x+1)=1,$$

$$(x^k, x^k+x+1)=(x^k, x+1)=1.$$

于是 $x^k$ 与 $x^k+x+1$ 互素.

由 ① 式必有

$$x^k+x+1 \mid x^{k+1}-1.$$

又 $$x^{k+1}-1=x(x^k+x+1)-(x^2+x+1),$$

因而 $$x^k+x+1 \mid x^2+x+1,$$

所以 $$k=1 \text{ 或 } 2.$$

但 $k=1$ 时,

$$x^k+x+1=2x+1 \nmid x^2+x+1,$$

所以 $$k=2.$$

又因为 $x^2+x+1$ 的根为 $\omega=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

其中 $i$ 为虚单位,即 $i^2=-1$.

若 $x^n+x+1$ 能被 $x^2+x+1$ 整除,则

$$\omega^n+\omega+1=0.$$

所以 $n=3m+2$, $m$ 为非负整数.

6·26 对正整数 $k$,存在正整数 $n$ 和 $m$,使得 $\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{m^2}=\dfrac{k}{n^2+m^2}$. 求出所有的正整数 $k$.

(匈牙利数学奥林匹克,1984 年)

[解] 将已知等式去分母得

$$m^2(n^2+m^2)+n^2(n^2+m^2)=km^2n^2,$$

$$(m^2+n^2)^2=km^2n^2.$$

由此可知,$k$ 是完全平方数.设 $k=j^2$,于是

$$m^2+n^2=jmn. \quad ①$$

若 $(m,n)=d>1$,则可以在 ① 的两边同时除以 $d^2$,因此可以假设 $m$ 和 $n$ 互素.

于是由 $$n \mid m^2+n^2,$$

可得 $$n \mid m^2,$$

进而 $$n \mid m.$$

同理又有 $$m \mid n.$$

因此 $$m = n.$$

再由$(m,n)=1$,则 $m = n = 1$,于是

$$j = 2.$$

所以 $k = 4$ 是本题惟一的正整数解.

6·27 在三角形 $ABC$ 中,$\angle A = 2\angle B$,$\angle C$ 是钝角,三条边长 $a$,$b$,$c$ 都是整数,求周长的最小值并给出证明.

(第 20 届美国数学奥林匹克,1991 年)

[解] 由题设及正弦定理,余弦定理得

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\sin 2B}{\sin B} = 2\cos B$$

$$= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{ac}.$$

即 $$a^2c - a^2b - bc^2 + b^3 = 0,$$

$$(c - b)(a^2 - bc - b^2) = 0.$$

因为 $C$ 为钝角,所以 $c > b$,于是

$$a^2 - bc - b^2 = 0.$$

所以有 $$a^2 = b(b + c). \quad ①$$

若$(b,c) = d > 1$,则由 ① 式,必有 $d \mid a$,从而可以在 ① 的两边约去 $d^2$.因此可以设$(b,c) = 1$.

于是有 $$(b, b + c) = 1.$$

再由 ① 式可知,$b$ 和 $b + c$ 都必须是完全平方数,于是可设

$$b = m^2, \quad b + c = n^2.$$

这时 $$a = mn, \quad (m,n) = 1.$$

因为 $a + b > c$,所以

$$a^2 = b(b + c) < b[b + (a + b)] = b(2b + a).$$

解得 $$a < 2b. \quad ②$$

又因为 $\angle C$ 是钝角,则 $a^2 + b^2 < c^2$.

由 ① 又得 $b(b + c) + b^2 < c^2$.

解得 $$2b < c. \quad ③$$

由 ②,③ $$a < 2b < c. \quad ④$$

再由 ①,④ 得

$$a^2 = b(b+c) > b(b+2b) = 3b^2.$$

因此 $$\sqrt{3}b < a < 2b.$$

即 $$\sqrt{3}m < n < 2m. \quad ⑤$$

所以在区间$(\sqrt{3}m, 2m)$内有正整数 $n$,从而

$$2m - \sqrt{3}m > 1.$$

即 $$m > \frac{1}{2-\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3} > 3.$$

$$m \geqslant 4.$$

(1) 当 $m = 4$ 时,由 ⑤

$$4\sqrt{3} < n < 8,$$

则 $$n = 7.$$

此时 $$a + b + c = n^2 + mn = 49 + 28 = 77.$$

(2) 当 $m \geqslant 5$ 时,$n > 7$.

此时 $$a + b + c = n^2 + mn > 77.$$

所以周长的最小值为 77,此时三边 $a,b,c$ 的长分别为 28,16,33.

**6·28** 设 $a,b,p$ 为任意整数.证明一定能找到互素的两个整数 $k$ 和 $l$,使得 $ak+bl$ 能被 $p$ 整除.

(第 1 届全俄数学奥林匹克,1961 年
第 24 届莫斯科数学奥林匹克,1961 年)

[证] 设 $b$ 和 $p-a$ 的最大公约数等于 $d$,即

$$(b, p-a) = d.$$

则有 $$b = kd, \qquad p - a = ld.$$

且 $$(k, l) = 1.$$

此时

$$\begin{aligned} & ak + bl \\ = & a \cdot \frac{b}{d} + b \cdot \frac{p-a}{d} \\ = & \frac{bp}{d} \\ = & pk. \end{aligned}$$

于是 $ak + bl$ 能被 $p$ 整除,且 $k$ 和 $l$ 互素.

**6·29** 假设 $a,b,c,d$ 是整数,且与数 $m = ad - bc$ 互素.证明若整数 $x$ 和 $y$ 能使 $ax + by$ 被 $m$ 整除,则 $cx + dy$ 也能被 $m$ 整除.

（匈牙利数学奥林匹克，1927 年）

[证 1] 假设 $x$ 和 $y$ 是使 $m \mid ax+by$ 的整数，则

$$ax+by=km=k(ad-bc).$$

其中 $k$ 是整数.

由此推出

$$a(x-kd)=-b(y+kc). \quad ①$$

如果 $a$ 和 $b$ 不互素，即有大于 1 的公约数 $l$，则数 $m=ad-bc$ 也有公约数 $l>1$. 这与已知 $a,b$ 与 $m$ 互素相矛盾，因此 $a$ 和 $b$ 一定互素.

于是由 ① 可得 $a \mid y+kc$.

即

$$y+kc=la. \quad ②$$

其中 $l$ 是某个整数.

将 ② 代入 ① 得 $x-kd=-lb$.

于是

$$x=kd-lb,$$
$$y=-kc+la.$$

$$\begin{aligned} cx+dy &= c(kd-lb)+d(-kc+la)\\ &= l(ad-bc)\\ &= lm. \end{aligned}$$

因此，$cx+dy$ 能被 $m$ 整除.

[证 2] 设 $u=ax+by,\quad v=cx+dy$.

则

$$du-bv=(ad-bc)x=mx.$$

于是，若 $m \mid u$，则必有 $m \mid bv$.

又 $(b,m)=1$，则 $m \mid v=cx+dy$.

6·30 设 $n$ 与 $k$ 是互素的两个正整数且 $k<n$. 将集合 $M=\{1,2,\cdots,n-1\}$ 中每个数染上蓝、白两色之一，染色法如下：

(i) 对于每一个 $i \in M$，$i$ 和 $n-i$ 同色；

(ii) 对于每一个 $i \in M$，$i \neq k$，$i$ 和 $|i-k|$ 同色.

证明在 $M$ 中的所有数均同色.

（第 26 届国际数学奥林匹克，1985 年）

[证] 考察下面的 $n-1$ 个等式：

$$k \cdot 1 = nq_1+m_1, \quad 0 \leqslant m_1 < n,$$
$$k \cdot 2 = nq_2+m_2, \quad 0 \leqslant m_2 < n,$$
$$\cdots\cdots$$

$$k \cdot (n-1) = nq_{n-1} + m_{n-1}, \quad 0 \leqslant m_{n-1} < n.$$

因为$(n,k)=1$,所以 $m_r \neq 0(r=1,2,\cdots,n-1)$.

数论卷

下面证明 $m_1, m_2, \cdots, m_{n-1}$ 各不相同.

否则,若 $m_i = m_j$(不妨设 $i > j$),则

$$k(i-j) = n(q_i - q_j).$$

由于$0 < i-j < n-1$, $(k,n)=1$,所以必有 $q_i - q_j = 0$,于是 $ki = kj, i = j$,这是不可能的.

于是 $m_1, m_2, \cdots, m_{n-1}$ 是$1,2,\cdots,n-1$的一个排列.

对于$2 \leqslant r \leqslant n-1$,由

$$k(r-1) = kr - k = nq_{r-1} + m_{r-1}, \qquad ①$$

$$kr = nq_r + m_r, \qquad ②$$

则必有 $q_r = q_{r-1}$ 或 $q_r = q_{r-1} + 1$.

② - ① 得

$$k = n(q_r - q_{r-1}) + m_r - m_{r-1}. \qquad ③$$

当 $q_r = q_{r-1}$ 时,

$$k = m_r - m_{r-1},$$

$$m_{r-1} = m_r - k, \quad m_r \neq k.$$

由条件(ii)可知 $m_r$ 与 $|m_r - k| = m_{r-1}$ 同色.

当 $q_r - q_{r-1} = 1$ 时,由③式有

$$m_r = m_{r-1} + k - n,$$

$$m_r - k = m_{r-1} - n,$$

$$|m_r - k| = n - m_{r-1}.$$

由条件(ii)可知 $m_r$ 与 $|m_r - k| = n - m_{r-1}$ 同色.

又由条件(i)可知,$m_{r-1}$ 与 $n - m_{r-1}$ 同色,因而 $m_r$ 与 $m_{r-1}$ 同色.

由以上可知,$m_r$ 与 $m_{r-1}$ 同色,$2 \leqslant r \leqslant n-1$.

于是 $m_{n-1}$ 与 $m_{n-2}$ 同色,与 $m_{n-3}$ 同色,$\cdots$,与 $m_1$ 同色!

所以 $m_1, m_2, \cdots, m_{n-1}$ 都同色.

又因为 $m_1, m_2, \cdots, m_{n-1}$ 是$1,2,\cdots,n-1$的一个排列,所以 $M$ 中的所有数都同色.

**6·31** 求出这样一组五个不同的自然数,使得其中任意两个数互素,且任意若干个数(多于1个)之和为合数.

（第 21 届全苏数学奥林匹克，1987 年）

**[解]** 我们考虑一般的情形：

设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 这 $n$ 个数满足

$$a_i = i\cdot n!+1,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

则这 $n$ 个数中任意两个数都互素．

否则，若 $(a_i,a_j)=d>1$，则由

$$a_i = i\cdot n!+1 = pd, \qquad ①$$

$$a_j = j\cdot n!+1 = qd. \qquad ②$$

得 $$(i-j)n! = (p-q)d.$$

于是 $$d\mid(i-j)n!$$

由 ① 可知，$d$ 不是 $2,3,\cdots,n$ 的约数，又由于 $|i-j|<n$，于是只有 $d=1$，即 $a_i$ 与 $a_j$ 互素．

此外，$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中任意 $k$ 个数之和一定能被 $k$ 整除．

因此 $a_i = i\cdot n!+1, i=1,2,\cdots,n$ 是满足题设条件的 $n$ 个数．

特别地，$n=5$ 时，这五个数为

121，241，361，481，601．

6·32 能否找到含有 1990 个自然数的集合 $S$，使

(1) $S$ 中任意两数互素；

(2) $S$ 中任意 $k(\geqslant 2)$ 个数的和为合数．

（中国国家集训队测验题，1990 年）

**[解]** 任取自然数 $a_1$，设已有自然数集合

$$S'=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}.$$

且 $S'$ 中任意两数互素，任意 $k(2\leqslant k\leqslant n)$ 个数的和为合数．

取 $2^n-1$ 个与乘积 $a_1a_2\cdots a_n$ 互素的素数 $P_j(1\leqslant j\leqslant 2^n-1)$．

设由 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 每次取 $k$ 个 $(1\leqslant k\leqslant n)$ 所得的

$$C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n = 2^n-1$$

个和为 $S_j(1\leqslant j\leqslant 2^n-1)$．

考虑同余方程组

$$\begin{cases} a_1a_2\cdots a_nx+1+S_1\equiv 0 \pmod{p_1^2}, \\ a_1a_2\cdots a_nx+1+S_2\equiv 0 \pmod{p_2^2}, \\ \cdots\cdots \\ a_1a_2\cdots a_nx+1+S_{2^n-1}\equiv 0 \pmod{p_{2^n-1}^2}. \end{cases}$$

由中国剩余定理,这个方程组必有正整数解 $x$,令 $a_{n+1} = a_1a_2\cdots a_nx + 1$,

则 $a_1,a_2,\cdots,a_n,a_{n+1}$ 两两互素,且任意 $k$ 个$(2\leqslant k\leqslant n+1)$的数的和为合数.

这样,我们就由 $n$ 个元素的集合 $S'$ 生成一个新元素 $a_{n+1}$ 得到 $n+1$ 个元素的 $S''$,而 $S''$ 符合题目要求.

于是,我们可以找到含有 1990 个自然数且符合题目要求的集合 $S$.

6·33　证明对任何整数 $m$,存在无穷多组整数$(x,y)$,使得

(1)$x$ 与 $y$ 互素;

(2)$y$ 整除 $x^2+m$;

(3)$x$ 整除 $y^2+m$.

(第 33 届国际数学奥林匹克预选题,1992 年)

[证]　首先 $x=1,y=1$ 是符合条件的一组整数解.

其次,如果$(x,y)$ 是符合条件的一组解,有 $x\leqslant y$. 那么考察整数对$(x,y)$,其中

$$y^2+m = xx_1. \qquad ①$$

显然,由 ① 可知,$x_1$ 与 $y$ 的任何素公约数都是 $m$ 的约数,又由条件(2),　$y \mid x^2+m$,则这个素公约数也是 $x$ 的约数.

因此有

$$(x_1,y)=1.$$

由 ① 式及条件(2) 可得

$$\begin{aligned} & x^2(x_1^2+m) \\ = & (xx_1)^2 + x^2m \\ = & (y^2+m)^2 + x^2m \\ = & y^4 + 2my^2 + m(x^2+m) \end{aligned}$$

是 $y$ 的倍数.

由于$(x,y)=1$,因此 $y \mid x_1^2+m$,从而$(x_1,y)$ 满足条件(1),(2),(3),且 $x_1 > y \geqslant x$.

再由 ① 式又可得$(x_1,y_1)$,$(x_2,y_1)$,$(x_2,y_2)$,$\cdots$,且 $x<x_1<x_2<\cdots$,$y<y_1<y_2<\cdots$,这一过程可无限多次进行下去,使我们得到无穷多组符合题目条件的整数.

6·34　设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ 是整系数多项式，既约有理分数 $\frac{p}{q}$ 是它的一个根.

证明对任何整数 $k$，数 $p-kq$ 都可整除数 $f(k)$.

（第 18 届莫斯科数学奥林匹克，1955 年）

[证]　先证明一个引理.

引理　设 $f(x)=\sum_{i=0}^{m+1}f_ix^i$ 是 $m+1$ 次整系数多项式，既约有理分数 $\frac{p}{q}$ 是它的一个根，令

$$f(x)=\left(x-\frac{p}{q}\right)g(x) \quad ①$$

则 $g(x)$ 是整系数多项式.

引理的证明　显然 $g(x)$ 是有理多项式，且

$$p\mid f_0,\quad q\mid f_{m+1}.$$

令
$$g(x)=\sum_{i=0}^{m}g_ix^i.$$

其中 $g_i$ 是有理数，我们证明 $g_i$ 都是整数.

由 ① 得

$$qf(x)=(qx-p)g(x).$$

$$\begin{aligned}q\sum_{i=0}^{m+1}f_ix^i&=(qx-p)\sum_{i=0}^{m}g_ix_i\\&=\sum_{i=0}^{m}qg_ix^{i+1}-\sum_{i=0}^{m}pg_ix^i\\&=qg_mx^{m+1}+\sum_{i=1}^{m}(qg_{i-1}-pg_i)x^i-pg_0.\end{aligned}$$

所以有
$$\begin{cases}qf_{m+1}=qg_m\\qf_i=qg_{i-1}-pg_i,\quad i=1,2,\cdots,m.\\qf_0=-pg_0.\end{cases}$$

于是 $g_m=f_{m+1}$ 是整数.

假设有某一个 $i\geqslant1$ 存在，使 $g_m,g_{m-1},\cdots,g_i$ 都是整数，而 $g_{i-1}$ 不是整数，则由

$$g_{i-1} = f_i + \frac{p}{q} g_i$$

可知，$g_{i-1}$ 的分母含有 $q$ 的真因子，于是 $g_{i-2} = f_i + \frac{p}{q} g_{i-1}$ 中 $g_{i-2}$ 的分母也含有 $q$ 的真因子，也不是整数.

这样，$g_{i-1}, g_{i-2}, \cdots, g_1, g_0$ 都不是整数，然而 $qf_0 = -pg_0$，且 $p \mid f_0$，可得 $g_0$ 是整数，从而导致了矛盾. 这一矛盾说明 $g_i$ 都是整数，即 $g(x)$ 是整系数多项式.

由引理，令 $x = k$，$k$ 是整数，则

$$qf(k) = (qk - p)f(k)$$

其中 $f(k)$ 是整数.

由 $p$ 和 $q$ 互质，则 $(qk - p, q) = 1$.

于是 $qk - p \mid f(k)$.

**6·35** 给定两个互素的自然数 $p$ 和 $q$. 整数 $n$ 如果能表示成 $n = px + qy$ 的形式，其中 $x, y$ 为非负整数，则称 $n$ 是"好的"，在相反的情况下，则称 $n$ 是"坏的".

(1) 证明存在整数 $c$，使整数 $n$ 与 $c - n$ 中始终一个是好的，一个是坏的.

(2) 坏的非负整数共有多少个.

（第 5 届全俄数学奥林匹克，1965 年）

**[解]** (1) 如果 $p, q$ 是互素的自然数，那么每一个整数 $z$ 都能表示为 $z = px + qy$ 的形式.

并且若 $x = a$，$y = b$ 满足上式，则有

$$z = p(a - qt) + q(b + pt) \quad (t \in Z).$$

同时，对于 $0 \leqslant x \leqslant q - 1$，存在惟一的表达式.

我们可以把每一个整数 $z$ 与整数对 $(x, y)$ 相对应. 这里 $0 \leqslant x \leqslant q - 1$，$z = px + qy$. 同时不同的数与不同的数对相对应，而且仅当 $y \geqslant 0$ 时，$z$ 是好的.

如果数 $z = px + qy (0 \leqslant x \leqslant q - 1)$ 是好数，那么 $z' = (q - 1 - x)p + (-1 - y)q$ 就是坏数，反过来，如果 $z$ 是坏数，则 $z'$ 是好数. 而且点 $(x, y)$ 和点 $(q - 1 - x, -1 - y)$ 关于点 $(x_0, y_0) = (\frac{q-1}{2}, -\frac{1}{2})$

对称，而数 $z$ 和 $z'$ 关于点 $z_0 = px_0 + qy_0 = \frac{pq-p-q}{2}$ 对称，因为 $z + z' = pq - p - q = 2z_0 = c$.

所以，好数 $z$ 对应于坏数 $z' = c - z$，反过来也对.

(2) 因为最小的好数是 0，那么最大的坏数将是 $c$，所以共有 $\frac{c+1}{2} = \frac{(p-1)(q-1)}{2}$ 个坏数.

6·36 自然数 $p$ 和 $q$ 互素，区间 $[0,1]$ 被分成 $p+q$ 个相等的小区间. 证明除去最左边和最右边的两个小区间之外，在其余的每个小区间中有下列 $p+q-2$ 个数中的一个数：

$$\frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \cdots, \frac{p-1}{p}, \frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \cdots, \frac{q-1}{q}.$$

(第 13 届全苏数学奥林匹克，1979 年)

[证] 因为 $(p,q) = 1$.

所以 $(p, p+q) = 1,\quad (q, p+q) = 1.$

因此，$\frac{i}{p}, \frac{j}{q}, \frac{i+j}{p+q}(i = 1,2,\cdots,p-1; j = 1,2,\cdots,q-1)$ 都不相同.

又因为若 $\frac{i}{p} < \frac{j}{q}$，则

$$\frac{i}{p} < \frac{i+j}{p+q} < \frac{j}{q}.$$

因此，所有分数 $\frac{i}{p}, \frac{j}{q}$ 都在不同的区间 $[\frac{k}{p+q}, \frac{k+1}{p+q}]$ 之中，$k = 1,2,\cdots,p+q-2$.

6·37 设 $a,b,c$ 为两两互质的正整数. 证明 $2abc - ab - bc - ca$ 是不能表示为 $xbc + yca + zab$ 形式的最大整数(其中 $x,y,z$ 是非负整数).

(第 24 届国际数学奥林匹克，1983 年)

[证] 首先证明 $2abc - ab - bc - ca$ 不能表示为 $xbc + yca + zab$ 的形式.

用反证法. 设 $2abc - ab - bc - ca = xbc + yca + zab$，其中 $x,y,z$ 为非负整数. 则有 $2abc = bc(x+1) + ca(y+1) + ab(z+1)$.

于是 $$a \mid bc(x+1).$$
由题设 $$(a,bc)=1,$$
则有 $$a \mid (x+1).$$
于是 $a \leqslant x+1$,同理 $b \leqslant y+1$, $c \leqslant z+1$.

这样就有
$$2abc = bc(x+1)+ca(y+1)+ab(z+1) \geqslant bca+cab+abc = 3abc.$$
这是不可能的.

下面证明:凡是大于 $2abc-bc-ca-ab$ 的数 $n$ 都能表示为 $xbc+yca+zab$ 的形式.

为此先证明一个引理:

设 $a,b$ 都是正整数,且 $(a,b)=1$,则凡是大于 $ab-a-b$ 的数必能表示为 $ax+by(x \geqslant 0, y \geqslant 0)$ 的形式.

因为 $(a,b)=1$,则不定方程
$$ax+by=m$$
必有整数解,设 $(u,v)$ 是它的一组整数解.

于是每个整数 $m$ 都可表达为
$$m=(u-kb)a+(v+ka)b, \quad k \in Z$$
的形式.

选取 $k_0$,使 $0 \leqslant u-k_0b<b$,并令
$$u_0=u-k_0b, \quad v_0=v+k_0a,$$
则有 $$m=u_0a+v_0b, \quad 0 \leqslant u_0<b, \quad v_0 \in Z.$$
显然,只要 $v_0 \geqslant 0$, $m$ 即表示成了所要求的形式.

对于大于 $ab-a-b$ 的正整数 $m$,这时有
$$(b-1)a+v_0b \geqslant u_0a+v_0b=m>ab-a-b.$$
由此得 $$v_0b>-b, \quad v_0>-1, \quad v_0 \geqslant 0.$$
因此引理得证.

下面证明当 $n>2ab-bc-ca-ab$ 时,$n$ 必能表示为 $xbc+yca+zab$ 的形式.由于
$$\begin{aligned} n &> 2abc-bc-ca-ab \\ &= (abc-ab-ca+a)+(abc-a-bc) \\ &= a(b-1)(c-1)+(abc-a-bc) \end{aligned}$$

$$\geqslant a(bc)-a-bc.$$

由题设$(a,bc)=1$,则由引理,$n$可写成

$$n=aw+xbc,\quad 0\leqslant x<a.$$

此时又有$aw=n-xbc\geqslant n-(a-1)bc>abc-ab-ca$.

即 $$w>bc-b-c.$$

再由引理,$w$可写成 $w=cy+bz,\quad y\geqslant 0,\quad z\geqslant 0$.

从而可得 $n=aw+xbc=a(cy+bz)+xbc$,

即 $$n=xbc+yca+zab,\quad x\geqslant 0,\quad y\geqslant 0,\quad z\geqslant 0.$$

6·38 如果一个整系数多项式的所有系数是互素的,则称它为本原多项式.试证本原多项式的积,还是本原多项式.

(前苏联大学生数学竞赛,1975年)

[证1] 设$f(x),g(x)$为本原多项式,即

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n,$$
$$g(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m,$$
$$(a_0,a_1,\cdots,a_n)=1,$$
$$(b_0,b_1,\cdots,b_m)=1,$$

并设$m\leqslant n$.则

$$f(x)g(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_{m+n}x^{m+n},$$

其中系数$c_k$满足

$$c_k=\begin{cases}a_0b_k+a_1b_{k-1}+\cdots+a_kb_0(0\leqslant k\leqslant m),\\ a_{k-m}b_m+a_{k-m+1}b_{m-1}+\cdots+a_kb_0(m<k\leqslant n),\\ a_{k-m}b_m+a_{k-m+1}b_{m-1}+\cdots+a_nb_{k-n}(n<k\leqslant m+n).\end{cases}$$

若$f(x)g(x)$不是本原多项式,则$c_0,c_1,c_2,\cdots,c_{m+n}$有素公约数$p$.

由$p$是$c_0=a_0b_0$的素约数,可有下面的三种可能.

(1)$p$是$b_0$的约数,但不是$a_0$的约数;

(2)$p$是$a_0$的约数,但不是$b_0$的约数;

(3)$p$既是$a_0$的约数,也是$b_0$的约数.

在情形(1)下,因$(b_0,b_1,\cdots,b_m)=1$,故有$i(0\leqslant i<m)$使得$b_0$,$b_1,\cdots,b_i$能被$p$整除,但$b_{i+1}$不能被$p$整除.考察$c_{i+1}$,

$$c_{i+1}=a_0b_{i+1}+a_1b_i+\cdots+a_{i+1}b_0.$$

该式的第一项不能被 $p$ 整除,而后面的 $i+1$ 项都能被 $p$ 整除,所以 $c_{i+1}$ 不能被 $p$ 整除,与 $p$ 是 $c_0,c_1,c_2,\cdots,c_{m+n}$ 的公约数矛盾.



在情形(2)下,因 $(a_0,a_1,\cdots,a_n)=1$,故有 $j(0\leqslant j<n)$ 使得 $a_0,a_1,\cdots,a_j$ 能被 $p$ 整除,但 $a_{j+1}$ 不能被 $p$ 整除.

若 $j\leqslant m-1$,则

$$c_{j+1}=a_0b_{j+1}+\cdots+a_jb_1+a_{j+1}b_0$$

的前 $j+1$ 项能被 $p$ 整除,但最后一项不能被 $p$ 整除,故 $c_{j+1}$ 不能被 $p$ 整除.出现矛盾.

若 $m\leqslant j\leqslant n-1$,则

$$c_{j+1}=a_{j+1-m}b_m+\cdots+a_jb_1+a_{j+1}b_0.$$

的前 $m$ 项能被 $p$ 整除,但最后一项不能被 $p$ 整除,故 $c_{j+1}$ 不能被 $p$ 整除,出现矛盾.

在情形(3)下,同理,有 $i,j(0\leqslant i\leqslant m-1,0\leqslant j\leqslant n-1)$ 使得 $b_0,b_1,\cdots,b_i$ 和 $a_0,a_1,\cdots,a_j$ 能被 $p$ 整除,但 $a_{j+1},b_{i+1}$ 都不能被 $p$ 整除,这时可以证明 $c_{i+j+2}$ 不能被 $p$ 整除,出现矛盾.

综上所述,$f(x)g(x)$ 的系数 $c_0,c_1,\cdots,c_{m+n}$ 没有任何素公约数,因此 $f(x)g(x)$ 也是本原多项式.

[**证 2**] 设 $f(x),g(x)$ 为本原多项式,即

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i,\ a_n\neq 0,$$

$$g(x)=\sum_{j=0}^{m}b_jx^j,\ b_m\neq 0,$$

且
$$(a_0,a_1,\cdots,a_n)=1,\qquad ①$$
$$(b_0,b_1,\cdots,b_m)=1.\qquad ②$$

对 $a_i,b_j$ 进行扩充,令

$$a_i=0,\quad i<0\quad 或\ i>n,$$
$$b_j=0,\quad j<0\quad 或\ j>m.$$

则

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i=\sum_{i=-\infty}^{\infty}a_ix^i,$$

$$g(x)=\sum_{j=0}^{m}b_jx^j=\sum_{j=-\infty}^{\infty}b_jx^j.$$

于是

$$f(x)\cdot g(x)=\left(\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\right)\left(\sum_{j=0}^{m}b_jx^j\right)$$
$$=\sum_{k=0}^{m+n}\left(\sum_{i=0}^{n}a_ib_{k-i}\right)x^k$$
$$=\sum_{k=0}^{m+n}c_kx^k.$$

其中

$$c_k=\sum_{i=0}^{n}a_ib_{k-i},\quad k=0,1,\cdots,m+n.$$

设 $p$ 是任一素数,则由 ① 可知,存在整数 $r$,使

$$p\mid a_i,\quad i<r,\text{且 } p\nmid a_r,\quad 0\leqslant r\leqslant n.$$

由 ② 可知,存在整数 $s$,使

$$p\mid b_j,\quad j<s,\text{且 } p\nmid b_s,\quad 0\leqslant s\leqslant m.$$

于是

$$c_{r+s}=\sum_{i=0}^{n}a_i\,b_{r+s-i}$$
$$=\sum_{i=0}^{r-1}a_i\,b_{r+s-i}+a_rb_s+\sum_{j=0}^{s-1}a_{r+s-j}b_j.$$

由此可得

$$p\nmid c_{r+s}.$$

由 $p$ 的任意性可知

$$(c_0,c_1,\cdots,c_{m+n})=1,$$

即 $f(x)\cdot g(x)$ 也是本原多项式.

6·39　求三个正整数 $a,b,c$ 使

(1)$a<b<c$;

(2) 它们两两互素;

(3) 任两数之和必是第三个数的倍数.

证明你要找到的三个数是惟一的一组,其他任何三个数都不能同时满足上述三个条件.

(中国江苏省南京市数学竞赛,1963 年)

**[解]**　由条件(1)　　$a+b<2c$,

由条件(3) $a+b=kc$($k$ 是正整数).

于是 $kc<2c,\quad k<2,\quad k=1.$

所以 $a+b=c.$

又由条件(3) $a+c=mb$($m$ 是正整数).

即 $2a+b=mb,$

$$2a=(m-1)b,$$

即 $b$ 整除 $2a$,又 $(a,b)=1$,

所以 $b$ 整除 2.

因而 $b=1$ 或 2.

同理 $b+c=na,$

即 $2b+a=na,$

则 $a$ 整除 $2b$,因此 $a$ 整除 2.

于是 $a=1$ 或 2.

又由 $a<b$,则 $a=1,\quad b=2,\quad c=3.$

经验算,$a=1,\quad b=2,\quad c=3$ 是符合条件的惟一一组解.

6·40 证明如果 $b$ 是能被 $a^n$ 整除的自然数($a$ 和 $n$ 也是自然数),那么 $(a+1)^b-1$ 能被 $a^{n+1}$ 整除.

(匈牙利数学奥林匹克,1932 年)

[证 1] 用牛顿二项式展开

$$(a+1)^b-1=\sum_{k=1}^{b}C_b^k a^k.$$

下面我们证明

$$a^{n+1}\mid C_b^k a^k\quad (k=1,2,\cdots,b).$$

由于

$$kC_b^k=bC_{b-1}^{k-1}.$$

则 $$b\mid kC_b^k. \qquad ①$$

设 $d$ 是 $b$ 和 $k$ 的最大公约数,则

$$\left(\frac{b}{d},\frac{k}{d}\right)=1.$$

由 ① 式有 $$\frac{b}{d}\mid\frac{k}{d}C_b^k.$$

于是 $$\frac{b}{d}\mid C_b^k.$$

为证明 $a^{n+1} \mid C_b^k a^k$，只需证 $a^{n+1} \mid \frac{a^k b}{d}$.

事实上，因为 $d \leqslant k$，则 $d$ 小于任何一个素数的 $k$ 次幂.

假设 $p$ 是 $a$ 的标准分解式中的某一个素因子，则有 $d \leqslant p^{k-1}$.

设 $p$ 在 $a$ 的标准分解式中的指数为 $\alpha$.

因为 $a^n \mid b$，则 $p$ 在 $b$ 的标准分解式中的指数不小于 $n\alpha$，从而在 $\frac{b}{d}$ 的标准分解式中，$p$ 的指数 $\beta$ 满足 $\beta \geqslant n\alpha-(k-1) \geqslant (n-k+1)\alpha$.

从而在 $\frac{a^k b}{d}$ 的标准分解式中，$p$ 的指数 $\gamma$ 满足

$$\gamma \geqslant k\alpha+(n-k+1)\alpha=(n+1)\alpha.$$

而 $a^{n+1}$ 的标准分解式中，$p$ 的指数为 $(n+1)\alpha$. 于是必有

$$a^{n+1} \mid \frac{a^k b}{d}.$$

从而有
$$a^{n+1} \mid C_b^k a^k.$$

即
$$a^{n+1} \mid \sum_{k=1}^{b} C_b^k a^k.$$

于是
$$a^{n+1} \mid (a+1)^b-1.$$

**[证 2]** 对 $n$ 用数学归纳法.

(1) $n=0$ 时，由 $a^0 \mid b$，可知 $b$ 是任意自然数，而

$$(a+1)^b-1=\sum_{k=1}^{b} C_b^k a^k,$$

显然能被 $a^{0+1}=a$ 整除.

假设 $n=k$ 时，命题成立，即

如果 $a^k \mid b$，则 $a^{k+1} \mid (a+1)^b-1$.

假设 $b'$ 是能被 $a^{k+1}$ 整除的数，则 $a^k \mid \frac{b'}{a}$.

令 $\frac{b'}{a}=b$，则 $a^k \mid b$.

$$\begin{aligned}
&(a+1)^{b'}-1\\
=&(a+1)^{ab}-1\\
=&[(a+1)^b]^a-1\\
=&[(a+1)^b-1][(a+1)^{(a-1)b}+(a+1)^{(a-2)b}+\cdots+(a+1)^b\\
&+1]
\end{aligned}$$

由归纳假设 $a^{k+1} \mid (a+1)^b - 1$.

而上式中的第二个方括号中有 $a$ 个被加项,把它表示为

$[(a+1)^{(a-1)b} - 1] + [(a+1)^{(a-2)b} - 1] + \cdots + [(a+1)^b - 1] + a$.

由(1),即 $n = 0$ 时命题成立的结论,上式每一项都能被 $a$ 整除,因而

$$a \mid [(a+1)^{(a-1)b} + (a+1)^{(a-2)b} + \cdots + 1].$$

从而有 $$a^{k+2} \mid (a+1)^{b'} - 1.$$

因此,当 $n = k+1$ 时,命题成立.

由以上,对非负整数 $n$,命题成立.

**6·41** 设整数 $k$ 不能被 5 整除.证明 $x^5 - x + k$ 不能写成两个次数较低的整系数多项式的乘积.

(加拿大数学奥林匹克训练题,1988 年)

**[证]** 对 $x^5 - x + k$ 的分解有两种可能:

$$x^5 - x + k = (x+a)(x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e),$$
$$x^5 - x + k = (x^2 + ax + b)(x^3 + cx^2 + dx + e).$$

上两式的字母系数都是整数.

对于第一种可能:

$-a$ 为 $x^5 - x + k$ 的根,所以有

$$-(a^5 - a) + k = 0.$$

由费马小定理, $5 \mid a^5 - a$.

从而 $k$ 能被 5 整除,与 $k$ 不能被 5 整除矛盾.

对于第二种可能:

比较等式两边同次项系数,得

$$a + c = 0,$$
$$ac + b + d = 0,$$
$$e + ad + bc = 0,$$
$$ae + bd = -1,$$
$$be = k.$$

由前三式得

$$c = -a, \quad d = a^2 - b, \quad e = 2ab - a^3.$$

代入后两式得

$$3a^2b + 1 = a^4 + b^2,$$

$$ab(2b-a^2)=k.$$

于是有

$$\begin{aligned}k&=2a(3a^2b+1-a^4)-a^3b\\&=-2(a^5-a)+5a^3b.\end{aligned}$$

仍由费马小定理,$5\mid a^5-a$,从而 $k$ 能被 5 整除,与 $k$ 不能被 5 整除矛盾.

所以在 $k$ 不能被 5 整除时,$x^5-x+k$ 不能分解成两个次数较低的整系数多项式的积.

6·42　证明当素数 $p\geqslant 7$ 时,$p^4-1$ 能被 240 整除.

（第 51 届莫斯科数学奥林匹克,1988 年）

［证］　由素数 $p\geqslant 7$ 知,$p$ 是奇数,因而 $p-1$,　$p+1$,　$p^2+1$ 均为偶数,且 $p-1$ 和 $p+1$ 是相邻偶数,于是

$(p-1)(p+1)(p^2+1)=p^4-1$ 能被 $2\cdot 2\cdot 4=16$ 整除.

又由费马小定理,$(p,3)=1$,　$(p,5)=1$,

则
$$3\mid p^2-1,\quad 5\mid p^4-1.$$

因为 16,3 和 5 两两互素,则

$$16\cdot 3\cdot 5\mid p^4-1,$$

即
$$240\mid p^4-1.$$

6·43　设 $k\geqslant 2$,$n_1,n_2,\cdots,n_k$ 为自然数,满足

$n_2\mid 2^{n_1}-1,\quad n_3\mid 2^{n_2}-1,\quad \cdots,\quad n_k\mid 2^{n_{k-1}}-1,\quad n_1\mid 2^{n_k}-1.$

证明 $n_1=n_2=\cdots=n_k=1$.

（第 26 届国际数学奥林匹克候选题,1985 年）

［证］　设 $p$ 为素数,由费马小定理知

$$2^{p-1}\equiv 1\pmod p.$$

设 $n$ 与 $p-1$ 的最大公约数为 $d$.

如果 $n>1$,且

$$2^n\equiv 1\pmod p.$$

则
$$2^d\equiv 1\pmod p.$$

从而 $n$ 的最小素因数 $m(n)\leqslant d\leqslant p-1<p$.

假设结论不成立,即 $n_1,n_2,\cdots,n_k$ 中有大于 1 的,如 $n_1>1$,那么 $n_k>1$,　$n_{k-1}>1,\cdots,n_2>1$.

由于 $n_2 \mid 2^{n_1}-1$,则

$$m(n_2) \mid 2^{n_1}-1.$$

从而有 $$m(n_2) > m(n_1).$$

同理有 $$m(n_2) < m(n_3) < \cdots < m(n_1).$$

出现矛盾.

所以 $$n_1 = n_2 = \cdots = n_k = 1.$$

**6·44** 对素数 $p \geqslant 3$,定义

$$F(p) = \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} k^{120}, \quad f(p) = \frac{1}{2} - \left\{\frac{F(p)}{p}\right\},$$

这里$\{x\} = x - [x]$表示 $x$ 的小数部分.求 $f(p)$ 的值.

(中国国家集训队选拔试题,1993 年)

**[解]** 作 120 除以 $p-1$ 的带余除法:

$$120 = q(p-1) + r, \quad 0 \leqslant r \leqslant p-2.$$

因为素数 $p \geqslant 3$,所以 $p$ 是奇数,由于 120 与 $p-1$ 是偶数,所以 $r$ 是偶数.

定义 $$G(p) = \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} k^r.$$

根据费马小定理,对于 $k = 1,2,\cdots,\frac{p-1}{2}$,有

$$k^{p-1} \equiv 1 \pmod p,$$

所以 $$F(p) \equiv G(p) \pmod p.$$

$$f(p) = \frac{1}{2} - \left\{\frac{F(p)}{p}\right\}$$
$$= \frac{1}{2} - \left\{\frac{G(p)}{p}\right\}.$$

以下分两种情况讨论.

情形 Ⅰ: $r = 0$.

此时有 $$G(p) = \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} k^0 = \frac{p-1}{2}.$$

$$f(p) = \frac{1}{2} - \left\{\frac{G(p)}{p}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{p-1}{2p}$$
$$=\frac{1}{2p}.$$

情形 Ⅱ： $r\neq 0$.

因为 $r$ 是偶数，所以对 mod $p$，有

$$G(p)=1^r+2^r+\cdots+\left(\frac{p-1}{2}\right)^r$$
$$\equiv(p-1)^r+(p-2)^r+\cdots+\left(p-\frac{p-1}{2}\right)^r$$
$$=(p-1)^r+(p-2)^r+\cdots+\left(\frac{p+1}{2}\right)^r \pmod p.$$
$$2G(p)=G(p)+G(p)$$
$$\equiv\sum_{i=1}^{p-1}i^r \pmod p.$$

又因为同余方程

$$x^r\equiv 1(\text{mod } p).$$

的互不同余的解不超过 $r$ 个，$0\leqslant r\leqslant p-2$，所以至少存在一个

$$a\in\{1,2,\cdots,p-1\}$$

使得

$$a^r\not\equiv 1 \pmod p.$$

我们有

$$2a^rG(p)=(1\cdot a)^r+(2\cdot a)^r+\cdots+((p-1)a)^r$$
$$\equiv 2G(p) \pmod p.$$

（这是因为 $1\cdot a,2\cdot a,\cdots,(p-1)a$ 对于 mod $p$ 两两不同余，构成了模 $p$ 的剩余系），于是

$$2(a^r-1)G(p)\equiv 0 \pmod p.$$

又由于 $\qquad 2(a^r-1)\not\equiv 0 \pmod p,$

所以有 $\qquad G(p)\equiv 0 \pmod p.$

此时有 $\qquad f(p)=\frac{1}{2}-\left\{\frac{G(p)}{p}\right\}=\frac{1}{2}.$

下面寻求属于情形 Ⅰ 的素数 $p\geqslant 3$，即满足 $p-1\mid 120$ 的素数 $p$

$\geqslant 3$. 这些素数是

$$3,5,7,11,13,31,41,61.$$

而其他素数属于情形 Ⅱ.

综上所述，本题的答案为

| $p$ | 3 | 5 | 7 | 11 | 13 | 31 | 41 | 61 | 其他奇素数 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(p)$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{14}$ | $\frac{1}{22}$ | $\frac{1}{26}$ | $\frac{1}{62}$ | $\frac{1}{82}$ | $\frac{1}{122}$ | $\frac{1}{2}$ |

6·45　以 $\varphi(n)$ 表示与自然数 $n$ 互质且小于 $n$ 的自然数的个数.

(1) $p,q$ 是两相异的质数. 证明

$$\varphi(pq)=(p-1)(q-1).$$

(2) 利用(1)的结论，求满足 $\varphi(pq)=3p+q$ 时的 $p,q$ 之值.

（中国安徽省安庆市初中数学联赛，1991 年）

［解］ (1) 因为 $p,q$ 是两互异的质数，则小于 $pq$ 且与 $pq$ 互质的自然数，既不能被 $p$ 整除，又不能被 $q$ 整除.

而从 1 到 $pq-1$ 的 $pq-1$ 个自然数中，能被 $p$ 整除的有 $q-1$ 个，能被 $q$ 整除的有 $p-1$ 个数.

$\varphi(pq)=pq-1-(p-1)-(q-1)=(p-1)(q-1)$.

(2) 由(1)有

$$(p-1)(q-1)=3p+q,$$

$$pq-4p-2q+1=0,$$

$$(p-2)(q-4)=7.$$

$$\begin{cases}p-2=1,\\q-4=7,\end{cases}\qquad\begin{cases}p-2=7,\\q-4=1,\end{cases}$$

$$\begin{cases}p-2=-1,\\q-4=-7,\end{cases}\qquad\begin{cases}p-2=-7,\\q-4=-1.\end{cases}$$

解得 $p=3,\quad q=11$.

6·46　求证恰存在一个整数数列 $a_1,a_2,\cdots$ 满足 $a_1=1,\quad a_2>1$，且 $a_{n+1}^3+1=a_na_{n+2}(n\geqslant 1)$.

（第 19 届奥地利数学竞赛，1988 年）

［证］ 由已知，

$$a_2^3+1=a_1a_3=a_3,$$

所以 $$a_2 \mid a_2a_4 = a_3^3 + 1,$$
即 $$a_2 \mid (a_2^3 + 1)^3 + 1 = a_2^9 + 3a_2^6 + 3a_2^3 + 2,$$
于是 $$a_2 \mid 2.$$
又由题设 $$a_2 > 1,$$
所以 $$a_2 = 2.$$
由此算出 $$a_3 = a_2^3 + 1 = 9.$$
$$a_4 = \frac{a_3^3 + 1}{a_2} = 365.$$

下面用数学归纳法证明：由 $a_1 = 1$， $a_2 = 2$ 及 $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}^3 + 1}{a_n}$ 定义的数列是正整数数列.

(1) $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 9, a_4 = 365$ 是正整数.

(2) 假设 $a_{n-4}, a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1}$ 是正整数，则

$$a_n = \frac{a_{n-1}^3 + 1}{a_{n-2}} = \frac{a_{n-3}^3(a_{n-1}^3 + 1)}{a_{n-3}^3 a_{n-2}} = \frac{(a_{n-1}a_{n-3})^3 + a_{n-3}^3}{a_{n-3}^3 a_{n-2}}.$$

记 $a = (a_{n-1}a_{n-3})^3 + a_{n-3}^3$，显然
$$a_{n-3}^3 \mid a.$$
又因为 $$a_{n-3}^3 + 1 = a_{n-2}a_{n-4},$$
所以 $$(a_{n-2}, a_{n-3}^3) = 1.$$
因此只要证明 $a_{n-2} \mid a$ 即可得 $a_n$ 是整数.

由于
$$\begin{aligned} a &= (a_{n-1}a_{n-3})^3 + a_{n-3}^3 \\ &= (a_{n-2}^3 + 1)^3 + a_{n-3}^3 \\ &= (a_{n-3}^3 + 1) + a_{n-2}^9 + 3a_{n-2}^6 + 3a_{n-2}^3 \\ &= a_{n-2}a_{n-4} + a_{n-2}^9 + 3a_{n-2}^6 + 3a_{n-2}^3 \\ &= a_{n-2}(a_{n-4} + a_{n-2}^8 + 3a_{n-2}^5 + 3a_{n-2}^2), \end{aligned}$$
所以 $$a_{n-2} \mid a.$$
于是 $a_n$ 是整数.

由(1),(2),对所有自然数 $n$,$a_n$ 都是整数.

6·47　试证对于数列$\{2^n-3\}$,　$n=2,3,4,\cdots$,至少有一个无穷子列存在,其中的项两两互素.

(第 13 届国际数学奥林匹克,1971 年)

[证]　设 $\varphi(m)$ 为欧拉函数,即 $\varphi(m)$ 表示小于所给正整数 $m$,且与 $m$ 互素的正整数的个数.

在大于 1 的自然数 $n$ 中,我们按如下方法选出一个无穷子列:

(1) 取 $n_0=3$,

取 $n_1=\varphi(2^{n_0}-3)=\varphi(5)=4$.

(2) 若 $n_k$ 已取出,则取

$$\begin{aligned}n_{k+1}&=\varphi(2^{n_0}-3)\varphi(2^{n_1}-3)\cdots\varphi(2^{n_k}-3)\\&=n_k\cdot\varphi(2^{n_k}-3).\ (k\geqslant 1)\end{aligned}$$

这样,我们给出了数列$\{2^n-3\}$的一个无穷子列 $2^{n_0}-3,2^{n_1}-3,2^{n_2}-3,\cdots$.

现在只要能够证明

$$(2^{n_{k+1}}-3,2^{n_i}-3)=1,$$

其中 $i=0,1,2,\cdots,k$.

那么这个无穷子列就符合题设要求.

为此要用到欧拉－费马定理:

若 $a$ 与 $m$ 互素,则

$$a^{\varphi(m)}\equiv 1\pmod m.$$

取 $a=2,m=2^n-3$　$(n=3,4,5,\cdots)$,则上式成立.

于是有　$2^{\varphi(2^{n_i}-3)}\equiv 1\pmod{(2^{n_i}-3)}$.

$$\begin{aligned}&2^{n_{k+1}}\\&=\left[2^{\varphi(2^{n_i}-3)}\right]^{\varphi(2^{n_0}-3)\varphi(2^{n_1}-3)\cdots\varphi(2^{n_{i-1}}-3)\varphi(2^{n_{i+1}}-3)\cdots\varphi(2^{n_k}-3)}\\&\equiv 1\pmod{(2^{n_i}-3)}.\end{aligned}$$

所以有　$2^{n_{k+1}}-3\equiv -2\pmod{(2^{n_i}-3)}$.

此时,若 $t$ 是 $2^{n_{k+1}}-3$ 和 $2^{n_i}-3$ 的一个公因子,则有 $t\mid 2$.

又因为 $2\nmid 2^{n_i}-3$,则 $t\neq 2$,即 $t=1$.

即证得　$(2^{n_{k+1}}-3,\ 2^{n_i}-3)=1,(i=0,1,2,\cdots,k)$,成立.

所以无穷子列$\{2^{n_i}-3\}(i=0,1,2,\cdots)$中的项两两互素.

**6·48** 序列$\{S_n\}$构造如下:$S_1=\{1,1\}$,$S_2=\{1,2,1\}$,$S_3=\{1,3,2,3,1\}$,一般地,若$S_k=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$,则$S_{k+1}=\{a_1,a_1+a_2,a_2,a_2+a_3,\cdots,a_{n-1}+a_n,a_n\}$.

在$S_{1988}$中有多少项等于1988?

(加拿大数学奥林匹克训练题,1988年)

**[解]** 记$\varphi(n)$为欧拉函数,即不超过$n$的,与$n$互素的自然数的个数.

容易看出$S_n$中每两个相邻的数互素,并且较大的数等于它左右两个相邻数的和.

下面用数学归纳法证明:在$n\geqslant 2$时,每一对不大于$n$的互素数$a>b$,在$S_2,S_3,\cdots,S_n$中恰有两次相邻.

由对称性,因为每个$S_t$中的数都关于2对称,则只须证明,$a$和$b$在2的左边恰有一次相邻.

$n=2$时,结论是显然的.

假设对$n-1$ $(n-1\geqslant 2)$结论成立.

只考虑2的左边.

若$a<n$,则$a,b$在$S_n$中不相邻.

否则,若$a,b$在$S_n$中相邻,由$S_n$的构造,则$a-b$与$b$均在$S_{n-1}$中并且相邻.由归纳假设,$a$和$b$在$S_2,\cdots,S_{n-1}$中相邻,从而$a-b,b$在$S_2,S_3,\cdots,S_{n-2}$中相邻.这样,$a-b$和$b$在$S_2,\cdots,S_{n-1}$中,在2的左边至少相邻两次,出现矛盾.

于是$a$和$b$在$S_2,\cdots,S_n$中与在$S_2,\cdots,S_{n-1}$中相邻的次数相同,均为一次.

若$a=n$,则由$n-b,b$在$S_2,\cdots,S_{n-1}$中仅相邻一次,所以$n,b$在$S_2,\cdots,S_n$中仅相邻一次.

于是对$n$,结论成立.

现在考虑$S_2,\cdots,S_n$(不限于2的左边)中那些首次出现的$n$.它们也就是$S_n$中$n$的个数,这些$n$的左邻与右邻$<n$(它们的和等于$n$),并且与$n$互素.

由上面的论证,$n$的左邻与右邻的个数为$2\varphi(n)$,所以$S_n$中$n$的个数为$\varphi(n)$.

本题的结果为：在 $S_{1988}$ 中，1988 的个数是

$$\varphi(1988)=\varphi(4)\varphi(7)\varphi(71)=840.$$

数论卷

**6·49** 设 $n$ 是大于 6 的整数，且 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 是所有小于 $n$ 且与 $n$ 互素的自然数，如果

$$a_2-a_1=a_3-a_2=\cdots=a_k-a_{k-1}>0,$$

求证 $n$ 或者是素数或者是 2 的某个正整数次幂.

（第 32 届国际数学奥林匹克，1991 年）

[证] 显然 $a_1=1$.

因为 $$(n-1,n)=1,$$

所以 $$a_k=n-1.$$

令 $d=a_2-a_1>0$.

(1) 当 $a_2=2$ 时，$d=1$.

从而 $a_i=i$，$a_k=k=n-1$.

由已知，$a_1=1$，$a_2=2$，$\cdots$，$a_k=k$ 是所有与 $n=k+1$ 互素的自然数，因而 $n$ 是素数.

(2) 当 $a_2=3$ 时，$d=2$.

此时 $a_3=5$，$a_4=7$，$\cdots$，从而 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 都是奇数，$n=k+1$ 是偶数.

因为 $n$ 与小于 $n$ 的奇数互素，所以 $n$ 是 2 的某个正整数次幂.

(3) 当 $a_2>3$ 时，首先 $a_2$ 不可能是合数.

若 $a_2$ 是合数，则 $a_2=pq$，$p>1$，$q>1$.

因为 $(a_2,n)=1$，则 $(pq,n)=1$，即有

$$(p,n)=1,\ (q,n)=1.$$

于是 $p,q$ 应为 $\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$ 中的两个元素，而 $p<a_2$，$q<a_2$，这是不可能的.

所以 $a_2$ 是不能整除 $n$ 的最小素数.

因为 $a_2>3$，所以 3 与 $n$ 不可能再互素，于是必有 $3\mid n$.

由于存在自然数 $m$，使得

$$n-1=a_k=1+md.$$

所以 $$n=2+md.$$

即有 $$3\nmid d.$$

因为 $a_2=1+d$，$3\nmid a_2$，所以 $3\nmid 1+d$.

于是 $d$ 满足 $\quad d \equiv 1 \pmod 3$.

所以有 $$3 \mid 1 + 2d.$$

如果 $1 + 2d < n$,则 $a_3 = 1 + 2d$,此时有

$$(a_3, n) \geqslant 3.$$

与$(a_3, n) = 1$矛盾.

如果 $1 + 2d \geqslant n$,则必有

$$n - 1 = 1 + d.$$

即小于 $n$ 且与 $n$ 互素的自然数只有 $a_1 = 1, a_2 = 1 + d$,即其个数 $\varphi(n) = 2$.

令 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_t^{\alpha_t}$,其中 $p_1 < p_2 < \cdots < p_t$,且是素数,$\alpha_i, i = 1, 2, \cdots, t$ 是自然数,则由欧拉函数性质可得

$$\varphi(n) = \prod_{i=1}^{t} p_i^{\alpha_i - 1}(p_i - 1),$$

由 $\varphi(n) = 2$ 可得 $n = 3$,或4,与 $a_2 > 3$ 矛盾.

综上所述,$n$ 是素数或是 2 的某个正整数次幂.

6·50　在 $n$!的十进制表示中,从个位数算起第一个非零数字记为 $a_n$,问是否存在自然数 $N$,使得 $a_{N+1}, a_{N+2}, a_{N+3}, \cdots$,是周期数列?

(第 32 届国际数学奥林匹克预选题,1991 年)

[解]　如果存在自然数 $N$,使得

$$a_{N+1}, a_{N+2}, \cdots$$

是周期数列.设其周期为 $T$,令

$$T = 2^{\alpha_1} \cdot 5^{\alpha_2} \cdot p.$$

其中 $\alpha_1, \alpha_2$ 为非负整数,且$(p, 10) = 1$.

取自然数 $m \geqslant \max\{\alpha_1, \alpha_2\}$,且 $10^m > N$.

取 $k = m + \varphi(p)$,其中 $\varphi(p)$ 表示$[1, p]$中与 $p$ 互素的整数的个数.

由欧拉定理可知

$$10^{\varphi(p)} - 1 \equiv 0 \pmod p.$$

所以有 $$10^m(10^{\varphi(p)} - 1) \equiv 0 \pmod T,$$

即 $$10^k \equiv 10^m \pmod T.$$

由于 $$(10^k)! = 10^k(10^k - 1)!,$$

从而由 $a_n$ 的定义可知

$$a_{10^k} = a_{10^k-1}.$$

显然 $10^k - 1 > N$,于是

$$a_{2\cdot 10^k-10^m} = a_{2\cdot 10^k-10^m-1}.$$

显然,$2 \cdot 10^k - 10^m$ 的第一个非零数字是 9,又

$$(2 \cdot 10^k - 10^m)! = (2 \cdot 10^k - 10^m)(2 \cdot 10^k - 10^m - 1)!,$$

所以
$$a_{2\cdot 10^k-10^m-1} = 5.$$

但这是不可能的.这是因为在 $n! = 2^{a_2} \cdot 3^{a_3} \cdot 5^{a_5} \cdots$ 的素因子分解中,满足

$$a_2 = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{n}{2^k}\right] \geqslant a_5 = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{n}{5^k}\right].$$

即 $n$!中 2 的最高指数不小于 5 的最高指数.

所以使 $a_{N+1}, a_{N+2}, \cdots$ 为周期数列的 $N$ 不存在.

6·51 试求所有的正整数 $n > 1$,使得 $\frac{2^n + 1}{n^2}$ 是整数.

(第 31 届国际数学奥林匹克,1990 年)

**[解]** 显然数 $n$ 为正奇数,于是我们只需考虑 $n \geqslant 3$ 且 $n$ 为奇数的情况.

设 $p$ 是 $n$ 的最小素因数,则 $p \geqslant 3$, $p \mid 2^n + 1$.

令 $i$ 是使 $p \mid 2^i + 1$ 成立的最小正整数,我们将证明 $1 \leqslant i < p - 1$.

若 $i \geqslant p - 1$,则可设

$$i = (p-1)t + r,\ 0 \leqslant r < p-1,\ r, t \in Z.$$

由费马小定理可知 $p \mid 2^{p-1} - 1$.

于是
$$2^r(2^{p-1})^t \equiv 2^r \pmod p,$$

$$2^i + 1 = (2^{p-1})^t \cdot 2^r + 1 \equiv 2^r + 1 \pmod p.$$

故由 $p \mid 2^i + 1$ 即知 $p \mid 2^r + 1$.

这与 $i$ 是使 $p \mid 2^i + 1$ 成立的最小正整数相矛盾.

于是
$$1 \leqslant i < p - 1.$$

令 $n = ia + r_1$, $0 \leqslant r_1 < i$,则

$$\begin{aligned}2^n + 1 &= 2^{ia+r_1} + 1 \\ &= (2^i + 1 - 1)^a \cdot 2^{r_1} + 1 \equiv (-1)^a 2^{r_1} + 1 \pmod p.\end{aligned}$$

由 $p \mid 2^n + 1$ 得 $p \mid (-1)^a 2^{r_1} + 1$.

若 $2\mid a$，即 $a$ 是偶数，则 $p\mid 2^{r_1}+1$，由 $r_1<i$，与 $i$ 的意义相矛盾．此时只有 $r_1=0$.

若 $2\nmid a$，则由 $p\mid -2^{r_1}+1$ 知 $p\mid 2^{r_1}-1$.

若 $r_1>0$，可令 $i=r_1+b$，$1\leqslant b<i$，于是由

$$2^i+1=(2^{r_1}-1)\cdot 2^b+2^b+1$$

得

$$p\mid 2^b+1.$$

这又与 $i$ 的意义相矛盾，此时也有 $r_1=0$.

于是 $n=ia$，即 $i\mid n$，但 $p$ 是 $n$ 的最小素因数，且 $1\leqslant i<p-1$，因而 $i=1$.

又由 $p\mid 2^i+1$ 可得 $p=3$.

于是可以把 $n$ 写成

$$n=3^m c,\ m\geqslant 1,\ (c,3)=1,\ 2\nmid c.$$

现在我们证明 $m=1$.

若 $m\geqslant 2$，则由

$$n^2\mid 2^n+1$$

可知

$$3^{2m}\mid 2^n+1.$$

于是由

$$2^n+1=(3-1)^n+1\equiv 3n-\sum_{k=2}^{2m-1}(-1)^k C_n^k 3^k\pmod{3^{2m}}.$$

$$3^{2m}\mid 3n-\sum_{k=2}^{2m-1}(-1)^k C_n^k 3^k. \qquad ①$$

设 $k!$ 的 3 的最高次幂为 $\alpha$，则

$$\alpha=\sum_{s=1}^{\infty}\left[\frac{k}{3^s}\right]<\sum_{s=1}^{\infty}\frac{k}{3^s}=\frac{\frac{k}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{k}{2}.$$

若 $3^k C_n^k$ 的 3 的最高次幂为 $\beta$，则当 $k\geqslant 2$ 时，有

$$\beta>k+m-\frac{k}{2}\geqslant m+1.$$

若 $\beta\geqslant m+2$，则 $3^{m+2}\mid 3^k C_n^k$.

注意到 $m\geqslant 2$，所以有　$2m\geqslant m+2$.

于是由 ① 知，　$3^{m+2}\mid 3n$.

进而　$3^{m+1}\mid n$.

这与$(c,3)=1$矛盾.从而证明了$m=1$,即

$$n=3c,\ (c,3)=1.$$

设$c>1$,而$q$是$c$的最小素因数,显然有$q\geqslant 5$,且$q\mid 2^n+1$.

类似地,令$j$为使$q\mid 2^j+1$成立的最小正整数,则必有

$$1\leqslant j<q-1.$$

进而又可证明$j\mid n$.

因而由素数$q$的定义及$j<q-1$可知

$$j\in\{1,3\}.$$

于是由$q\mid 2^j+1$得$q=3$,这与$q\geqslant 5$矛盾.

因而 $$c=1.$$

所以 $$n=3.$$

可以验证 $$3^2\mid 2^3+1.$$

于是,满足要求的正整数$n$只有$n=3$.

6·52 设$n$为大于1的整数,求证$2^n-1$不能被$n$整除.

(第33届美国普特南数学竞赛,1972年)

[证] 假定对于某个$n>1$的整数,使得$n\mid 2^n-1$.则$n$必为奇数.

设$p$为$n$的最小素因数($n$为素数时,$p=n$).

由欧拉定理可知

$$2^{\varphi(p)}=2^{p-1}\equiv 1\pmod p. \quad ①$$

令整数$q$满足不等式

$$0<n-(p-1)q<p-1,$$

则 $$q=\left[\frac{n}{p-1}\right].$$

对①应用同余式的性质可得

$$2^{q(p-1)}\equiv 1\pmod p \quad ②$$

又由$n\mid 2^n-1$得

$$2^n\equiv 1\pmod p. \quad ③$$

记$\lambda_1=n-(p-1)q$.

对②,③应用同余式性质可得

$$2^{\lambda_1}\equiv 1\pmod p. \quad ④$$

因为$0<\lambda_1<p-1$,所以

$$\lambda_1 \nmid p,$$

进而 $$\lambda_1 \nmid n.$$

令 $$n = q_1\lambda_1 + \lambda_2,$$

其中 $q_1$ 为整数,且 $0 < \lambda_2 < \lambda_1$,

由 ③,④ 应用同余式性质可得

$$2^{\lambda_2} \equiv 1 \pmod p.$$

依此类推,可求得一系列同余式

$$2^{\lambda_k} \equiv 1 \pmod p, k = 1,2,\cdots,t. \quad ⑤$$

其中 $\lambda_k$ 满足 $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_t > 0$.

由于$(n, p-1) = 1$,由无限递降的结果,最后必有 $\lambda_t = 1$.

这时 ⑤ 式化为 $2 \equiv 1 \pmod p$ 这是不可能的.

因此 $$n \nmid 2^n - 1.$$

6·53 求出所有小于10的正整数 $M$,使得5整除 $1989^M + M^{1989}$.

(中国国家集训队训练题,1990年)

[解] 考虑 mod 5.

$$1989^M \equiv (-1)^M \pmod 5.$$

若 $M = 5$,则

$$M^{1989} = 5^{1989} \equiv 0 \pmod 5,$$
$$1989^M = 1989^5 \equiv -1 \pmod 5,$$

则 $$5 \nmid 1989^M + M^{1989}.$$

于是 $$M \neq 5.$$

由费马小定理,5是素数,又 $M \neq 5$ 且 $1 \leqslant M \leqslant 9$,则$(5, M) = 1$,于是

$$M^{1989} \equiv M \pmod 5.$$

若 $M$ 为奇数,则 $$5 \mid M - 1,$$

因而 $$M = 1.$$

若 $M$ 为偶数,则 $$5 \mid M + 1,$$

因而 $$M = 4.$$

于是 $M = 1$ 或 $4$.

6·54 设 $g(n)$ 定义如下:$g(1) = 0, g(2) = 1$,

$$g(n+2) = g(n) + g(n+1) + 1 \quad (n \geqslant 1).$$

证明若 $n>5$ 为素数,则 $n\mid g(n)(g(n)+1)$.

（第29届国际数学奥林匹克候选题,1988年）

数论卷

[证] 令 $f(n)=g(n)+1$,则

$$f(1)=1,f(2)=2, \qquad ①$$

$$f(n+2)=f(n)+f(n+1). \qquad ②$$

则$\{f(n)\}$为斐波那契数列,由①,②可知

$$f(n)=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}} \qquad ③$$

当 $n$ 为大于5的素数时,由费马小定理

$$5^{n-1}\equiv 1 \pmod n.$$

因为 $n$ 为奇素数,则$\frac{n-1}{2}$为整数,于是

$$n\mid 5^{n-1}-1=(5^{\frac{n-1}{2}}+1)(5^{\frac{n-1}{2}}-1). \qquad ④$$

若 $n\mid(5^{\frac{n-1}{2}}+1)$,则由于 $0<j<n$ 时,

$$n\mid C_n^j.$$

$$\begin{aligned}2^nf(n)&=\frac{(\sqrt{5}+1)^{n+1}-(1-\sqrt{5})^{n+1}}{2\sqrt{5}}\\&=\frac{(\sqrt{5}+1)^n-(1-\sqrt{5})^n}{2}\\&\quad+\frac{(\sqrt{5}+1)^n+(1-\sqrt{5})^n}{2\sqrt{5}}\\&=\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}C_n^{2k}(\sqrt{5})^{2k}+\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}C_n^{2k+1}(\sqrt{5})^{2k}\\&\equiv 1+5^{\frac{n-1}{2}} \pmod n\\&\equiv 0 \pmod n.\end{aligned}$$

若 $n\nmid(5^{\frac{n-1}{2}}+1)$,则由④

$$n\mid(5^{\frac{n-1}{2}}-1).$$

所以有

$$\begin{aligned}2^n(f(n)-1)&\equiv 1+5^{\frac{n-1}{2}}-2^n\\&\equiv 2-2^n\end{aligned}$$

$$\equiv 0 \pmod n.$$

最后一步是因为由欧拉小定理

$$2^{n-1} \equiv 1 \pmod n,$$
$$2^n \equiv 2 \pmod n,$$
$$2^n - 2 \equiv 0 \pmod n.$$

由以上,总有 $n \mid 2^n f(n)(f(n)-1)$.

因为$(2,n)=1$,则 $n \mid f(n)(f(n)-1)$,即

$$n \mid g(n)(g(n)+1).$$

6·55　是否存在具有如下性质的集合 $M$:

(1) 集合 $M$ 由 1992 个自然数所构成;

(2) $M$ 中的任何元素以及其中任意个元素之和都具有 $m^k$ 的形式 $(m,k \in N,\ k \geq 2)$?

(第 33 届国际数学奥林匹克预选题,1992 年)

**[解 1]**　我们考察更一般的问题:

对于任何正整数 $n$,都存在由 $n$ 个自然数所构成的集合 $M_n$ 满足条件(2).

下面通过对 $n$ 归纳来证明这个命题.

命题对于 $n=2$ 是成立的.

例如可取 $M_2=\{9,16\}$.

假设对于 $k \geq 2$,集合

$$M_k=\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$$

满足条件(2).并假定其中元素的所有 $2^k-1$ 个不同的和数可以分别地表示为

$$S_1^{\alpha_1}, S_2^{\alpha_2}, \cdots, S_{2^k-1}^{\alpha_{2^k-1}}.$$

其中 $\alpha_i \geq 2,(i=1,2,\cdots,2^k-1)$.

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{2^k-1}$ 的最小公倍数是 $m$.

取 $2^k-1$ 个不同的质数 $p_i(i=1,2,\cdots,2^k-1)$,使得$(m,p_i)=1$,$i=1,2,\cdots,2^k-1$.(因为质数有无穷多个,这一点是可以做得到的).令

$$c_i=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{2^k-1} p_j,\quad i=1,2,\cdots,2^k-1.$$

则有$(mc_i, p_i) = 1$,再令

$$mc_ik_i + 1 = q_jp_i + r_j,\ j = 1,2,\cdots,p_i.$$
$$0 \leqslant r_j < p_i.$$

则所有的这些 $r_j$ 各不相同.

事实上,如果这些 $r_j$ 有些相同,例如

$$r_{j_1} = r_{j_2},\ 1 \leqslant j_1 < j_2 \leqslant p_i.$$

则有
$$p_i \mid [(mc_ik_2 + 1) - (mc_ik_1 + 1)].$$

即
$$p_i \mid mc_i(k_2 - k_1).$$

由$(mc_i, p_i) = 1$及$|k_2 - k_1| < p_i$可知,这是不可能的.

于是,所有的 $p_i$ 个 $r_j$ 各不相同,因此,在这些 $r_j$ 中必有一个为零,因而相应的数可被 $p_i$ 整除,设该数为 $mc_ik_i + 1$.

另一方面,由中国剩余定理(即孙子定理)可知,存在自然数 $x$,使得

$$\begin{cases} x \equiv k_1 \pmod{p_1}, \\ x \equiv k_2 \pmod{p_2}, \\ \cdots\cdots \\ x \equiv k_{2^k-1} \pmod{p_{2^k-1}}. \end{cases}$$

于是,由 $p_i \mid mc_ik_i + 1$ 得

$$p_i \mid mc_ix + 1,\ i = 1,2,\cdots,2^k - 1.$$

令
$$b = \prod_{i=1}^{2^k-1}(S_i^{\alpha_i} + 1)^{mc_ix}.$$

并以 $M_k$ 为基础构造集合 $M_{k+1}$:

$$M_{k+1} = \{a_1b, a_2b, \cdots, a_kb, b\}.$$

下面再证明 $M_{k+1}$ 满足条件(2).

考虑两种情形:

(i)$b$ 不参与求和.

这样的和均具有形式 $S_i^{\alpha_i}b$.

由于 $b$ 是一个自然数的 $m$ 次方幂,而 $m$ 是$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{2^k-1}$的最小公倍数,所以 $b$ 是某个自然数的$\alpha_i(i = 1,2,\cdots,2^k - 1)$次方幂.因此,所有这样的和数均符合要求,即满足条件(2).

(ii) $b$ 参与求和.

此时各和数均具有形式 $(S_i^{a_i}+1)b$.

该数的因数具有下列形式:

$$(S_i^{a_i}+1)^{mc_ix+1}, \text{对于 } i;$$

$$(S_j^{a_j}+1)^{mc_jx}, \text{对于所有 } j\neq i.$$

但是,由于 $p_i \mid mc_ix+1$,

$$p_i \mid mc_jx, \quad j\neq i.$$

因此,这种和数是自然数的 $p_i$ 次方幂.

因而,命题对 $n=k+1$ 成立.

于是,对所有大于或等于2的自然数 $n$,都存在由 $n$ 个自然数所构成的集合 $M_n$,满足条件(2).

**[解 2]** 本题的解答蕴涵在如下的引理中.

引理对于每个自然数 $n$,都存在自然数 $d$,使得数列 $d,2d,\cdots,nd$ 中的各数都具有形式

$$m^k(m,\quad k\in N,k\geqslant 2).$$

下面用数学归纳法证明这个引理.

$n=1$ 时,引理显然.

这时可取 $d=1$,于是

$$d=m^k,\quad (m=1,\quad k=2).$$

假设对于 $n$,已有相应的 $d$ 及

$$id=m_i^{k_i},$$

其中 $i=1,2,\cdots,n;\quad m_i,k_i\in N,\quad k_i\geqslant 2$.

设 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 的最小公倍数是 $k$,令

$$d'=d[(n+1)d]^k,$$

则有

$$\begin{aligned} id' &= id[(n+1)d]^k \\ &= m_i^{k_i}[(n+1)d]^k \\ &= \{m_i[(n+1)d]^{\frac{k}{k_i}}\}^{k_i},\quad i=1,2,\cdots,n. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(n+1)d' &= (n+1)d[(n+1)d]^k \\ &= [(n+1)d]^{k+1}.\end{aligned}$$

从而引理对 $n+1$ 成立.

即对所有自然数 $n$,引理成立.于是本题得证.



**6·56** 是否存在 1000000 个连续整数,使得每一个都含有二重的素因子,即都能被某个素数的平方所整除.

(第 15 届美国普特南数学竞赛,1955 年)

[**解 1**] 令 $p_1,p_2,\cdots,p_s$ 是 $s$ 个相异素数,由中国剩余定理,下列同余式组

$$x\equiv -1 \pmod{p_1^2},$$
$$x\equiv -2 \pmod{p_2^2},$$
$$\cdots\cdots$$
$$x\equiv -s \pmod{p_s^2}$$

存在一解,设此解为 $n$.

则 $s$ 个连续整数 $n+1,n+2,\cdots,n+s$ 每个都有一个二重素因子,即有

$$p_i^2 \mid n+i.$$

取 $s=1000000$,则可得到满足题目要求的 1000000 个连续整数.

[**解 2**] 我们用数学归纳法证明:

存在 $s$ 个连续的整数,使得每一个都含有二重素因子.

(1) 当 $s=1$ 时,只要取一个素数的平方即可,比如取 $4=2^2$,则 $s=1$ 时命题成立.

(2) 假设当 $s=k$ 时命题成立.

即有 $k$ 个连续整数

$$n+1,n+2,\cdots,n+k$$

它们分别含有二重的素因子 $p_1^2,p_2^2,\cdots,p_k^2$.

那么,任取一个与 $p_1,p_2,\cdots,p_k$ 都不同的素数 $p_{k+1}$,当 $t=1,2,\cdots,p_{k+1}^2$ 时,数

$$tp_1^2p_2^2\cdots p_k^2+n+k+1 \qquad ①$$

是 $p_{k+1}^2$ 个不同的数,这 $p_{k+1}^2$ 个数任两数之差是形如

$$\alpha p_1^2p_2^2\cdots p_k^2,\quad 1\leqslant\alpha\leqslant p_{k+1}^2-1,$$

的数,这些数不能被 $p_{k+1}^2$ 整除.

于是把 ① 中的数除以 $p_{k+1}^2$ 的余数两两不同,但是,除以 $p_{k+1}^2$ 的余数只有

$$0,1,2,\cdots,p_{k+1}^2-1$$

共 $p_{k+1}^2$ 个,所以,一定存在一个数 $t_0(1\leqslant t_0\leqslant p_{k+1}^2)$,使得

$$t_0p_1^2p_2^2\cdots p_k^2+n+k+1$$

能被 $p_{k+1}^2$ 整除,于是

$$t_0p_1^2p_2^2\cdots p_k^2+n+i,i=1,2,\cdots,k,k+1,$$

分别能被 $p_1^2,p_2^2,\cdots,p_k^2,p_{k+1}^2$ 整除.

从而命题对 $s=k+1$ 成立.

由(1),(2),对所有自然数 $s$,命题成立.

取 $s=1000000$ 即为本题.

6·57　设整数 $n$ 是两个三角数之和 $n=\dfrac{a^2+a}{2}+\dfrac{b^2+b}{2}$,试证可将 $4n+1$ 表示为两个平方数的和 $4n+1=x^2+y^2$,并且 $x$ 与 $y$ 可用 $a$ 与 $b$ 表示.反之,证明若 $4n+1=x^2+y^2$,则 $n$ 是两个三角数之和.(这里 $a,b,x,y$ 为整数)

(第 36 届美国普特南数学竞赛,1975 年)

**[解]**　由 $n=\dfrac{a^2+a}{2}+\dfrac{b^2+b}{2}$ 得

$$\begin{aligned}4n+1&=2a^2+2a+2b^2+2b+1\\&=a^2+b^2+1+2a+2b+2ab+a^2+b^2-2ab\\&=(a+b+1)^2+(a-b)^2.\end{aligned}$$

反之,令 $4n+1=x^2+y^2$,$x,y$ 为整数,则 $x$ 和 $y$ 一为奇数,一为偶数.

从而 $x+y-1$ 与 $x-y-1$ 均为偶数.

令　$a=\dfrac{x+y-1}{2},b=\dfrac{x-y-1}{2}$,则 $a$ 与 $b$ 均为整数.此时

$$\begin{aligned}&\frac{a^2+a}{2}+\frac{b^2+b}{2}\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{(x+y-1)^2}{4}+\frac{x+y-1}{2}+\frac{(x-y-1)^2}{4}+\frac{x-y-1}{2}\right]\\&=\frac{x^2+y^2-1}{4}\\&=\frac{4n+1-1}{4}\end{aligned}$$

$= n$.

即 $n$ 可表为两个三角数之和.



6·58　设 $F(x)$ 为整系数多项式,今知对任何整数 $n$,$F(n)$ 都可以被整数 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 之一整除.证明可以从这些整数中选出一个数来,使得对任何 $n$,$F(n)$ 都可以被它整除.

(列宁格勒数学奥林匹克,1990 年)

[证]　用反证法.

假定能找到整数 $x_1,x_2,\cdots,x_m$,使得对任何 $k = 1,2,\cdots,m$,函数值 $F(x_k)$ 都不是 $a_k$ 的倍数.

这就意味着,存在着整数 $d_k = p_k^{\alpha_k}$,使得 $a_k$ 可被$d_k$ 整除,但 $F(x_k)$ 却不能被 $d_k$ 整除.

如果在 $d_1,d_2,\cdots,d_m$ 中存在有同一个素数的方幂,则可仅留下其中幂次最低的,去掉那些幂次较高的,因为如果 $F(x)$ 不能被幂次最低者整除,那么当然就更不能被幂次更高的整除.

这样一来,可以得到一个两两互素的数组 $d_1,d_2,\cdots,d_s$,由中国剩余定理知,存在整数 $N$,使得

$$N \equiv x_k \pmod{d_k},k = 1,2,\cdots,s.$$

从而 $F(N)$ 不可被 $d_k$ 中任何一个整除,因此也不可被 $a_k$ 中的任何一个整除,与题意矛盾.

6·59　证明存在一个正整数 $k$,使得 $k \cdot 2^n + 1$ 对每一个正整数 $n$,均为合数.

(第 11 届美国数学奥林匹克,1982 年)

[证 1]　首先证明,对每一个正整数 $n$,它至少适合下列一组同余式中的一个同余式.(这样的一组同余式称为覆盖同余式).

$$n \equiv 1 \pmod 2, \qquad ①$$
$$n \equiv 1 \pmod 3, \qquad ②$$
$$n \equiv 2 \pmod 4, \qquad ③$$
$$n \equiv 4 \pmod 8, \qquad ④$$
$$n \equiv 0 \pmod{12}, \qquad ⑤$$
$$n \equiv 8 \pmod{24}. \qquad ⑥$$

事实上,如果 $n$ 为奇数,那么它适合 ①;如果 $n$ 为偶数,但不是4的倍数,那么它适合 ③;如果 $n$ 为4的倍数,但不是8的倍数,那么它适合

④;如果 $n$ 为8的倍数,设 $n=8m$,那么当 $m$ 是3的倍数时,$n$ 适合⑤,当 $m$ 除以3余1时,$n$ 适合6,当 $m$ 除以3余2时,$n$ 适合②.

于是 $n$ 至少适合同余式①-⑥中的一个同余式.

注意到

$$2^2\equiv 1 \pmod 3,\quad 2^3\equiv 1 \pmod 7,$$
$$2^4\equiv 1 \pmod 5,\quad 2^8\equiv 1 \pmod{17},$$
$$2^{12}\equiv 1 \pmod{13},\quad 2^{24}\equiv 1 \pmod{241}.$$

当 $n$ 适合同余式①时,即 $n=2m+1$,则

$$k\cdot 2^n+1=k\cdot 2^{2m+1}+1=2k\cdot 4^m+1\equiv 2k+1 \pmod 3.$$

同样,当 $n$ 适合②,③,④,⑤,⑥时,分别有

$$k\cdot 2^n+1\equiv 2k+1 \pmod 7,$$
$$k\cdot 2^n+1\equiv 4k+1 \pmod 5,$$
$$k\cdot 2^n+1\equiv 16k+1 \pmod{17},$$
$$k\cdot 2^n+1\equiv k+1 \pmod{13},$$
$$k\cdot 2^n+1\equiv 256k+1 \pmod{241}.$$

因此,只要 $k$ 适合下面的同余方程组:

$$2k+1\equiv 0 \pmod 3,$$
$$2k+1\equiv 0 \pmod 7,$$
$$4k+1\equiv 0 \pmod 5,$$
$$16k+1\equiv 0 \pmod{17},$$
$$k+1\equiv 0 \pmod{13},$$
$$256k+1\equiv 0 \pmod{241}.$$

则 $k\cdot 2^n+1$ 至少被3,7,5,17,13,241中的某一个整除,从而 $k\cdot 2^n+1$ 为合数.

注意,若 $k$ 满足

$$2k+1\equiv 0 \pmod 3.$$

则由 $2k+1=3m$ 知,$m$ 为奇数,设 $m=2t+1$,便有 $2k+1=6t+3$,$k=3t+1$,因而有

$$k\equiv 1 \pmod 3,$$

同理,可把上面的同余方程组化为下面等价的同余方程组

$$k\equiv 1 \pmod 3,$$
$$k\equiv 3 \pmod 7,$$

$$k \equiv 1 \pmod{5},$$
$$k \equiv 1 \pmod{17},$$
$$k \equiv -1 \pmod{13},$$
$$k \equiv 16 \pmod{241}.$$

根据中国剩余定理(即孙子定理):

设 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 两两互素,则同余方程组

$$x \equiv a_i \pmod{m_i}, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

一定有整数解.

由于 3,7,5,17,13,241 都是素数,则上述同余方程组一定有解,因而一定存在正整数 $k$,使 $k \cdot 2^n + 1$ 对每一个 $n$ 都是合数.

(具体地可以算出 $k = 1207426 + 5592405m$,其中 $m$ 为非负整数)

[**证 2**] 令 $b$ 是大于 1 的整数,且 $p$ 是 $2^b - 1$ 的一个素约数,从而

$$2^b \equiv 1 \pmod{p}. \qquad ①$$

令 $a$ 是满足 $0 \leqslant a < b$ 的任一整数,$k$ 是大于 $p$ 且满足同余式

$$k \equiv -2^{b-a} \pmod{p}. \qquad ②$$

的整数.

如果正整数 $n$ 满足

$$n \equiv a \pmod{b}. \qquad ③$$

即
$$n = a + bm, \quad 0 \leqslant a < b$$

那么,由 ①、② 和 ③ 可得

$$k \cdot 2^n \equiv -2^{b-a}2^{a+bm} = -2^{b(m+1)} \equiv -1 \pmod{p}.$$

因此,$k \cdot 2^n + 1$ 可被 $p$ 整除,由于它大于 $p$,所以它对满足 ③ 的所有 $n$,都是合数.

于是问题转化为

我们能否构造一个三元数组$(p_j, a_j, b_j)$,使之有下列性质:

(1)$p_j$ 是不同的素数;

(2)$b_j$ 是满足 $2^{b_j} \equiv 1 \pmod{p_j}$ 的正整数;

(3)$a_j$ 是满足 $0 \leqslant a_j < b_j$ 且对任一正整数 $n$,至少有一个同余式

$$n \equiv a_j \pmod{b_j}$$

成立.

如果上述问题能解决,我们就可以根据中国剩余定理,求得一个正

整数 $k$，它大于每一个素数 $p_j$，且满足

$$k \equiv -2^{b_j-a_j} \pmod{p_j}，对每一个 j.$$

此时，$k \cdot 2^n + 1$，对一切 $n$ 均为合数.

性质(3) 即证法 1 的覆盖同余式，因此利用证法 1 的结果，可以得到三元数组$(p_j, a_j, b_j)$：

| $b_j$ | 2 | 3 | 4 | 8 | 12 | 24 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_j$ | 1 | 1 | 2 | 4 | 0 | 8 |
| $p_j$ | 3 | 7 | 5 | 17 | 13 | 241 |

事实上，覆盖同余式不只一组，例如还可得到下面的三元数组$(p_j, a_j, b_j)$：

| $b_j$ | 2 | 3 | 4 | 8 | 12 | 24 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_j$ | 0 | 0 | 1 | 3 | 7 | 23 |
| $p_j$ | 3 | 7 | 5 | 17 | 13 | 241 |

6·60　$x$ 与 $y$ 是两个互素的正整数，且 $xy \neq 1$，$n$ 为正偶数. 证明 $x + y \nmid x^n + y^n$.

（日本数学奥林匹克，1992 年）

[证]　用数学归纳法.

由题设$(x, y) = 1$，则

$$(x + y, y) = 1,$$
$$(x + y, xy) = 1.$$

(1) 当 $n = 2$ 时，

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy.$$

因为 $xy \neq 1$，所以 $x + y > 2$，从而

$$x + y \nmid 2xy,$$

进而

$$x + y \nmid x^2 + y^2.$$

于是当 $n = 2$ 时，命题成立.

(2) 假设当 $n = 2k(k \in N)$ 时，命题成立，即

$$x + y \nmid x^{2k} + y^{2k}.$$

那么,当 $n=2k+2$ 时,由于

$$
\begin{aligned}
&x^{2k+2}+y^{2k+2}\\
&=(x+y)(x^{2k+1}+y^{2k+1})-xy(x^{2k}+y^{2k})
\end{aligned}
$$

而
$$(x+y,xy)=1,$$
$$x+y\nmid x^{2k}+y^{2k},$$
$$x+y\mid(x+y)(x^{2k+1}+y^{2k+1}),$$
$$x+y\nmid xy(x^{2k}+y^{2k}),$$

于是
$$x+y\nmid x^{2k+2}+y^{2k+2}.$$

即 $n=2k+2$ 时,命题成立.

由(1),(2),对所有正偶数 $n$,$x+y\nmid x^n+y^n$.

6·61　设 $a>1$ 是自然数.试求所有这样的数,它至少整除 $a_n=\sum_{k=0}^{n}a^k$,$n\in N$ 中的一个.

(前联邦德国数学奥林匹克,1977 年)

[解]　我们证明,所求的集合 $M$ 由所有的与数 $a$ 互素的数 $m\in N$ 组成,即

$$M=\{m\mid(m,a)=1,m\in N\}.$$

如果某个数 $m\in N$,且 $(m,a)=d>1$,

则必有 $m\notin M$.

事实上,对任意 $n\in N$,有

$$
\begin{aligned}
(a_n,a)&=\left(\sum_{k=0}^{n}a^k,a\right)\\
&=\left(1+a\sum_{k=0}^{n}a^k,a\right)\\
&=(1,a)\\
&=1.
\end{aligned}
$$

则 $a_n$ 不能被 $d$ 整除,因而 $a_n$ 不能被 $m$ 整除.

现设 $m>1$,且 $(m,a)=1$,在 $a_1,a_2,\cdots,a_m,a_{m+1}$ 中,一定存在两个数 $a_i$ 和 $a_j$,　$i>j$,使得

$$a_i\equiv a_j\pmod m.$$

于是 $a_i$ 与 $a_j$ 的差

$$m\mid a_i-a_j=\sum_{k=0}^{i}a^k-\sum_{k=0}^{j}a^k$$

$$=\sum_{k=j+1}^{i}a^k$$

$$=a^{j+1}\sum_{k=0}^{i-j-1}a^k.$$

由于$(a^{j+1},m)=1$,则

$$m\mid a_{i-j-1}=\sum_{k=0}^{i-j-1}a^k.$$

(因为 $m>1$,所以不可能有 $i-j-1=0$.)

因此 $$m\in M.$$

于是 $M$ 为所求之集合.

6·62 设 $f(n)\in N$ 是使和$\sum_{k=1}^{f(n)}k$ 能被$n$ 整除的最小数.证明当且仅当 $n=2^m$ 时 $f(n)=2n-1$,其中 $m\in Z^+$.

(美国纽约数学奥林匹克,1976 年)

[证] (1) 首先证明,如果 $n=2^m$,则 $f(n)=2n-1$.

事实上,和式

$$\sum_{k=1}^{2n-1}k=\frac{(2n-1)\cdot 2n}{2}$$
$$=(2^{m+1}-1)\cdot 2^m$$

能被 $n=2^m$ 整除.

我们再证明 $f(n)=2n-1$ 是使$\sum_{k=1}^{f(n)}$ 能被 $n$ 整除的最小数.

如果 $l\leqslant 2n-2$,则

$$\sum_{k=1}^{l}k=\frac{l(l+1)}{2}.$$

由于 $l$ 和$l+1$ 中有一个是奇数,而一个不超过$2n-1=2^{m+1}-1$,因而不能被 $2^{m+1}$ 整除,于是$\frac{l(l+1)}{2}$不能被$2^m=n$ 整除.即$2n-1=f(n)$是使$\sum_{k=1}^{f(n)}k$ 能被$n$ 整除的最小数.

(2) 设 $n$ 不是2的幂,则 $n=2^mp$,其中 $m\in Z^+$,$p$ 为大于1的奇数.我们证明,存在自然数 $l<2n-1$,使得 $2^{m+1}\mid l$,且 $p\mid l+1$,于是

$$\sum_{k=1}^{l} k = \frac{l(l+1)}{2}$$

能被 $2^m p = n$ 整除，因此 $f(n) < 2n - 1$.

因为$(2^{m+1}, p) = 1$，所以由中国剩余定理，存在 $l$，使得

$$l \equiv 0 \pmod{2^{m+1}},$$
$$l \equiv p - 1 \pmod{p},$$
$$0 < l \leqslant 2^{m+1} p = 2n.$$

实际上 $l$ 还满足更强的条件，即 $l < 2n - 1$.

否则，若 $l = 2n - 1 = 2^{m+1}p - 1$，则 $l$ 不能被 $2^{m+1}$ 整除，而若 $l = 2n = 2^{m+1}p$，则 $l + 1$ 不能被 $p$ 整除，因此有

$$l < 2n - 1.$$

**6·63** 设 $m$ 和 $n$ 是自然数，满足：对任意自然数 $n$，$11k - 1$ 与 $m$ 和 $11k - 1$ 与 $n$ 具有相同的最大公约数. 证明存在某个整数 $l$，使得 $m = 11^l n$.

（罗马尼亚数学奥林匹克，1978 年）

**[证]** 设 $m = 11^i p$，$n = 11^j q$，其中 $i$，$j$ 为非负整数，且 $11 \nmid p$，$11 \nmid q$.

为证明存在某个整数 $l$，使得 $m = 11^l n$，只需证明 $p = q$.

设 $p > q$（$p < q$ 的情形可仿此讨论）

因为$(p, 11) = 1$，所以由中国剩余定理，存在正整数 $a$，使得

$$a \equiv 0 \pmod{p},$$
$$a \equiv -1 \pmod{11},$$

于是

$$a = 11k - 1 \quad (k \in N).$$
$$(11k - 1, m) = (a, 11^i p) = p,$$
$$(11^k - 1, n) = (a, 11^j q) \leqslant q < p.$$

此时与已知条件$(11^k - 1, m) = (11^k - 1, n)$矛盾.

于是 $p = q$. 即 $m = 11^{i-j} n$.

**6·64** 设整数 $a, b, c, d$ 的最大公约数为 1，试问：$ad - bc$ 的任何素约数都是 $a$ 与 $c$ 的约数的必要且充分条件为，对每个整数 $n$，$an + b$ 与 $cn + d$ 都互素，对否？

（美国纽约数学奥林匹克，1975 年）

**[解]** 结论是正确的.

(1) 设 $ad-bc$ 的每个素约数都是 $a$ 和 $c$ 的约数，但存在某个整数 $n$，$an+b$ 与 $cn+d$ 不互素.

这时，$an+b$ 与 $cn+d$ 对某个 $n$，能被某个素数 $p$ 整除，于是由

$$\begin{aligned}&ad-bc\\&=a(cn+d)-c(an+b),\end{aligned}$$

$ad-bc$ 能被素数 $p$ 整除，所以 $a$ 与 $c$ 也能被 $p$ 整除. 因此

$$b=(an+b)-an,\quad d=(cn+d)-cn$$

也能被 $p$ 整除，从而 $a,b,c,d$ 的最大公约数不小于 $p$，与题设的 $a,b,c,d$ 的最大公约数等于 1 矛盾.

因此，对每个 $n$，$an+b$ 与 $cn+d$ 都互素.

(2) 设对某个整数 $n$，$an+b$ 与 $cn+d$ 互素，但对 $ad-bc$ 的某个素约数 $p$ 不是 $a$ 的约数，即

$$ad-bc\equiv 0\pmod p,$$
$$a\not\equiv 0\pmod p.$$

(对 $c\not\equiv 0\pmod p$ 可仿此讨论.)

则由中国剩余定理，存在整数 $n$，使得

$$an\equiv -b\pmod p.$$

即

$$an+b\equiv 0\pmod p.$$

$$\begin{aligned}&a(cn+d)\\&=c(an+b)+(ad-bc)\\&\equiv 0\pmod p.\end{aligned}$$

因为 $(a,p)=1$，所以

$$cn+d\equiv 0\pmod p.$$

此时 $(an+b,\ cn+d)\geqslant p>1$，出现矛盾.

6·65　设正整数 $a,b$，使 $15a+16b$ 和 $16a-15b$ 都是正整数的平方. 求这两个平方数中较小的数能够取到的最小值.

(第 37 届国际数学奥林匹克，1996 年)

[解]　设正整数 $a,b$ 满足 $15a+16b$ 和 $16a-15b$ 都是正整数的平方.

即　$15a+16b=r^2,\quad 16a-15b=s^2.$

这里 $r,s\in N$.

消去 $b$ 得　$15^2a+16^2a=15r^2+16s^2,$

即 $$481a=15r^2+16s^2. \qquad ①$$

消去 $a$ 得 $16^2b+15^2b=16r^2-15s^2$,

即 $$481b=15r^2-15s^2. \qquad ②$$

因此,$15r^2+16s^2$ 和 $16r^2-15s^2$ 都是 481 的倍数.

下面证明 $r,s$ 也都是 481 的倍数.

由 $481=13\times37$,所以只需证明 $r,s$ 都是 13 和 37 的倍数.

首先证明 $13|r,13|s$.用反证法.

假设 $13\nmid r,13\nmid s$.由于 $13|16r^2-15s^2$,

则 $$16r^2\equiv15s^2 \pmod{13}. \qquad ③$$

因为 $13\nmid r,13\nmid s$,且 13 是素数,则由 *Fermat* 小定理

$r^{12}\equiv1 \pmod{13}$, $s^{12}\equiv1 \pmod{13}$,

则③式化为 $$16r^2\cdot s^{10}\equiv15s^{12}\equiv15\equiv2 \pmod{13}, \qquad ④$$

又由 *Fermat* 小定理

$(16r^2\cdot s^{10})^6=(4rs^5)^{12}\equiv1 \pmod{13}$,

再由④式有 $2^6\equiv1 \pmod{13}$

事实上,$2^6=64\equiv-1 \pmod{13}$,

出现矛盾,于是 $13|r,13|s$.

再证 $37|r,37|s$.仍用反证法.

假定 $37\nmid r,37\nmid s$.

由于 $37|15r^2+16s^2$, $37|16r^2-15s^2$,

所以 $37|(16r^2-15s^2)-(15r^2+16s^2)$,

即 $37|r^2-31s^2$,

故 $r^2\equiv31s^2 \pmod{37}$.

又由 $s^{36}\equiv1 \pmod{37}$,

则 $r^2s^{34}\equiv31s^{36}\equiv31 \pmod{37}$.

而 $(r^2s^{34})^{18}=(rs^{17})^{36}\equiv1 \pmod{37}$,

即 $31^{18}\equiv1 \pmod{37}$.

然而,$31^{18}\equiv(31^2)^9\equiv((-6)^2)^9\equiv36^9\equiv(-1)^9\equiv-1 \pmod{37}$.

与前式矛盾,于是 $37|r,37|s$.

由以上可知 $481|r,481|s$.

于是完全平方数 $15a+16b$ 及 $16a-15b$ 均不小于 $481^2$.

另一方面,我们取 $a=481\times31, b=481$,则

$15a+16b=481^2, 16a-15b=481^2$.

因此,所求最小值为 $481^2$.

6·66　求出所有的有序正整数对$(m,n)$,使得$\frac{n^3+1}{mn-1}$是一个整数.

(第 36 届国际数学奥林匹克,1994 年)

[解]　由于$(mn-1,m^3)=1$,则 $mn-1\mid n^3+1$ 等价于 $mn-1\mid m^3(n^3+1)$. 显然有

$m^3(n^3+1)=(m^3n^3-1)+(m^3+1)$,

由于 $m^3n^3-1=(mn-1)(m^2n^2+mn+1)$,

于是　$mn-1\mid m^3n^3-1$,

因此又有　$mn-1\mid m^3+1$.

由此可知,$mn-1$ 整除 $n^3+1$ 等价于 $mn-1$ 整除 $m^3+1$.

如果 $m=n$,则　$\frac{n^3+1}{mn-1}=\frac{n^3+1}{n^2-1}=\frac{n^2-n+1}{n-1}=n+\frac{1}{n-1}$,

由题设可知,$\frac{1}{n-1}$必为整数. 于是 $n-1$ 可为 $\pm1$,由 $n$ 是正整数,则 $n=2$.

所以,$m=2, n=2$ 是一组解.

如果 $m\neq n$,不妨设 $m>n$.

如果 $n=1$,则　$\frac{n^3+1}{m-1}=\frac{2}{m-1}$,

从而由$\frac{2}{m-1}$是整数可得 $m=2$,或 $m=3$.

从而又有解$(m,n)=(2,1),(3,1)$.

由对称性又有$(m,n)=(1,2),(1,3)$.

如果 $n\geqslant2$,则　$n^3+1\equiv1 \pmod n$,且 $mn-1\equiv-1 \pmod n$.

因此,存在某个正整数 $k$,使得　$\frac{n^3+1}{mn-1}=kn-1$.

由于 $m>n$,则有 $kn-1=\frac{n^3+1}{mn-1}<\frac{n^3+1}{n^2-1}=n+\frac{1}{n-1}$,

所以有　$(k-1)n<1+\frac{1}{n-1}$.

由于 $n\geqslant 2$,则$\frac{1}{n-1}\leqslant 1$,从而只能有 $k=1$.

$$\frac{n^3+1}{mn-1}=kn-1=n-1.$$

即有 $n^3+1=(mn-1)(n-1)=mn^2-n-mn+1$,

化简为 $n^2=mn-1-m\quad m=\frac{n^2+1}{n-1}=n+1+\frac{2}{n-1}$.

由$\frac{2}{n-1}$为整数及 $n$ 为正整数得 $n=2$ 或 $n=3$.相应地都有 $m=5$.

此时有解$(m,n)=(5,2),(5,3)$,

对称地有$(m,n)=(2,5),(3,5)$.

综上有九组解$(m,n)=(2,2),(2,1),(3,1),(5,2),(5,3),(1,2),(1,3),(2,5),(3,5)$.

6·67 是否存在满足以下条件的3个大于1的自然数,其中每一个自然数的平方减1都能被其余的任何一个自然数整除?证明你的结论.

(第22届全俄数学奥林匹克,1996年)

**[解]** 不存在.下面用反证法证明.

假设存在三个大于1的自然数 $a,b,c$,不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$.

因为 $b\mid a^2-1$,所以$(a,b)=1$,

又由于 $a\mid c^2-1,b\mid c^2-1$.

则 $ab\mid c^2-1$.

从而 $c^2-1\geqslant ab$. ①

另一方面,由 $a\geqslant c,b\geqslant c$

则 $ab\geqslant c^2>c^2-1$, ②

①与②矛盾.

所以不存在符合条件的三个自然数.

6·68 一个摆动数是一个正整数,它的各位数字在十进制下,非零与零交替出现,个位数非零.确定所有正整数,它不能整除任何摆动数.

(第35届国际数学奥林匹克预选题,1994年)

**[解]** 如果正整数 $n$ 是10的倍数,那么 $n$ 的末位数是0,因此这样的 $n$ 不能整除任何摆动数.

如果正整数 $n$ 是 25 的倍数,则 $n$ 的末两位数是 25,50,75,00 因此,这样的 $n$ 不能整除任何摆动数.

下面证明上述这两种数是不能整除任何摆动数的所有的正整数.

我们首先考虑奇数 $m$,且 $m$ 不是 5 的倍数.这时有 $m$ 与 10 互素,即$(m,10)=1$.于是

$(10^k-1,10)=l,((10^k-1)m,10)=1.$

由 *Enler* 定理,存在一个正整数 $l$,使得

$$10^l\equiv1 \qquad (\bmod (10^k-1)m). \qquad ①$$

那么,对任何正整数 $t$,

$$10^{tl}\equiv1 \qquad (\bmod (10^k-1)m). \qquad ②$$

而 $10^{tl}-1=(10^t-1)(10^{t(l-1)}+10^{t(l-2)}+\cdots+10^t+1$

$=(10^t-1)x_t.$ ③

这里 $x_t=10^{t(l-1)}+10^{t(l-2)}+\cdots+10^t+1,$

令 $t=k$,则由②和③,$x_k$ 应当是 $m$ 的一个倍数.

特别地,$k=2$,即对 $x_2$,应是 $m$ 的一个倍数.

$$x_2=10^{2(l-1)}+10^{2(l-2)}+\cdots+10^2+1, \qquad ④$$

可见 $x_2$ 是一个摆动数.因此,对奇数 $m$,且 $m$ 不是 5 的倍数时,这种 $m$ 不是题目中所求的数.

下面考虑 $m$ 是 5 的倍数,但不是 25 的倍数的奇数 $m$.

这时 $m=5m_1$,$m_1$ 是奇数,且 $5\nmid m_1$.

由上面,存在摆动数 $x_2$,$x_2$ 是 $m_1$ 的倍数,于是 $5x_2$ 还是一个摆动数,而 $5x_2$ 与 $5m_1$ 的倍数,即 $5x_2$ 是 $m$ 的倍数.

由以上,当 $m$ 是奇数,且不是 25 的倍数时,不是题目中所要求的数.

现在考虑 $m$ 是 2 的幂的情况.我们用数学归纳法证明:对正整数 $t$,$2^{2t+1}$有一个摆动数 $w_t$,$w_t$ 为 $2^{2t+1}$的倍数,且 $w_t$ 的各位数字中,恰有 $t$ 个非零数字.

对 $t=1$,取 $w_1=8=2^3,2^3\mid w_1$.

对 $t=2$,取 $w_2=608,2^5\mid w_2$.

假设对 $t\geqslant2$,存在摆动数 $w_t$,设 $w_t=2^{2t+1}d$,其中 $d$ 是一个正整数.

那么,对 $t+1$,取 $w_{t+1}=10^{2t}c+w_t$.这里 $c$ 是一个待定的正整数,且 $c\in\{1,2,3,\cdots,9\}$.



由于 $w_t$ 是一个 $2t-1$ 位摆动数,则 $w_{t+1}$是一个 $2t+1$ 位摆动数,且恰有 $t+1$ 个非零数字.

$w_{t+1}=2^{2t+1}d+10^{2t}c=2^{2t}(2d+5^{2t}c)$.

这样,当且仅当 $8|5^{2t}c+2d$ 时,取 $c\equiv 6d \pmod 8$,
在$\{1,2,\cdots,8\}$中,这样的 $c$ 必存在,且 $c$ 为偶数,于是可记 $c=8s+6d$.

$$\begin{aligned}5^{2t}c+6d&=5^{2t}(8s+6d)+2d\\&=(8\times3+1)(8s+6d)+2d\\&\equiv 0\pmod 8\end{aligned}$$

从而 $\quad 2^{2t+3}|w_{t+1}$.

因此,2 的幂都有一个摆动数是它的倍数,所以;这样的数不是所要求的数.

最后考虑形如 $2^tm$ 的正整数,这里 $t$ 是一个正整数,$m$ 是一个不是 5 的倍数的奇数.

由前所证,存在一个摆动数 $w_t$,$w_t$ 是 $2t-1$ 位数,使得 $2^{2t+1}|w_t$,

在③式中,用 $2t$ 代替 $t$,并含 $k=2t$,就得到正整数 $x_{2t}$,则 $x_{2t}w_t$ 是 $2^tm$ 的倍数,且 $x_{2t}w_t$ 是一个摆动数.

综合以上,符合题目要求的 $n$,只有 $n$ 是 10 的倍数,或是 25 的倍数.

6·69 确定所有正整数 $n$,存在一个整数 $m$,使得 $2^n-1$ 是 $m^2+9$ 的一个因数.

(第 39 届国际数学奥林匹克预选题,1998 年)

**[解]** 我们证明所求的 $n=2^k$,$k$ 为非负整数.

首先证明 $n$ 没有奇因数.

假设 $n$ 有奇因数 $s$,则 $2^s-1$ 是 $2^n-1=(2^s)^{\frac{n}{s}}-1$ 的一个因数.

如果 $2^n-1$ 是 $m^2+9$ 的因数,则 $2^s-1$ 也是 $m^2+9$ 的因数

设 $s=2t+1$,则 $2^s-1=2\cdot4^t-1=2(3+1)^t-1$,

于是 $3\nmid 2^s-1$,则 $2^s-1\equiv-1\pmod 4$.

这样 $2^s-1$ 必有一个素约数 $p>3$,满足

$$p\equiv-1\pmod 4.$$

从而由 $p$ 是 $m^2+9$ 的因数可知

$$m^2\equiv -9 \pmod p, m^{p-1}\equiv -9^{\frac{p-1}{2}}=-3^{p-1} \pmod p.$$

若 $(m,p)=1$,由 $p>3$,则由上式有 $1\equiv -1 \pmod p$

若 $p\mid m$,则由上式有 $0\equiv -1 \pmod p$

上两情况都产生矛盾,故 $n$ 没有奇因子.

下面再证明:对 $n=2^k$,一定存在整数 $m$,使 $2^n-1$ 是 $m^2+9$ 的一个因数.

对 $2^n-1=2^{2^k}-1$ 进行分解:

$$\begin{aligned}2^n-1&=2^{2^k}-1=(2^{2^{k-1}}+1)(2^{2^{k-1}}-1)\\&=(2^{2^{k-1}}+1)(2^{2^{k-2}}+1)(2^{2^{k-2}}-1)\\&=\cdots\cdots\\&=(2^{2^{k-1}}+1)(2^{2^{k-2}}+1)\cdots(2^{2^k}+1)(2^2+1)(2+1)\end{aligned}$$

从而,同余方程 $x^2\equiv -1 \pmod{2^{2^k}+1}$ 有解

$$x\equiv 2^{2^{k-1}} \pmod{2^{2^k}+1}$$

而 $j>i$ 时,

$$\begin{aligned}(2^{2^i}+1,2^{2^j}+1)&=(2^{2^{i+1}}-1,2^{2^j}+1)\\&=\cdots=(2,2^{2j}+1)=1.\end{aligned}$$

根据中国剩余定理,同余方程组

$$x\equiv 2^{2^{h-1}} \pmod{2^{2^h}+1} h=1,2,\cdots,k-1$$

有解 $x_0$,令 $m=3x_0$,

则 $m^2+9=9(x_0^2+1)$ 被 $2^{2^k}-1$ 整除,即被 $2^m-1$ 整除.

**6·70** 设 $p>2$ 为素数,使得 $3\mid(p-2)$,记

$$S=\{y^2-x^3-1\mid x,y\in Z,0\leqslant n,y\leqslant p-1\}$$

证明 $S$ 中至多有 $p-1$ 个元素为 $p$ 的倍数.

(第 16 届巴尔干地区数学奥林匹克,1999 年)

[证] 先证明一个引论.

引证:设 $p>2$,$p$ 为素数,且 $p\equiv 2 \pmod 3$,则对任意整数 $m,n$,如果 $1\leqslant m<n\leqslant p-1$,则有 $m^3\not\equiv n^3 \pmod p$.

证明引理如下;

事实上,设 $p=3k+2$,即 $p-1=3k+1$,$k\in N$,又设 $m^3\not\equiv n^3$(mod

$p$).

设 $t$ 是满足同余式 $m^t \equiv n^t \pmod p$ 的最小正整数，

则易证对任意正整数 $r$，若 $m^r \equiv n^r \pmod p$，

则有 $t \mid r$，从而 $r \mid 3$.

另一方面，由 *Fermat* 小定理，

$m^{p-1} \equiv 1 \pmod p$，$n^{p-1} \equiv 1 \pmod p$，

则 $m^{3k+1} \equiv n^{3k+1} \pmod p$，

$\therefore$ $r \mid (3k+1)$，

而 $r \mid 3$，

则 $r = 1$，

这表明 $m = n \pmod p$ 与 $1 \leqslant m < n < p-1$ 矛盾.

从而引理得证.

下面证明本题.

由引理可知，当 $n$ 跑遍 $p$ 的一个完系时，$x^3$ 也跑遍模 $p$ 的一个完系. 从而，对 $0 \leqslant y \leqslant p-1$ 的每一个整数 $y$，都存在惟一的 $x \in \{0,1,\cdots,p-1\}$，使得

$$x^3 \equiv y^2 - 1 \pmod p$$

这表明，集合 $S$ 中至多只有 $p$ 个元素是 $p$ 的倍数.

注意到 $S$ 中，$0 = 1^2 - 0^3 - 1 = 3^2 - 2^3 - 1$ 被表示了二次，从而 $S$ 中至多只有 $p-1$ 个元素为 $p$ 的倍数.

6·71 确定所有的正整数对 $(n, p)$，满足：

$p$ 是一个素数，$n \leqslant 2p$，且 $(p-1)^n + 1$ 能够被 $n^{p-1}$ 整除.

（第 40 届国际数学奥林匹克，1999 年）

［解］ 当 $n = 1$ 时，由于 $(p-1)^n + 1 = p$，显然能被 $1^{p-1} = 1$ 整除，

于是 $(n, p) = (1, p)$ 是一组解.

当 $n = 2$ 时，由于 $(p-1)^2 + 1 = p^2 + 2p + 2$，若能被 $2^{p-1}$ 整除，必须 $p^2$ 为偶数，又 $p$ 是素数，于是 $p = 2$，

于是 $(n, p) = (2, 2)$ 是另一组解.

下面考虑 $n \geqslant 2$，$p \geqslant 3$ 的情形.

当素数 $p \geqslant 3$ 时，$(p-1)^n + 1$ 是奇数，若能被 $n^{p-1}$ 整除，则 $n$ 也是奇数，$n \neq 2p$，

从而，$n < 2p$.

记 $q$ 为 $n$ 的最小素因子,则由 $n^{p-1}|(p-1)^n+1$,

可知 $q|(p-1)^n+1,(p-1)^n\equiv -1 \pmod q$,

且 $(q,p-1)=1$.

由 $q$ 的选取可知 $(n,p-1)=1$,

于是存在整数 $u,v$,使得 $un+v(q-1)=1$.

由 Fermat 小定理,$q|(p-1)^{q-1}-1$,

于是 $p-1\equiv(p-1)^1=(p-1)^{un}\cdot(p-1)^{v(q-1)}$

$$\equiv(-1)^n\cdot 1^v \pmod q$$

由 $q-1$ 为偶数,$n$ 为奇数可知 $u$ 为奇数,

$\therefore$ $p-1\equiv -1 \pmod q$,

$p\equiv 0 \pmod q$,

这表明 $q|p$,进而有 $p|q$,

即证得 $q=p$.

于是可以得到 $p^{p-1}|(p-1)^p+1$

$=p^2(p^{p-2}-C_p^1p^{p-3}+\cdots+C_p^{p-3}p-C_p^{p-2}+1)$

上式中括号内,除最后一项是 1 之外,其余各项均能被 $p$ 整除.

从而 $p-1\leqslant 2$,即 $p=3$.此时 $n=3$,

所以$(n,p)=(3,3)$是一组解.

本题有三组解$(n,p)=(1,p),(2,2),(3,3)$.

# 第七章　奇数和偶数

7·1　证明不存在整数 $a,b,c,d$ 满足下列等式

$$\begin{cases} abcd - a = 1961, \\ abcd - b = 961, \\ abcd - c = 61, \\ abcd - d = 1. \end{cases}$$

(第 24 届莫斯科数学奥林匹克,1961 年)

[证]　由 $a(bcd-1)=1961$ 以及 1961 是奇数可知 $a$ 是奇数.

同理,由第 2,3,4 个等式可知 $b,c,d$ 也都是奇数.

于是,乘积 $abcd$ 为奇数.

从而　$abcd-a$ 为偶数,不可能等于 1961.

因此,不存在满足题设要求的整数 $a,b,c,d$.

7·2　别佳在商店里使用计算机,需按下述标准交费:每给一次所输入的数乘3要交5戈比,而每给任何数加4要交2戈比,但在计算机中输入1是免费的.别佳希望从1开始算到1981为止能花费最少的钱,试问,他需要多少钱才够花费?而如果他想算到1982为止呢?

(第 45 届莫斯科数学奥林匹克,1982 年)

[解]　(1) 我们采取逆运算,即从 1981 起进行减 4 和除以 3 的运算.在数比较大的时候,显然用除以 3 的运算更能省钱.

由于 1981 不能被 3 整除,则先减 4,以下运算为

$$1981 \xrightarrow{-4} 1977 \xrightarrow{\div 3} 659 \xrightarrow{-4} 655 \xrightarrow{-4} 651 \xrightarrow{\div 3} 217 \xrightarrow{-4} 213 \xrightarrow{\div 3} 71 \xrightarrow{-4} 67 \xrightarrow{-4} 63 \xrightarrow{\div 3} 21.$$

从 1 到 21 有两种途径:

第一种：$1\xrightarrow{\times 3}3\xrightarrow{+4}7\xrightarrow{\times 3}21$.

这要花费 $2\cdot 5+2=12$ 戈比.

第二种：$1\xrightarrow{+4}5\xrightarrow{+4}9\xrightarrow{+4}13\xrightarrow{+4}17\xrightarrow{+4}21$.

这要花费 $2\cdot 5=10$ 戈比.

显然第二种途径较省钱.

于是从 1 到 1981 的运算途径为

$$1\xrightarrow{+4}5\xrightarrow{+4}9\xrightarrow{+4}13\xrightarrow{+4}17\xrightarrow{+4}21\xrightarrow{\times 3}63\xrightarrow{+4}67\xrightarrow{+4}71\xrightarrow{\times 3}213\xrightarrow{+4}217\xrightarrow{\times 3}651\xrightarrow{+4}655$$
$$\xrightarrow{+4}659\xrightarrow{\times 3}1977\xrightarrow{+4}1981.$$

共花费 $11\cdot 2+4\cdot 5=42$ 戈比.

(2) 由于数的一系列运算是

$$a_0=1,a_1,a_2,\cdots,a_{k-1},a_k,\cdots,a_n.$$

其中 $$a_k=3a_{k-1},\quad a_k=a_{k-1}+4.$$

由于当 $a_{k-1}$ 是奇数时，$3a_{k-1}$ 和 $a_{k-1}+4$ 都是奇数，从而 $a_k$ 是奇数.

因为 $a_0=1$ 是奇数，则所有的 $a_i(i=1,2,\cdots)$ 都是奇数，因此不可能得到 1982.

7·3　桌子上有一堆石子共1001粒.第一步从中扔去一粒石子，并将余下的石子分成两堆.以后的每一步，都从某个石子数目多于 1 的堆中扔去一粒，再把某一堆分作两堆.试问，能否在若干步之后，桌上的每一堆中都刚好有 3 粒石子?

（列宁格勒数学奥林匹克，1988 年）

[解]　不可能.

如果最后在桌子上有 $n$ 堆石子，且每堆石子刚好有 3 颗.

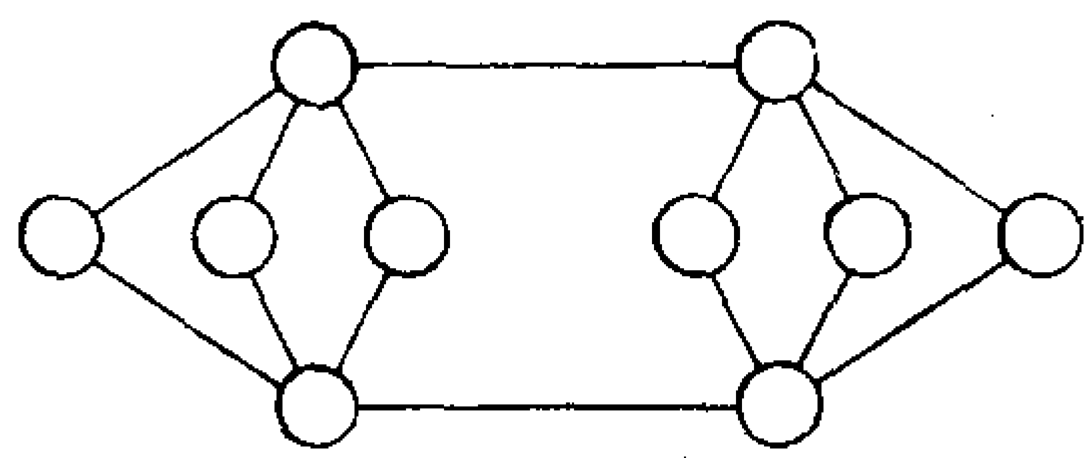
那么，在此之前一共进行了 $n-1$ 次操作(开始时只有一堆石子，每操作一次，多分出一堆，所以操作 $n-1$ 次共分成 $n$ 堆).由于每操作一次，都扔去一粒石子，所以一共扔去 $n-1$ 粒石子，因此有

$$3n+(n-1)=1001,$$
$$4n=1002,$$
$$2n=501.$$

然而奇数不可能等于偶数，出现矛盾.

7·4　从数集{0,1,2,…,13,14}中选出不同的数，填入下图中的

10个小圆内,使得由线段相连接的两个相邻的小圆内的数之差的绝对值均不相同,这是可能的吗?请证明你的结论.



(第23届加拿大数学竞赛,1991年)

**[解1]** 如果题设的要求能够实现,那么两相邻小圆内的数的差的绝对值(共14个)必须是

$$1,2,3,\cdots,13,14.$$

它们的和为105,是一个奇数.

又记填入这些小圆内的数为$x_i(i=1,2,\cdots,10)$.若$x_i$与$x_j$有线段相连,则

$$105=\sum_{i\neq j}|x_i-x_j|.$$

其中每个$x_i$计算的次数与连接线段数相同,注意到每个小圆的连接线段数为偶数,因此在和式中具有$x_i$的项数为偶数,这与总和为奇数相矛盾.

这说明,题设的要求不能实现.

**[解2]** 假设按题目要求已将数填入各小圆中,我们不难发现有一条由线段连接成的封闭路径,它包含每个线段且只有一次.

当沿此路径一笔画地前进,并观察所遇到的每个圆内的数的奇偶性,因为封闭路径的终点即是出发点,所以奇偶性必须改变偶数次.

但是在差的绝对值1,2,3,…,13,14中的每个数恰只出现一次,而且其中有7个奇数,所以奇偶性改变偶数次是不可能的.

因此,题设的要求不可能做到.

7·5 某电影院共有1985个座位.某天,这家电影院上、下午各演一场电影.看电影的是甲、乙两所中学的各1985名学生(同一个学校的学生有的看上午场,也有的看下午场).

试证明电影院一定有这样的座位,这天看电影时,上、下午在这个座位上坐的是两个不同学校的学生.

（中国北京市初中二年级数学竞赛，1985 年）

［证］ 设甲校上午场有 $n$ 个学生，则乙校上午场一定有 $(1985-n)$ 个学生．

此时，甲校上午共占 $n$ 个座位，乙校上午共占 $(1985-n)$ 个座位，到了下午场，甲校应占 $(1985-n)$ 个座位，乙校应占 $n$ 个座位．

假设每个座位上、下午场坐的都是同一学校的学生，则每个学校上午占的座位与下午占的座位必相等，即

$$n = 1985 - n,$$

$$1985 = 2n.$$

这显然是不可能的．

因此，至少存在这样一个座位，上、下午坐的是甲、乙不同学校的学生．

7·6 证明在空间中不可能有这样的多面体存在，它们有奇数个面，而它们的每个面又都有奇数条边．

（中国北京市高中数学竞赛，1956 年）

［证］ 设这个多面体有 $n$ 个面，$n$ 是奇数．

又设每个面的边数为

$$s_1, s_2, \cdots, s_n.$$

其中 $s_i(i=1,2,\cdots,n)$ 都为奇数．

因为每边都是两个面公用的，则这个多面体的总棱数为

$$s = \frac{s_1+s_2+\cdots+s_n}{2}.$$

由于奇数个奇数 $s_i$ 的和是奇数，则 $\frac{s_1+s_2+\cdots+s_n}{2}$ 不可能是整数，这是不可能的．

因此，符合题目要求的多面体不存在．

7·7 在黑板上记上数 1，2，3，…，1974．允许擦去任意两个数，且写上它们的和或差，重复这样的操作手续，直至在黑板上留下一个数为止．求证这个数不可能为零．

（基辅数学奥林匹克，1974 年）

［证］ 考虑黑板上保留奇数的个数．

经过一次操作，如果是一个奇数和一个偶数，则由奇数与偶数的和

与差为奇数，于是擦去一个奇数和一个偶数得到一个奇数. 此时，奇数的个数保持不变.



如果是两个奇数，则由奇数与奇数的和与差为偶数，于是擦去两个奇数得到一个偶数，同样擦去两个偶数得到一个偶数，此时，奇数的个数减少 2 个或保持不变.

由以上，经过操作，黑板上奇数的个数的奇偶性不变.

由于一开始黑板上共有$\frac{1974}{2}=987$个奇数，即有奇数个奇数，所以经过若干次操作后，黑板上必须保留奇数个奇数，因而不可能为 0.

7·8　设 $m,n,p,q$ 为非负整数，且对一切 $x>0$，

$$\frac{(x+1)^m}{x^n}-1=\frac{(x+1)^p}{x^q}$$

恒成立，求$(m^2+2n+p)^{2q}$的值.

（中国初中数学联赛，1991 年）

［解］　由于

$$\frac{(x+1)^m}{x^n}-1=\frac{(x+1)^p}{x^q} \qquad ①$$

对一切 $x>0$ 都成立，因此可取 $x=1$，得

$$2^m-1=2^p.$$

因为 $m$ 和 $p$ 均为非负整数，则 $2^m-1$ 为正奇数，从而只能有 $2^p=1, p=0$.

于是　$$2^m-1=1, m=1.$$

再对 ① 式中的 $x$ 取 $x=2$，并注意到，$m=1, p=0$，则有

$$\frac{3}{2^n}-1=\frac{1}{2^q}.$$

$$3\cdot 2^q-2^{n+q}=2^n.$$

$$3=2^{n-q}+2^n.$$

若 $n>q$，则上式左边为奇数，右边为偶数，不可能成立；

若 $n<q$，则上式左边为整数，右边为分数，不可能成立；

于是，只有 $n=q$. 即 $3=2^0+2^n$ 从而

$$n=1, q=1.$$

所以　$(m^2+2n+p)^{2q}=(1+2+0)^2=9.$

7·9　设 $x$ 为一个 1978 位数，$y$ 为 $x$ 的各位数码重新排列后得到

的数.等式

$$x+y=\underbrace{99\cdots9}_{1978个}$$

有可能成立吗?如果将 1978 改变为 1977,那么回答改变吗?

（基辅数学奥林匹克,1978 年）

**[解]** 满足条件的 1978 位数是存在的.例如

$$x=\underbrace{4545\cdots45}_{1978位},\quad y=\underbrace{5454\cdots54}_{1978位}$$

则
$$x+y=\underbrace{99\cdots9}_{1978位}.$$

下面证明:满足条件的 1977 位数是不存在的,为此设

$$x=\overline{a_1a_2\cdots a_{1977}}$$

其中 $a_i\in\{0,1,2,\cdots,9\}$, $i=1,2,\cdots,1977$.

又设 $y=\overline{b_1b_2\cdots b_{1977}}$,其中$(b_1,b_2,\cdots,b_{1977})$是$(a_1,a_2,\cdots,a_{1977})$的某个排列.

由等式
$$x+y=\underbrace{99\cdots9}_{1977位}$$

可以推出 $a_{1977}+b_{1977}=9,a_{1976}+b_{1976}=9,\cdots,a_1+b_1=9$.

则
$$\begin{aligned}S&=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots+(a_{1977}+b_{1977})\\&=(a_1+a_2+\cdots+a_{1977})+(b_1+b_2+\cdots+b_{1977})\\&=1977\cdot9.\\&\equiv1\pmod 2\end{aligned}\qquad ①$$

另一方面,由于$(b_1,b_2,\cdots,b_{1977})$是$(a_1,a_2,\cdots,a_{1977})$的一个排列,则

$$a_1+a_2+\cdots+a_{1977}=b_1+b_2+\cdots+b_{1977}.$$
$$\begin{aligned}S&=(a_1+a_2+\cdots+a_{1977})+(b_1+b_2+\cdots+b_{1977})\\&=2(a_1+a_2+\cdots+a_{1977})\\&\equiv0\pmod 2.\end{aligned}\qquad ②$$

① 式与 ② 式矛盾.

所以满足条件的 1977 位数不存在.

7·10 将 3 个连续自然数的和记作 $A$,将紧接着它们之后的 3 个连续自然数的和记作 $B$.试问,乘积 $A\cdot B$ 能否等于$\underbrace{111\cdots111}_{共9个1}$?

（列宁格勒数学奥林匹克，1988 年）

［解］ 由题意，设 $A = x + (x+1) + (x+2)$，$B = (x+3) + (x+4) + (x+5)$，　$x \in N$. 由于

$$A = 3x + 3,\quad B = 3x + 12$$

$$A + B = 6x + 15.$$

所以 $A$ 与 $B$ 一为奇数，一为偶数，其乘积 $A \cdot B$ 为偶数，因而不可能等于奇数 $\underbrace{11\cdots11}_{9个1}$.

7·11　在 $4 \times 4$ 的正方形表中记有 1,9,8,5 四个数. 是否可能在其余的格子里填这样的数，使得每一行及每一列均成为等差数列.

| | 9 | | |
|---|---|---|---|
| 1 | | | |
| | | | 5 |
| | | 8 | |

试分别按(1) 整数；(2) 实数，两种情况讨论.

（第 11 届全俄数学奥林匹克，1985 年）

［解］ 假定存在这样的填表法.

记第一行的公差为 $a$，第四行的公差为 $c$，

第一列的公差为 $b$，第四列的公差为 $d$.

则右上角为 $9 + 2a$，于是

$$5 = 9 + 2a + 2d. \qquad ①$$

左下角为 $1 + 2b$，于是

$$8 = 1 + 2b + 2c. \qquad ②$$

左上角为 $9 - a$ 或 $1 - b$，于是

$$9 - a = 1 - b. \qquad ③$$

右下角为 $5 + d$ 或 $8 + c$，于是

$$5 + d = 8 + c. \qquad ④$$

由 ② 式，左边为偶数 8，右边为奇数，则在方格里都填整数不可能做到.

若方格里都填实数，

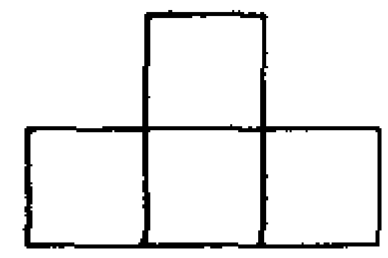
由 ②,③,④ 中消去 $b$ 和 $c$ 得

$$a + d = \frac{29}{2},$$

而由 ①　　$a + d = -2,$

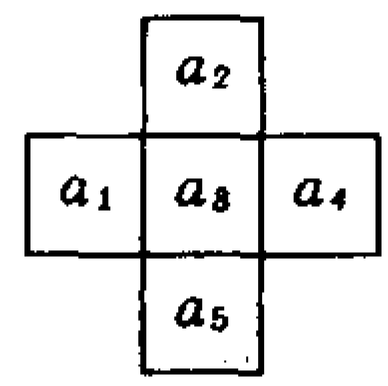
出现矛盾，所以在方格里都填实数也不可能做到.

7·12　在记有自然数 1 到 36 的 $6\times6$ 方格表中，能否使图中的任何一个图形在方格中的数之和能被 2 整除？



（第 9 届全俄数学奥林匹克，1983 年）

［解］　假设所要求的数的排列是存在的.




考察如图的“十字形”方格，在里面填上 $a_1,a_2,a_3,a_4,a_5$. 由题意

$a_1+a_2+a_3+a_4$ 与 $a_1+a_3+a_4+a_5$ 都是偶数.

于是 $a_2$ 和 $a_5$ 有相同的奇偶性.

同理可证 $a_1$ 和 $a_2$，$a_4$ 和 $a_5$ 也有相同的奇偶性. 在这种情况下，$a_3$ 也与它们有相同的奇偶性.

由于“十字形”能以任意形式选取，则对于方格表中的所有 36 个数，除了其角上的 4 个数之外，至少有 32 个数具有相同的奇偶性.

但是，在数 $1,2,\cdots,35,36$ 中恰有 18 个偶数和 18 个奇数，从而导致矛盾.

所以，所要求的记数形式是不可能存在的.

7·13　在一个国家里，国王要建 $n$ 个城市，并在它们之间建 $n-1$ 条道路，使得从每个城市可通往任何一个城市（每条道路连结两个城市，道路不相交，也不经过其他城市）. 国王要求：沿着道路网两座城市之间的最短距离分别是 1 千米，2 千米，3 千米，$\cdots$，$\frac{n(n-1)}{2}$ 千米. 如果

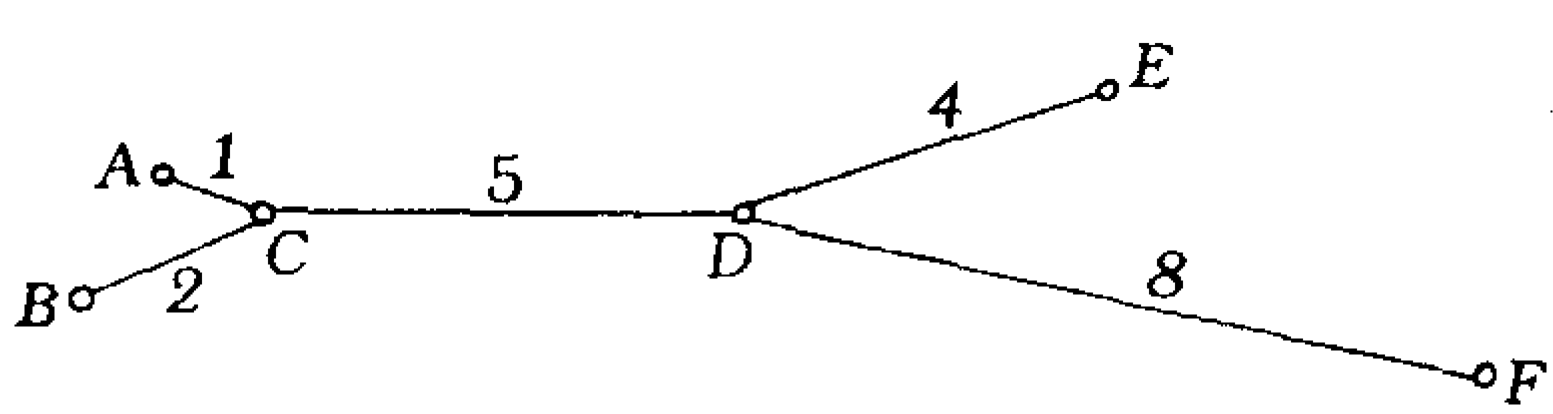
(1) $n=6$；

(2) $n=1986$.

试问：国王的要求能实现吗？

（第 20 届全苏数学奥林匹克，1986 年）

［解］　(1) $n=6$ 时，可设计如下的道路网路图：




图中 $A,B,C,D,E,F$ 为六个城市，数字是道路长的千米数.

(2)$n=1986$ 时.

根据 $n$ 个城市间建 $n-1$ 条道路的题设要求,可以断定,从任一城市到另一城市只有惟一的路线.

设某一个城市 $A$,并称它为"好的",如果从 $A$ 到另一城市 $B$ 的路程是偶数,则称 $B$ 也是"好的",如果从 $A$ 到 $B$ 的路程是奇数,则称 $B$ 是"坏的".

于是,当且仅当两个城市都是"好的"或都是"坏的"时,这两个城市间的路程是偶数.

设 $x$ 是"好的"城市数目,$y$ 是"坏的"城市数目.于是 $x+y=n$.一个"好的"和一个"坏的"的配成的城市对的对数共有 $xy$ 个.

若符合题目要求,使之出现每两个城市间沿路网的最小路程分别是

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad \cdots,\quad \frac{1}{2}n(n-1).$$

则在这些数中有 $xy$ 个奇数.

(i)若 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 是偶数,则

$$xy=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}n(n-1).$$

于是

$$\begin{aligned} n &= n^2-4xy \\ &= (x+y)^2-4xy \\ &= (x-y)^2. \end{aligned}$$

(ii)若 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 是奇数,则

$$xy=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}n(n-1)+1\right].$$

于是

$$n=n^2-4xy+2$$

$$n-2=(x-y)^2.$$

这就是说,仅当 $n$ 或 $n-2$ 是完全平方数时,才能建起满足题设要求的道路,然而1986及 $1986-2$ 不是平方数,所以 $n=1986$ 时,国王的要求不能被满足.

7·14　在序列19752…中,自第5个数字开始,每个数字都等于它前面的4个数字之和的个位数.试问:在该序列中

(1) 是否会出现数字组 1234 和 3269?

(2) 是否会再次出现数字组 1975?

(3) 是否会出现数字组 8197?

(第 38 届莫斯科数学奥林匹克,1975 年)

**[解]** (1) 我们把序列中的所有偶数数字都换为 0,所有奇数数字都换为 1,则前五个数字换成 11110.

由序列组成的法则,即第5个数字等于它前面4个数字之和的个位数,则这个"1,0"序列就会周期性地重复出现 11110.

而 1234 和 3269 对应的"1,0"序列依次为 1010 和 1001.

因此它们不可能在题给的序列中出现.

(2) 由于只有 10 个数字,所以只能组成有限多个 4 位数,而整个序列是无限的,因此在整个序列中一定能找到两个同样的 4 位数 $A$:即

$$1975\cdots A\cdots A\cdots$$

下面我们证明在这两个同样的 4 位数之间就有数字 1975 存在.

为此,我们也可以向左延续题给的序列.即一旦知道了 4 个依次出现的数字,那么不仅可以得到紧跟在它们之后的一个数字,而且也可以确定位于它们之前的那一个数字.

于是,当知道了一段序列 $A\cdots A$,就能得到在两个方向上都无限的数列,如果在两个 $A$ 之间不会遇到 1975,那么它在整个数列之中都不会遇见,从而与已知序列有 1975 相矛盾.

(3) 由(2),在 1975 的前面数字是 8,这可由

$$8+1+9+7=25$$

来得到,因而我们可以在两个方向上都无限的数列中找到数字组 8197,因而它也能在原数列中找到.

7·15　两人进行游戏:在黑板上写着数字 2,两人轮流将黑板上所写的数字 $n$ 改为 $n+d$,其中 $d$ 是 $n$ 的任意一个小于自身的正约数.当某人所写出的数大于 19891989 时,即判他输.试问在正确的玩法之下,谁将取胜 —— 是先开头的,还是其对手?

(列宁格勒数学奥林匹克,1989 年)

**[解]** 可以设计一个玩法,使先开头者胜.

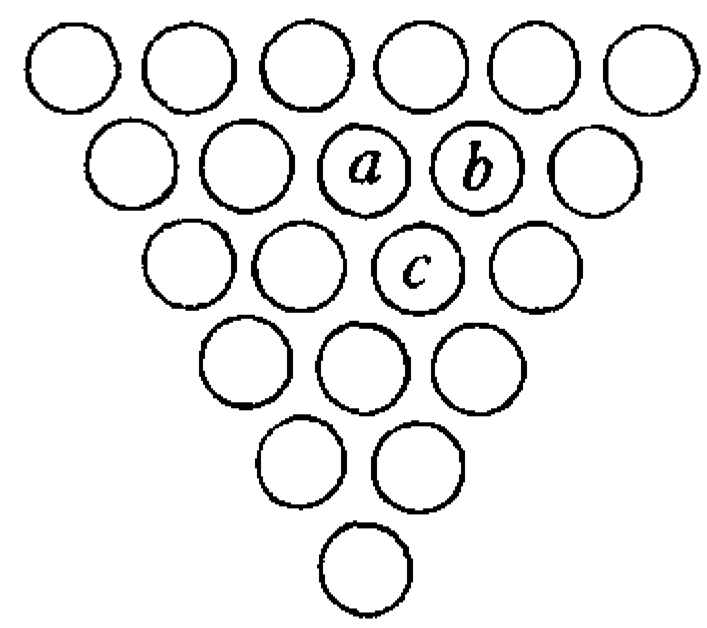
注意到一个奇数的所有正约数都是奇数这样一个十分简单的事实.

并注意到 1 是任何正整数的正约数.

先开头者每次都将黑板上的数加 1,因而他写在黑板上的数都是奇数,然而,第二个人每次只能加上奇数,所以他必然在黑板上写的都是偶数,于是必然轮到第一个人写 19891989.

7·16　试问:能否将 1 至 21 这 21 个自然数分别填入图中的各个圆圈内,使得除第一行外,每个圆圈内的数字都等于其肩膀上两个圆圈内的数字之差的绝对值(亦即 $c = |a - b|$,如下图).

(第 16 届全俄数学奥林匹克,1990 年)




[解]　假定我们已按照要求将 1 至 21 填入图中的各个圆圈之内.

由于两个数的和与这两个数的差有相同的奇偶性,我们考察另一种填法.

不改变第一行中 6 个圆圈上的数,而将第二行中的各个数都换成其两个肩膀上的数的和,并依照此法,再将第三行中的各个数都换成现在第二行中的位于其两个肩膀上的数的和,如此下去,将其余各行数重新换过.

这时,表中所填的各数的奇偶性都与原来所填的数相同.

于是,新填的表中所有数之和的奇偶性应当与和数 $1 + 2 + \cdots + 21 = 231$ 相同,即为奇数.

然而,若第一行数为 $a, b, c, d, e, f$,则按新填法

第二行为:$a + b, b + c, c + d, d + e, e + f$,

第三行为:$a + 2b + c, b + 2c + d, c + 2d + e, d + 2e + f$,

第四行为:$a + 3b + 3c + d, b + 3c + 3d + e, c + 3d + 3e + f$,

第五行为:$a + 4b + 6c + 4d + e, b + 4c + 6d + 4e + f$,

第六行为:$a + 5b + 10c + 10d + 5e + f$.

这时,所有数之和为 $6a + 20b + 34c + 34d + 20e + 6f$ 是偶数.出现矛盾.

因此,不存在符合要求的填法.

7·17　能否把 1,1,2,2,…,1986,1986 这些数排成一行,使得两个 1 之间夹着一个数,两个 2 之间夹着两个数,…,两个 1986 之间夹着一千九百八十六个数?

请证明你的结果.

(第1届中国中学生数学冬令营,1986年)

[证1] 不可能做到.

下面用反证法证明这个结论.

由题设,若能排成,设第一个数 $k$ 写在第 $a_k$ 位,第二个数 $k$ 写在第 $b_k$ 位,则必有

$$b_k - a_k = k + 1.$$

取 $k = 1,2,\cdots,1986$,则

$$\sum_{k=1}^{1986}(b_k - a_k) = \sum_{k=1}^{1986}(k+1).$$

即

$$\sum_{k=1}^{1986}(b_k + a_k) - 2\sum_{k=1}^{1986}a_k = \sum_{k=1}^{1986}(k+1).$$

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 1986 + 1987 + \cdots + 3972 - 2\sum_{k=1}^{1986}a_k$$

$$= 2 + 3 + 4 + \cdots + 1986 + 1987.$$

即

$$\frac{3972 \cdot 3973}{2} - 2\sum_{k=1}^{1986}a_k = \frac{1986 \cdot 1989}{2},$$

$$1986 \cdot 3973 - 2\sum_{k=1}^{1986}a_k = 993 \cdot 1989.$$

此式左边为偶数,右边为奇数,显然不可能成立.

即题设所要求的排法不可能做到.

[证2] 考虑任一偶数对.

当一个偶数 $k$ 占据第奇数位时,则另一个偶数 $k$ 占据第偶数位,反之亦然.

考虑任一奇数对.

当一个奇数 $t$ 占据第奇数位时,则另一个奇数 $t$ 也占据第奇数位,或者当一个奇数 $s$ 占据第偶数位时,则另一个奇数 $s$ 也占据第偶数位.

由于 $2 \cdot 1986$ 个位置中共有1986个奇数位,1986个偶数位.

因为有993对偶数,所以共占据了993个奇数位.

而993对奇数占了偶数个(设为 $2m$) 奇数位.于是

$$993 + 2m = 1986.$$

这是不可能的.

所以题目要求的排法不可能做到.

**[证 3]** 考察任何两个 $a$ 和任何两个 $b$ 相互被夹的关系.

容易看出,如果恰有一个 $b$ 被夹在两个 $a$ 之间,那么也恰有一个 $a$ 被夹在两个 $b$ 之间;

如果两个 $b$ 都夹在两个 $a$ 之间,那么就不会有 $a$ 被夹在两个 $b$ 之间;

而如果没有 $b$ 被夹在两个 $a$ 之间,那么或者没有 $a$ 被夹在两个 $b$ 之间,或者两个 $a$ 都被夹在两个 $b$ 之间.

由以上可以看出:任何两对不同数字相互被夹的数目之和不是 2 就是 0,即为偶数.于是在两个 1,两个 2,…,两个 1986 之间被夹的其他数字的总数目一定是偶数,然而

$$1+2+3+\cdots+1986=1987\cdot 993$$

是奇数,出现矛盾.

所以题设所要求的排法不可能做到.

7·18 假设 $p$ 和 $q$ 是两个奇整数.证明方程 $x^2+2px+2q=0$ 不可能有有理根.

(匈牙利数学奥林匹克,1907 年)

**[证 1]** 假定方程有有理根 $\frac{n_1}{m_1}$,其中 $m_1$ 和 $n_1$ 是互素的整数.

由 $q$ 是整数及韦达定理可知方程的另一根也是有理数,设这个根为 $\frac{n_2}{m_2}$,其中 $m_2$ 和 $n_2$ 是互素的整数.于是

$$\frac{n_1}{m_1}+\frac{n_2}{m_2}=-2p, \qquad ①$$

$$\frac{n_1}{m_1}\cdot\frac{n_2}{m_2}=2q. \qquad ②$$

由 ② 得 $$n_1n_2=2m_1m_2q. \qquad ③$$

由 ③ 得,$n_1$ 和 $n_2$ 至少有一个为偶数,不妨设 $n_1$ 为偶数,则由 $m_1$ 和 $n_1$ 互素,$m_1$ 为奇数.

由 ① 得 $$n_1m_2+m_1n_2=-2m_1m_2p \qquad ④$$

由于 $n_1$ 是偶数,则 $n_1m_2$ 是偶数,于是由 ④ 式 $m_1n_2$ 是偶数.

又 $m_1$ 是奇数,则 $n_2$ 是偶数,于是 $m_2$ 是奇数.

再考察 ③ 式.

由于 $n_1$ 和 $n_2$ 均为偶数,则③式左边 $n_1n_2$ 是4的倍数,而③式右边 $m_1, m_2$ 和 $q$ 都是奇数,于是 $2m_1m_2q$ 不可能是4的倍数.出现矛盾.

于是已知方程没有有理根.

[**证 2**] (1) 若方程有偶数根 $x$,则

$$x^2 \equiv 0 \pmod 4,$$
$$2px \equiv 0 \pmod 4,$$
$$2q \equiv 2 \pmod 4.$$

于是
$$x^2 + 2px + 2q \equiv 2 \pmod 4,$$

故
$$x^2 + 2px + 2q \neq 0.$$

即方程没有偶数根.

(2) 若方程有奇数根,则

$$x^2 \equiv 1 \pmod 4,$$
$$2px \equiv 2 \pmod 4,$$
$$2q \equiv 2 \pmod 4.$$

于是
$$x^2 + 2px + 2q \equiv 1 \pmod 4.$$

即方程没有奇数根.

(3) 若方程有分数根,则由

$$x^2 + 2px + p^2 = p^2 - 2q,$$
$$(x + p)^2 = p^2 - 2q.$$

上式的左边为分数,右边为整数,不可能成立.

综合(1),(2),(3),方程没有有理根.

7·19 证明如果整系数二次方程

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0) \qquad ①$$

有有理根,那么 $a, b, c$ 中至少有一个是偶数.

(波兰数学竞赛,1958年)

[**证**] 令 $x = \frac{y}{a}$.则已知方程化为

$$y^2 + by + ac = 0. \qquad ②$$

如果 $x$ 是方程①的有理根,那么 $y$ 也是方程②的有理根.

由于方程②的二次项系数是1,则当 $y$ 是②的有理根时,$y$ 是整数.

设方程②有两个有理根 $y_1, y_2$,且 $y_1$ 是整数,则有

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = -b & ③ \\ y_1 y_2 = ac & ④ \end{cases}$$

由 ③ 知 $y_2$ 也是整数.

所以有 $$abc = -y_1 y_2 (y_1 + y_2).$$

因为对整数 $y_1, y_2$ 和$(y_1 + y_2)$,这三个之中必有一个偶数,因此 $abc$ 为偶数,即 $a, b, c$ 之中至少有一个偶数.

7·20 设多项式 $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$ 的系数都是整数,并且有一个奇数 $\alpha$ 及一个偶数 $\beta$,使得 $f(\alpha)$ 及 $f(\beta)$ 都是奇数,求证方程 $f(x) = 0$ 没有整数根.

(中国上海市数学竞赛,1956 年)

[证] 因为 $\beta$ 为偶数,则

$$\begin{aligned} f(\beta) &= a_0 \beta^n + a_1 \beta^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\beta + a_n \\ &= \beta(a_0 \beta^{n-1} + a_1 \beta^{n-2} + \cdots + a_{n-1}) + a_n \end{aligned}$$

由于 $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ 均为整数,$\beta$ 为偶数,则 $\beta(a_0\beta^{n-1} + \cdots + a_{n-1})$ 是偶数,又由于 $f(\beta)$ 是奇数,所以 $a_n$ 为奇数.

若 $\beta'$ 为一偶数,则

$$f(\beta') = \text{偶数} + a_n = \text{偶数} + \text{奇数} \neq 0.$$

所以方程 $f(x) = 0$ 没有偶数根.

因为 $\alpha$ 是奇数,而

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= a_0 \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\alpha + a_n \\ &= (a_0 \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\alpha) + \text{奇数}. \end{aligned}$$

因为 $f(\alpha)$ 为奇数,以及 $\alpha^k (k = 1, 2, \cdots, n)$ 为奇数,则有

$a_0 \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\alpha$ 是偶数.

若 $\alpha'$ 为一奇数,则

$$f(\alpha') = \text{偶数} + a_n = \text{偶数} + \text{奇数} \neq 0,$$

所以方程 $f(x) = 0$ 没有奇数根.

由以上,方程 $f(x) = 0$ 没有整数根.

7·21 证明如果存在 $n$ 个正整数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 满足 $n$ 个方程

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1, \\ -x_{k-1} + 2x_k - x_{k+1} = 1, \quad k = 2, 3, \cdots, n-1 \\ -x_{n-1} + 2x_n = 1. \end{cases}$$

则 $n$ 是偶数.

（瑞典数学竞赛，1983 年）

[证] 考虑齐次方程组

$$\begin{cases}2x_1-x_2=0,\\ -x_{k-1}+2x_k-x_{k+1}=0, \quad k=2,3,\cdots,n-1\\ -x_{n-1}+2x_n=0.\end{cases}$$

则可得出 $\begin{cases}x_2=2x_1,\\ x_k=\dfrac{x_{k-1}+x_{k+1}}{2}, \quad k=2,3,\cdots,n-1\\ x_{n-1}=2x_n.\end{cases}$

于是解得 $\begin{cases}x_i=ix_1, \quad i=2,3,\cdots,n\\ x_n=\dfrac{1}{2}(n-1)x_1.\end{cases}$

这样就有 $$nx_1=\frac{1}{2}(n-1)x_1,$$

解得 $$x_1=0.$$

从而 $$x_i=0, \quad i=1,2,\cdots,n.$$

设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是方程组

$$\begin{cases}2x_1-x_2=1,\\ -x_{k-1}+2x_k-x_{k+1}=1, \quad k=2,3,\cdots,n-1\\ -x_{n-1}+2x_n=1.\end{cases} \qquad ②$$

的一组解.则 $x_n,x_{n-1},\cdots,x_1$ 也是这个方程组的一组解.于是

$$x_1-x_n,x_2-x_{n-1},x_3-x_{n-2},\cdots,x_n-x_1$$

是齐次方程组的解，因此

$$x_1=x_n, \quad x_2=x_{n-1}, \quad x_3=x_{n-2}, \quad \cdots$$

又将方程组 ② 的 $n$ 个方程相加得

$$x_1+x_n=n,$$

所以 $$x_1=x_n=\frac{n}{2}.$$

因为 $x_1$ 是正整数，所以 $n$ 是偶数.

7·22 设多项式

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_0,$$

其中系数 $a_i(i=0,1,2,\cdots,n)$ 是整数.

如果 $P(0)$ 和 $P(1)$ 都是奇数,证明 $P(x)$ 没有整数根.

(第3届加拿大数学竞赛,1971年)

[证] 由于 $P(0)$ 是奇数,则 $a_0$ 是奇数.

于是,对任意的偶数 $\alpha$,$P(\alpha)$ 一定是奇数,从而 $P(\alpha)\neq 0$,即 $P(x)$ 没有偶数根.

下面我们证明,对任意奇数 $\beta$,$P(\beta)$ 也是奇数.

否则,若 $P(\beta)$ 是偶数,由 $P(1)$ 是奇数得

$$P(\beta)-P(1)$$
$$=a_0(\beta^n-1)+a_1(\beta^{n-1}-1)+\cdots+a_{n-1}(\beta-1)$$

由于 $P(\beta)-P(1)=$ 偶数 $-$ 奇数 $=$ 奇数,而因为 $\beta$ 是奇数,$\beta^k-1(k=1,2,\cdots,n)$ 是偶数,所以上式就出现奇数等于偶数的结果,这是不可能的.

所以 $P(x)$ 也没有奇数根.

因而 $P(x)$ 没有整数根.

7·23 证明不论 $n$ 是什么整数,方程 $x^2-16nx+7^5=0$ 没有整数解.

(中国北京市高中数学竞赛,1962年)

[证] 设方程

$$x^2-16nx+7^5=0 \quad ①$$

的两个根为 $x_1$ 和 $x_2$,则有

$$x_1+x_2=16n, \quad ②$$

$$x_1x_2=7^5. \quad ③$$

现假定 ① 有一根为整数,则由 ②,另一根也是整数.

因为 7 是素数,由 ③ 知,$x_1$ 和 $x_2$ 可以写成下面的形式:

$$x_1=\pm 7^k,\quad x_2=\pm 7^h. \quad ④$$

上面两式同时取正负号,且

$$k+h=5. \quad ⑤$$

把 ④ 式代入 ②,得(不妨设 $k>h$)

$$7^k+7^h=\pm 16n.$$

$$7^h(7^{k-h}+1)=\pm 16n. \quad ⑥$$

因为 $k+h$ 为奇数,所以 $k-h$ 也为奇数,从而有恒等式

$$7^{k-h}+1=8(7^{k-h-1}-7^{k-h-2}+\cdots+1)$$

由于上式右边括号中每一项都是奇数,并且 $k-h$ 也是奇数,所以代数和是奇数,把它记为 $m$,从而 ⑥ 式化为

$$7^h\cdot 8m=\pm 16n,$$

$$7^h\cdot m=\pm 2n.$$

上式左边为奇数之积,仍为一奇数,而右边为偶数,所以不可能成立.

因此,方程 ① 没有整数解.

7·24　设 $f(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_ix^{n-i}$ 为整系数 $n$ 次多项式,若 $a_0,a_n$ 及 $f(1)$ 均为奇数,证明 $f(x)=0$ 没有有理根.

(第 12 届美国普特南数学竞赛,1952 年)

[证]　设方程 $f(x)=0$ 有有理根 $x=\dfrac{p}{q}$,其中 $p$ 和 $q$ 是互素的整数,则

$$f\left(\frac{p}{q}\right)=0.$$

$$q^nf\left(\frac{p}{q}\right)=\sum_{i=0}^{n}q^na_i\left(\frac{p}{q}\right)^{n-i}=0,$$

即

$$a_0p^n+qa_1p^{n-1}+\cdots+q^{n-1}a_{n-1}p+q^na_n=0.\qquad ①$$

由此可得

$$p\mid a_n,\quad q\mid a_0.$$

因为 $a_0$ 和 $a_n$ 都是奇数,则 $p$ 和 $q$ 都是奇数.

考虑 ① 式左边以 2 为模的余数.

$$\begin{aligned}&a_0p^n+qa_1p^{n-1}+\cdots+q^{n-1}a_{n-1}p+q^na_n\\ \equiv\ &a_0+a_1+\cdots+a_{n-1}+a_n\\ =\ &f(1)\\ \equiv\ &1\pmod 2.\end{aligned}$$

与 ① 式矛盾.

因而方程 $f(x)=0$ 没有有理根.

7·25　证明四次多项式 $x^4+2x^2+2x+2$ 不可能分解成两个具

有整系数 $a,b,c,d$ 的二次三项式$x^2+ax+b$ 和$x^2+cx+d$ 的乘积.

（匈牙利数学奥林匹克,1922 年）



[证 1]　假设四次多项式 $x^4+2x^2+2x+2$ 能分解成 $x^2+ax+b$ 和$x^2+cx+d$ 的乘积,则

$$
\begin{aligned}
&x^4+2x^2+2x+2\\
&=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)\\
&=x^4+(a+c)x^3+(b+ac+d)x^2+(bc+ad)x+bd.
\end{aligned}
$$

它们的对应系数相等,即

$$a+c=0, \quad ①$$

$$b+ac+d=2, \quad ②$$

$$bc+ad=2, \quad ③$$

$$bd=2. \quad ④$$

由 ④ 得,$b$ 和$d$ 一为奇数,一为偶数,不妨设 $b$ 为奇数(实际上为 $\pm 1$),$d$ 为偶数(实际上为 $\pm 2$).

这时,由 ③ 式得　$bc=2-ad$.

右边为偶数,而左边的因数 $b$ 为奇数,所以 $c$ 为偶数.

再考虑② 式,由 $b$ 为奇数,$c$ 和$d$ 为偶数可得$b+ac+d$ 为奇数,而 2 为偶数,则

$$b+ac+d=2$$

不成立.

因此,四次多项式 $x^4+2x^2+2x+2$ 不能分解为 $x^2+ax+b$ 和$x^2+cx+d$ 的乘积.

[证 2]　由爱森斯坦定理:

设整系数多项式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n.$$

如果存在这样一个素数 $p$,最高次项的系数 $a_0$ 不能被 $p$ 整除,而所有其他的系数能被 $p$ 整除,但常数项不能被 $p^2$ 整除,那么 $f(x)$ 不能分解为两个低次的整系数多项式的乘积.

设　$f(x)=x^4+2x^2+2x+2.$

则有素数　$p=2,$

$2\nmid 1$($x^4$ 的系数).

$2\mid 2$　且　$2^2\nmid 2$(常数项).

于是 $x^4+2x^2+2x+2$ 不能分解为两个二次三项式之积.

7·26　已知多项式 $x^3+bx^2+cx+d$ 的系数都是整数,并且 $bd+cd$ 是奇数.证明这多项式不能分解为两个整系数多项式的乘积.

（中国北京市高中数学竞赛,1963 年）

**[证 1]**　设　$\varphi(x)=x^3+bx^2+cx+d.$

如果 $\varphi(x)$ 能分解成两个整系数多项式的乘积,由于 $\varphi(x)$ 的首项系数为 1,则可设

$$x^3+bx^2+cx+d=(x+p)(x^2+qx+r).$$

比较对应项的系数得

$$pr=d,\quad pq+r=c,p+q=b.$$

因为 $bd+cd=(b+c)d$ 是奇数,则 $b+c$ 与 $d$ 都是奇数.因而 $b$ 和 $c$ 必一为奇数,一为偶数.

若 $b$ 是偶数,$c$ 和 $d$ 是奇数.

此时 $p$ 和 $r$ 都是奇数,从而 $pq=c-r$ 为偶数,于是由 $p$ 是奇数,$q$ 是偶数可知 $p+q=b$ 是奇数,与 $b$ 是偶数矛盾.

若 $b$ 和 $d$ 是奇数,$c$ 是偶数.

由 $d$ 是奇数知 $p$ 和 $r$ 是奇数,从而 $q=b-p$ 是偶数,此时 $pq+r=c$ 是奇数,与 $c$ 是偶数矛盾.

以上矛盾表明,$\varphi(x)$ 不能分解为两个整系数多项式的乘积.

**[证 2]**　假设

$$x^3+bx^2+cx+d=(x+p)(x^2+qx+r),$$

则 $x^3+bx^2+cx+d$ 必能被 $x+p$ 整除,从而应有

$$-p^3+bp^2-cp+d=0.\qquad ①$$

由于$(b+c)d$ 是奇数,则 $d$ 是奇数,$b$ 和 $c$ 一为奇数一为偶数,又由 $d=pr$ 知 $p$ 是奇数.

从而 ① 式左边有三项为奇数,一项为偶数,因而这四项之和为奇数不可能为零.

因此,$x^3+bx^2+cx+d$ 不能分解为两个整系数多项式的乘积.

**[证 3]**　假设

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=x^3+bx^2+cx+d\\&=(x+p)(x^2+qx+r).\end{aligned}$$

由 $bd+cd$ 是奇数,则 $b+c,d$ 是奇数,进而 $p$ 和 $r$ 也是奇数.　令

$x=1$，则

$$\varphi(1)=(1+p)(1+q+r)$$
$$=1+(b+c)+d.$$

然而 $1+p$ 是偶数，从而 $(1+p)(1+q+r)$ 是偶数，又 $1+(b+c)+d$ 是奇数. 产生矛盾.

于是命题成立.

7·27　假设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是数 $1,2,\cdots,n$ 的某种排列.

证明如果 $n$ 是奇数，则乘积 $(a_1-1)(a_2-2)\cdots(a_n-n)$ 是偶数.

（匈牙利数学奥林匹克，1906 年）

［证 1］　考虑所有因子 $a_i-i$ 的和.

$$\begin{aligned}&(a_1-1)+(a_2-2)+\cdots+(a_n-n)\\=&(a_1+a_2+\cdots+a_n)-(1+2+\cdots+n)\\=&0.\end{aligned}$$

由于 $n$ 是奇数，0 是偶数，若所有的因子

$$a_i-i(i=1,2,\cdots,n)$$

都是奇数，则奇数个奇数的和应为奇数，不可能为 0，出现矛盾.

所以必有一个因子 $a_i-i$ 是偶数，从而乘积

$$(a_1-1)(a_2-2)\cdots(a_n-n)$$

是偶数.

［证 2］　设 $n=2k+1$（$k$ 是整数）

显然，由 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的某种排列，则乘积

$$(a_1-1)(a_2-2)\cdots(a_n-n)$$

中，各个因式的被减数和减数的奇数个数都是 $k+1$ 个，即总共有 $2(k+1)=n+1$ 个奇数，而一共有 $n$ 个因式，所以必有一个因式中的被减数和减数都是奇数，从而这个因式是偶数，于是所有 $n$ 个因式的乘积为偶数.

7·28　扑克牌中的 $A$、$J$、$Q$、$K$ 分别表示 1，11，12，13，甲取 13 张红桃，乙取 13 张黑桃，分别洗和后，甲，乙依次各出一张牌，使红、黑牌配成 13 对，证明这 13 对数的差的积必为偶数.

（“中华少年杯”初二数学邀请赛，1987 年）

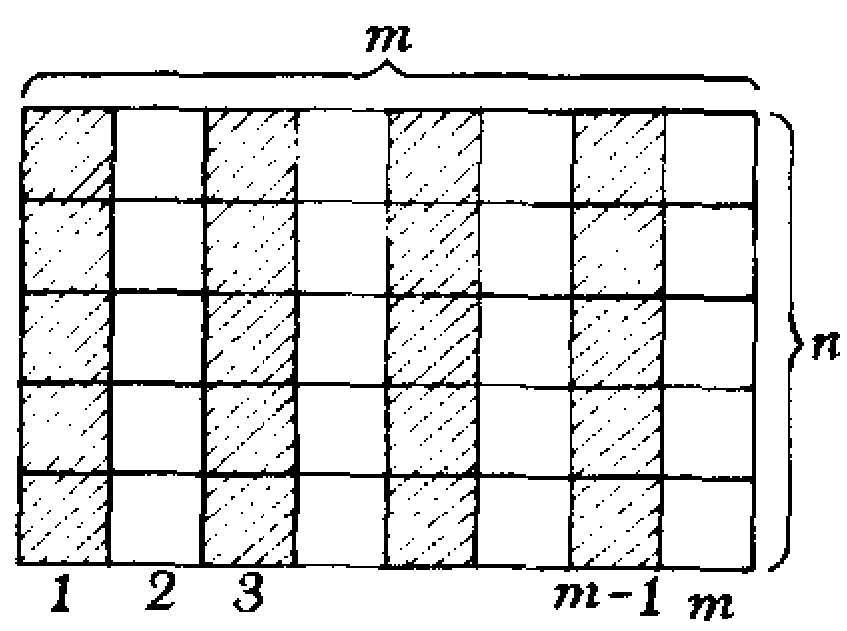
［证］　由于在 13 张牌的点数 $1,2,\cdots,13$ 中有 7 个奇数，6 个偶数，所以当红、黑牌配成 13 对之后，至少有一对数的奇偶性相同，则这对数

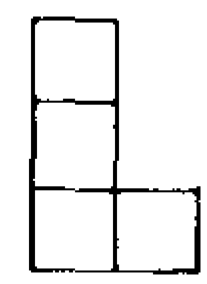
的差必为偶数.

由于 13 对数的差中,至少有一个差为偶数,则它们的积必为偶数.

7·29　如图,是由 4 个 $1\times1$ 的正方形组成的"$L$ 形".用若干个这种"$L$ 形"硬纸片无重叠地拼成一个 $m\times n$(长为 $m$ 个单位,宽为 $n$ 个单位)的矩形.

试证明 $mn$ 必是 8 的倍数.



(中国北京市初中二年级数学竞赛,1986 年)

[证]　设有 $k$ 个 $L$ 形的纸片拼成 $m\times n$ 的矩形,由于每个 $L$ 形由 4 个单位正方形组成,则

$$mn = 4k.$$

因此,$m$ 和 $n$ 中至少有一个是偶数.为确定起见,不妨设 $m$ 为偶数.

如图,将 $m$ 个列中的第奇数号列涂上红色,第偶数号列涂上白色,则每个"$L$ 形"纸片或者占 3 个红方格,一个白方格,或者占 3 个白方格,1 个红方格.

我们称占3红1白方格的为甲类,占3白1红方格的为乙类.并且设 $m\times n$ 矩形由 $t$ 个甲类"$L$ 形"纸片和 $s$ 个乙类"$L$ 形"纸片组成,则

甲类:占 $3t$ 个红方格,$t$ 个白方格.

乙类:占 $s$ 个红方格,$3s$ 个白方格.

但在 $m\times n$ 矩形中,红方格与白方格数相等,则有

$$3t + s = 3s + t,$$

$$s = t.$$

即甲类"$L$ 形"与乙类"$L$ 形"个数相等.

从而可断定 $k$ 为偶数.

于是 $mn = 4k$ 能被 8 整除.

7·30　有 $n \times n (n \geqslant 4)$ 的一张空白方格表,在它的每一个方格内任意地填入 $+1$ 与 $-1$ 两个数中的一个. 现将表内 $n$ 个两两既不同行(横)又不同列(竖)的方格中的数的乘积称为一个基本项.

试证:按上述方式所填成的每一个方格表,它的全部基本项之和总能被 4 整除(即总能表成 $4k$ 的形式,其中 $k \in Z$)

(中国高中数学联赛,1989 年)

[证 1]　显然,不论用怎样的填法,所填成的方格表总有 $n!$ 个基本项.

用 $a_{ij}$ 表示方格表中第 $i$ 行第 $j$ 列的方格内所填的数,这里 $1 \leqslant i, j \leqslant n,\quad n \geqslant 4,\quad i, j \in N$.

现在考察一张已填成的方格表,记它的全部基本项之和为 $S$.

由题意,表中每个格内的数 $a_{ij}$ 只能是 $+1$ 或 $-1$,而 $+1$ 与 $-1$ 之间只相差一个负号,因此,当把方格表中的某一个数 $a_{ij}$ 改变选择(即把 $+1$ 换成 $-1$ 或把 $-1$ 换成 $+1$)时,由于 $a_{ij}$ 出现在和式 $S$ 的 $(n-1)!$ 个基本项中,由 $n \geqslant 4$,则 $S$ 中将有偶数个基本项同时变号.

再注意到在 $n!$(偶数)个基本项中,值为 1 的基本项与值为 $-1$ 的基本项的个数之差必为偶数,而 $a_{ij}$ 在变号时,其所在的基本项的改变值是 2 或 $-2$,所以当某个 $a_{ij}$ 改变选择时,引起 $S$ 的改变值一定是 4 的倍数.

若一张方格表的所有 $a_{ij}$ 全为 $+1$,则全部基本项之和 $S = n!(n \geqslant 4)$ 显然能够被 4 整除. 若 $a_{ij}$ 不全为 $+1$,则这张方格表可由一张 $a_{ij}$ 全为 1 的方格表将相应方格中的数 $+1$ 经有限次变号而得到. 根据以上的讨论,每次变号均使基本项之和的改变值能被 4 整除.

从而无论用怎样的填法,所填成的方格表的全部基本项之和总能被 4 整除.

[证 2]　设每个基本项为 $x_i$,则 $x_i$ 只能取 $+1$ 或 $-1$,且基本项共有 $n!$ 个.

表中第 $i$ 行,第 $j$ 列的数记为 $a_{ij}$,则 $a_{ij}$ 只能为 $+1$ 或 $-1$.

又因为方格表中每一个数 $a_{ij}$ 都取了 $(n-1)!$ 次,所以有

$$x_1 x_2 \cdots x_{n!} = \prod_{1 \leqslant i, j \leqslant n} a_{ij}^{(n-1)!}.$$

由于 $n \geqslant 4$，所以 $2 \mid (n-1)!$，

因而 $$a_{ij}^{(n-1)!} = 1,$$

即 $$x_1 x_2 \cdots x_{n!} = 1.$$

故在 $x_1, x_2, \cdots, x_{n!}$ 中只可能有偶数个 $-1$，设有 $2k$ 个 $-1$，则有 $n! - 2k$ 个 $+1$.

于是 $$\sum_{i=1}^{n!} x_i = (n! - 2k) + (-1) \cdot 2k = n! - 4k.$$

又因为 $n \geqslant 4$，所以 $4 \mid n!$，即 $4 \mid n! - 4k$，于是 $4 \mid \sum_{i=1}^{n!} x_i$.

7·31　设 $E = \{1,2,3,\cdots,200\}$，$G = \{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{100}\} \subset E$. 且 $G$ 具有下列两条性质：

(i) 对任何 $1 \leqslant i < j \leqslant 100$，恒有
$$a_i + a_j \neq 201.$$

(ii) $\sum_{i=1}^{100} a_i = 10080$.

试证明 $G$ 中的奇数的个数是 4 的倍数，且 $G$ 中所有数字的平方和为一个定数.

（中国高中数学联赛，1990 年）

**[证 1]**　由条件(i)，$a_i + a_j \neq 201$，

所以在 $G$ 中选了一个奇数 $t$，则 $E$ 中的相应的偶数 $201 - t$ 就必然不在 $G$ 内.

由于 $E$ 中 100 个偶数之和
$$2 + 4 + \cdots + 200 = \frac{(2+200) \cdot 100}{2} = 10100 > 10080.$$

则 $G$ 中不可能全为偶数.

设 $G$ 中有 $k$ 个奇数，每个奇数设为 $2n_i - 1$($i = 1,2,\cdots,k$，$n_i \in N$).

从而必须从 $E$ 中的 100 个偶数中除掉 $k$ 个，每个偶数设为 $2m_i$ ($i = 1,2,\cdots,k$，$m_i \in N$)，且满足
$$2n_i - 1 + 2m_i = 201,$$

即 $$m_i + n_i = 101.$$

于是有 $10100 - (2m_1 + 2m_2 + \cdots + 2m_k) + [(2n_1 - 1) + (2n_2 -$

$1)+\cdots+(2n_k-1)]=10080.$

$$\begin{aligned}20&=2(m_1-n_1+m_2-n_2+\cdots+m_k-n_k)+k\\&=2[(m_1+n_1)-2n_1+(m_2+n_2)-2n_2+\cdots+(m_k+n_k)\\&\quad-2n_k]+k\\&=2(101k-2n_1-2n_2-\cdots-2n_k)+k.\end{aligned}$$

即 $$203k=20+4(n_1+n_2+\cdots+n_k).$$

因为 $$(203,4)=1,$$

所以必有 $$4\mid k.$$

即 $G$ 中奇数的个数是 4 的倍数.

又 $$\sum_{i=1}^{100}a_i^2+\sum_{i=1}^{100}(201-a_i)^2=\sum_{i=1}^{200}i^2,$$

$$\begin{aligned}2\sum_{i=1}^{100}a_i^2&=\sum_{i=1}^{200}i^2-100\cdot201^2+402\sum_{i=1}^{100}a_i\\&=\sum_{i=1}^{200}i^2-100\cdot201^2+402\cdot10080.\end{aligned}$$

所以$\sum\limits_{i=1}^{100}a_i^2$是一个常数.

[证 2] 把 $E$ 分成

$$\{1,200\},\{2,199\},\cdots,\{100,101\}$$

共 100 个子集.

显然,集合 $G$ 中的元素是从这 100 个子集中各取一个元素.

又可把这 100 个子集分成两类:

一类是

$$\{1,200\},\{4,197\},\{5,196\},\{8,193\},\cdots$$

这一类中每个子集中的两个元素一个为 $4k$ 型,一个为 $4k+1$ 型.

另一类是

$$\{2,199\},\{3,198\},\{6,195\},\{7,194\},\cdots$$

这一类中每个子集中的两个元素,一个为 $4k+2$ 型,一个为 $4k+3$ 型.

设集合 $G$ 中的 100 个元素中 $4k+1$ 型的有 $x$ 个,$4k+3$ 型的有 $y$ 个,则 $4k$ 型的有 $50-x$ 个,$4k+2$ 型的有 $50-y$ 个.

这时,$x+y$ 即为 $G$ 中奇数的个数.因为

$$\sum_{i=1}^{100}a_i\equiv(4k+1)x+4k(50-x)+(4k+3)y+(4k+2)(50-y)$$

$$\begin{aligned}&\equiv x+3y-2y\\&\equiv x+y\\&\equiv 10080\\&\equiv 0 \pmod 4.\end{aligned}$$

所以 $$4 \mid x+y.$$

即 $G$ 中的奇数的个数是 4 的倍数.

下面证明 $G$ 中所有数的平方和是一个常数.

设 $$G_1=\{a_1,a_2,\cdots,a_{100}\},$$

$$G_2=\{b_1,b_2,\cdots,b_{100}\},$$

为满足条件的两个不同的集合,则有

$$\sum_{i=1}^{100}a_i=\sum_{i=1}^{100}b_i=10080.$$

不妨设 $G_1,G_2$ 中不同的元素共有 $k$ 个,记为 $a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_k}$; $b_{i_1},b_{i_2},\cdots,b_{i_k}$,其中

$$a_{i_1}<a_{i_2}<\cdots<a_{i_k},$$

$$b_{i_1}>b_{i_2}>\cdots>b_{i_k}.$$

显然有

$$a_{i_1}+b_{i_1}=a_{i_2}+b_{i_2}=\cdots=a_{i_k}+b_{i_k}=201.$$

于是

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{100}a_i^2-\sum_{i=1}^{100}b_i^2\\&=\sum_{j=1}^{k}(a_{i_j}^2-b_{i_j}^2)\\&=\sum_{j=1}^{k}(a_{i_j}+b_{i_j})(a_{i_j}-b_{i_j})\\&=201\sum_{j=1}^{k}(a_{i_j}-b_{i_j})\\&=201(\sum_{j=1}^{k}a_{i_j}-\sum_{j=1}^{k}b_{i_j})\\&=0.\end{aligned}$$

所以 $$\sum_{i=1}^{100}a_i^2=\sum_{i=1}^{100}b_i^2.$$

即 $G$ 中所有数的平方和为一常数.

7·32 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为 $+1$ 或 $-1$,并且

$$x_1x_2x_3x_4+x_2x_3x_4x_5+x_3x_4x_5x_6+\cdots+x_{n-3}x_{n-2}x_{n-1}x_n$$
$$+x_{n-2}x_{n-1}x_nx_1+x_{n-1}x_nx_1x_2+x_nx_1x_2x_3=0.$$

证明 $n$ 能被 4 整除.

(第 26 届国际数学奥林匹克候选题,1985 年)

[证] 由于乘积

$$x_1x_2x_3x_4,\ x_2x_3x_4x_5,\ \cdots,\ x_nx_1x_2x_3$$

都是 $+1$ 或 $-1$,且其总和为 0,所以一定共有偶数项,即 $n$ 一定是偶数 $2m$.

将上面的 $n$ 个数相乘,一方面,其中的 $+1$ 和 $-1$ 各有 $m$ 个,所以它们的乘积为 $(-1)^m$.

另一方面,在乘积中,$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 作为因数都出现四次,所以乘积为 $+1$,于是

$$(-1)^m=1,\quad m\text{ 为偶数}.$$

因此 $n$ 是 4 的倍数.

7·33 (1)有 $n$ 个整数,其积为 $n$,其和为0.求证数 $n$ 能被4整除.

(2)设 $n$ 是能被 4 整除的自然数.求证可以找到 $n$ 个整数,使其积为 $n$,其和为 0.

(第 18 届全苏数学奥林匹克,1984 年)

[证] (1)设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为 $n$ 个整数,且满足题设条件:

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=0 \qquad ①$$

$$a_1a_2\cdots a_n=n \qquad ②$$

若 $n$ 是奇数,则由②,所有的因数 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 都是奇数,而奇数个奇数之和应为奇数,而不能为 0,与①矛盾.

所以 $n$ 必为偶数.

当 $n$ 为偶数时,则由②知,必有一 $a_j$ 为偶数,再由①知,除 $a_j$ 外,至少还应有一个偶数,否则就出现奇数个奇数与一个偶数之和,不可能等于 0.

因此,在 $a_i$ 中至少要有两个偶数,再由 ②,$n$ 必能被 4 整除.

(2) 设 $n$ 是 4 的倍数,且 $n = 4k$, $k \in N$.

当 $k$ 为奇数时,

$$n = 2 \cdot (-2k) \cdot 1^{3k-2} \cdot (-1)^k.$$

由于 $2 + (-2k) + \underbrace{1 + \cdots + 1}_{(3k-2)个} + \underbrace{(-1) + \cdots + (-1)}_{k个}$

$= 2 - 2k + 3k - 2 - k$

$= 0.$

所以可选 1 个 2, 1 个 $-2k$, $3k-2$ 个 1 和 $k$ 个 $-1$ 这 $4k$ 个数,满足要求.

当 $k$ 为偶数时,

$$n = (-2) \cdot (-2k) \cdot 1^{3k} \cdot (-1)^{k-2}.$$

由于

$$(-2) + (-2k) + \underbrace{1 + \cdots + 1}_{3k个} + \underbrace{(-1) + \cdots + (-1)}_{(k-2)个}$$

$= -2 - 2k + 3k + 2 - k$

$= 0.$

所以可选 1 个 $-2$, 1 个 $-2k$, $3k$ 个 1 和 $k-2$ 个 $-1$,这 $4k$ 个数满足要求.

7·34 尺寸为 $10\times10\times10$ 的正方体是由 500 个黑色单位正方体和 500 个白色单位正方体拼成的,两色单位正方体按国际象棋的式样排列(即每两个相贴的面均为异色).今从中取出 100 个单位正方体,使得 300 个平行于正方体的棱的 $1\times1\times10$ 小柱的每一个之中,都刚好缺掉一个单位正方体.证明所取出的黑色单位正方体的数目是 4 的倍数.

(第 54 届莫斯科数学奥林匹克,1991 年)

[证 1] $10\times10\times10$ 的正方体共分为 10 层,将它们自下而上编号,记为 $1,2,3,\cdots,9,10$.

易知,自每一层中都取出了 10 个小正方块.

我们考察第 $k$ 层的情况.

设从第 $k$ 层中取出 $a_k$ 个黑块,$b_k$ 个白块.在该层中引入坐标,使每个小正方块都对应一个正整数对 $(i,j)$,$(i,j)$ 表示小正方块位于第 $i$ 行,第 $j$ 列.

由于奇数号同偶数号的颜色刚好相反，不妨设，当 $k$ 为奇数时，$i+j$ 为奇数的是黑方块，当 $k$ 为偶数时，$i+j$ 为奇数的是白方块.

现设 $k$ 为奇数，且设所取出的 10 个小正方块的坐标为 $(i_1,j_1)$，$(i_2,j_2),\cdots,(i_{10},j_{10})$.

于是

$$\begin{aligned}&\{i_1,i_2,\cdots,i_{10}\}\\=&\{j_1,j_2,\cdots,j_{10}\}\\=&\{1,2,\cdots,10\}.\\&\{i_1+j_1)+(i_2+j_2)+\cdots+(i_{10}+j_{10}\}\\=&2(1+2+\cdots+10)\\=&110.\end{aligned}$$

由于 10 个 $(i_k+j_k)$ 的和为偶数，所以 $\{i_k+j_k)$ 为奇数的必有偶数个. 因此必取出偶数个黑方块，从而亦取出偶数个白方块.

对 $k$ 为偶数的情况亦有同样的结论.

综上所述，对一切 $k=1,2,\cdots,10$，都有

(1) $a_k,b_k$ 皆为偶数.

(2) $a_k+b_k=10$.

如果记 $A_2=\sum_{k=1}^{5}a_{2k}$，$B_2=\sum_{k=1}^{5}b_{2k}$ 就有，$B_2$ 为偶数，且

$$A_2+B_2=50.$$

另一方面，如果将所取出的小正方块按其原来的位置都投影到第一层，则它们刚好盖满该层，且无重叠. 考虑到黑白颜色分布，就有

$$A_1+B_2=50$$

其中 $A_1=\sum_{k=1}^{5}a_{2k-1}$.

于是，有 $\sum_{k=1}^{10}a_k=A_1+A_2=100-2B_2$.

由于 $B_2$ 是偶数，则 $100-2B_2$ 是 4 的倍数，因而 $\sum_{k=1}^{10}a_k$ 是 4 的倍数. 即所取出的黑色正方体的数目是 4 的倍数.

**[证 2]** 令每一小方块对应一个三元有序正整数组 $(i,j,k)$，即该小方块位于第 $k$ 层，第 $i$ 行，第 $j$ 列，且设 $i+j+k$ 为奇数时是黑方块，

$i+j+k$ 为偶数时是白方块.

设所取出的 100 个正方块所对应的数组为

$$(i_1,j_1,k_1),\quad (i_2,j_2,k_2),\quad \cdots,\quad (i_{100},j_{100},k_{100}).$$

于是, 数组 $\{i_1,i_2,\cdots,i_{100}\}$, $\{j_1,j_2,\cdots,j_{100}\}$, $\{k_1,k_2,\cdots,k_{100}\}$ 都是由 10 个 1,10 个 2,…,10 个 10 组成.

数对组 $\{(i_1,j_1),(i_2,j_2),\cdots,(i_{100},j_{100})\}$ 恰为集合

$$\{(i,j) \mid i,j=1,2,\cdots,10\}$$

同样, 数对组 $\{(i_1,k_1),(i_2,k_2),\cdots,(i_{100},k_{100})\}$ 和数对组 $\{(j_1,k_1),(j_2,k_2),\cdots,(j_{100},k_{100})\}$ 同样如此. 因此有

$$\begin{aligned} S &= \sum_{r=1}^{100}(i_r+j_r+k_r)^2 \\ &= 30\sum_{r=1}^{10}r^2+6\sum_{1\leqslant i,j\leqslant 10} i\cdot j \\ &\equiv 0 \pmod 4). \end{aligned} \qquad ①$$

设 $S$ 的 100 个加项中有 $a$ 个奇数, $100-a$ 个偶数. 由于奇数的平方被 4 除余 1, 偶数的平方被 4 除余 0, 则

$$S\equiv a \pmod 4. \qquad ②$$

由 ①, ② 即知

$$a\equiv 0 \pmod 4.$$

因此, 所取出的黑色小正方块的数目 $a$ 是 4 的倍数.

7·35　在国际象棋盘上放着 8 个棋子: 每一横行和每一纵列中都恰有一个棋子. 证明在国际象棋盘上的所有黑格中共有偶数个棋子.

（第 23 届全苏数学奥林匹克, 1989 年）

[证]　把棋盘从角上的白格开始, 顺次给横行与纵列编号, 这样棋盘上每一方格都有两个坐标 $(i,j)$, $i$ 是所在的行, $j$ 是所在的列.

对于白格来说, 这两个坐标之和 $i+j$ 是偶数.

对于黑格来说, 这两个坐标之和 $i+j$ 是奇数.

由于 8 个棋子所在的 8 个格子的坐标之和是偶数 $2(1+2+\cdots+8)$, 所以这 8 个格子中只可能有偶数个黑格.

7·36　3 架自动机在卡片上打印自然数数对. 自动机按以下方式工作: 第一架自动机读完卡片 $(a,b)$ 后输出新的卡片 $(a+1,b+1)$, 第

二架自动机读完卡片$(a,b)$后输出新的卡片$(\frac{a}{2},\frac{b}{2})$.(仅当$a,b$同为偶数时,它才工作),第三架自动机每次读两张卡片$(a,b)$和$(b,c)$,输出新的卡片是$(a,c)$,此外,自动机能退回所有读过的卡片.

假设有一张初始卡片(5,19),问:能否利用任何类型的自动机得到卡片:

(1)(1,50)?

(2)(1,100)?

(3)假设有初始卡片$(a,b)$,$a<b$,而我们想得到卡片$(1,n)$.问:$n$取何值时能做到这一点?

(第12届全苏数学奥林匹克,1978年)

**[解]** (1)可以得到.

我们用Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ表示自动机的编号,并把操作过程用箭头表示,箭头上方注明的是自动机的编号.

首先得到卡片(1,8).

$$(5,19)\xrightarrow{\text{Ⅰ}}(6,20)\xrightarrow{\text{Ⅱ}}(3,10)\xrightarrow{\text{Ⅰ}}(4,11)\xrightarrow{\text{Ⅰ}}(5,12)\xrightarrow{\text{Ⅰ}}\cdots$$

$$\left.\begin{matrix}\xrightarrow{\text{Ⅰ}}(10,17)\\(3,10)\end{matrix}\right\}\xrightarrow{\text{Ⅲ}}(3,17)\xrightarrow{\text{Ⅰ}}(4,18)\xrightarrow{\text{Ⅱ}}(2,9)\xrightarrow{\text{Ⅰ}}(3,10)\xrightarrow{\text{Ⅰ}}(4,11)\xrightarrow{\text{Ⅰ}}\cdots$$

$$\left.\begin{matrix}\xrightarrow{\text{Ⅰ}}(9,16)\\(2,9)\end{matrix}\right\}\xrightarrow{\text{Ⅲ}}(2,16)\xrightarrow{\text{Ⅱ}}(1,8).$$

进一步有

$$\left.\begin{matrix}(1,8)\\(8,15)\end{matrix}\right\}\xrightarrow{\text{Ⅲ}}\left.\begin{matrix}(1,15)\\(15,22)\end{matrix}\right\}\xrightarrow{\text{Ⅲ}}\left.\begin{matrix}(1,22)\\(22,29)\end{matrix}\right\}\xrightarrow{\text{Ⅲ}}(1,29)\rightarrow\cdots\rightarrow(1,1+7k).$$

所以能得到(1,50).

(2)不能得到(1,100).

由(1)可知,(5,19)上两数之差是7的倍数,而在三台自动机的任何运算中,卡片上两数之差都是7的倍数,而$100-1=99$不能被7整除.

(3)设$d$是$b-a$的最大奇因数,那么仅当$n=1+dk(k\in N)$时,

从卡片$(a,b)$可以得到卡片$(1,n)$.

由(2)知,若从$(a,b)$得到$(1,n)$,则$n-1=dk$.

现在我们证明从$(a,b)$可以得到$(1,1+d)$.

如果$a$和$b$的奇偶性相同,那么将完成以下运算:

$$(a,b)\to\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)\quad 或\quad (a,b)\to\left(\frac{a+1}{2},\frac{b+1}{2}\right).$$

这就给出了其差缩小$\frac{1}{2}$的两个数.

对于$(a,a+d)$,可以完成以下运算

$$(a,\ a+d)\xrightarrow{\text{I}}(a+1,\ a+1+d)\xrightarrow{\text{I}}\cdots\xrightarrow{\text{I}}\left.\begin{matrix}(a+d,\ a+2d)\\(a,\ a+d)\end{matrix}\right\}\xrightarrow{\text{III}}$$

$(a,a+2d)$.

进一步有$\to\left(\frac{a}{2},\quad\frac{a}{2}+d\right)$或者$\quad\to\left(\frac{a+1}{2},\quad\frac{a+1}{2}+d\right)$.

这就给出了其差相等的两个数,并且当$a>1$时,将$a$变小了.

重复以上一系列运算,如同(1)可得到$(1,\ 1+d)$,进而能得$(1,\ 1+dk)$,即$(1,n)$.

7·37　在黑板上写着若干个0,1,2,可以擦去其中两个不相等的数字,并代之以与擦去的数字不相同的数字(例如,用2代替0和1,用0代替1和2,用1代替0和2).

证明如果经过若干步这样的运算后在黑板上还有一个数,那么这个数与擦去数字的先后次序无关.

(第9届全苏数学奥林匹克,1975年)

[证]　设0的个数为$p$,1的个数为$q$,2的个数为$r$.

由题设,每一步操作,所有三个数$p,q,r$都增加或减少1.因而$p$,$q$和$r$的奇偶性也随之改变.当黑板上只剩下一个数字时,$p,q$和$r$中的一个变为1,而另外两个变为0.即一个为奇数,两个为偶数.这就说明,一开始时,这三个数$p,q$和$r$中必有一个数的奇偶性与另外两个数的奇偶性不同,这个数所对应的数字就留在黑板上,因此,黑板上留下的那个数只与$p,q$和$r$的奇偶性有关,而与擦去的数字的先后次序无关.

7·38　在黑板上写有自然数:

$$1,2,3,\cdots,n. \quad n \geqslant 3.$$

每一次允许擦去其中任何两个数字 $p$ 与 $q$，而代之以 $p+q$ 和 $|p-q|$. 经过这样若干次改写之后，黑板上所有的数字全都变成 $k$.

试问：$k$ 可能取哪些值？

（第25届全苏数学奥林匹克，1991年）

**[解]** 设 $s$ 是任何一个满足不等式 $2^s \geqslant n$ 的自然数.

在每一步之后，黑板上所写的数都是非负整数.

如果两个非负整数的和与差都是某个奇数 $d$ 的倍数，那么这两个数本身也都是 $d$ 的倍数.

因此，如果数 $k$ 是奇数 $d(d>1)$ 的倍数，那么，一开始写在黑板上的数就应该是奇数 $d$ 的倍数，然而这是不可能的.因为一开始有1，1就不是 $d(d>1)$ 的倍数.

因此，$k$ 不能含有奇的素因数，即 $k=2^s$.

由于在每一步之后，黑板上的数中的最大值不会下降，于是 $k \geqslant n$.

下面证明 $k$ 可为任何不小于 $n$ 的 $2^s$.

由题设，可由数对 $(2^a,2^a)$ 得到数对 $(0,2^{a+1})$，也可由数对 $(0,2^c)$ 得到数对 $(2^c,2^c)$.

因此，如果在黑板上写有一组由2的方幂组成的数，它们的指数都不超过 $s_0$，而其中又有两个相等的小于 $2^{s_0}$ 的数，那么经过几步之后，就可以使所有的数全部变成为 $2^{s_0}$.

下面用数学归纳法证明：由数组 $1,2,\cdots,n$ 出发，由题设的变换要求，总可以得到全由2的方幂组成的数组.

(1) 当 $n=3$ 时，由1，2，3可得

$$(1,2,3) \to (4,2,2) \to (4,4,0) \to (8,0,0) \to (8,8,0) \to (8,8,8).$$

（或由 $(4,4,0) \to (4,4,4)$）.

(2) 假设结论对 $3 \leqslant n \leqslant m$ 的所有 $n$ 都成立.下面证明 $n=m+1$ 时结论成立.

如果 $m+1 \leqslant 8$，可直接验证.

现设 $\quad m+1=2^t+b$，其中 $1 \leqslant b \leqslant 2^t$，$\quad t \geqslant 3$.

我们对 $p=2^t-u$，$\quad q=2^t-u$，其中 $1 \leqslant u \leqslant b$，（当 $b=2^t$ 时，

$1 \leqslant u \leqslant b-1$) 作题目要求的变换.

这样可得到如下三部分数所构成的数组:

第一组:$\{1,2,\cdots,2^t-b-1\}$. 当 $b=2^t$ 和 $b=2^t-1$ 时,这一组数不存在;

第二组:$\{2,4,\cdots,2b\}$(由差 $|p-q|$ 得出);

第三组:$\{2^t,2^{t+1},\cdots,2^{t+1}\}$(由和 $p+q$ 及 $2^t$ 得出).

如果第一组,第二组这两部分数各不少于3个($3 \leqslant b \leqslant 2^t-4$),则可分别用归纳假设.

如果只有其中一组的数不少于 3 个,那么可对该组用归纳假设,而另二组一定都是 2 的幂.

如果第一组与第二组的数均少于 3 个,那么不可能有 $t \geqslant 3$,因为这时由

$$\begin{cases}2^t-b-1 \leqslant 2,\\ 2b \leqslant 4,\end{cases}$$

可得
$$2^t \leqslant 5, \quad t<3.$$

于是由数学归纳法证明了 $1,2,\cdots,n$ 可以由题设的变换得到全部由 2 的幂构成的数组.

因此,$k$ 能够取任何不小于 $n$ 的 $2^s$.

**7·39** 证明如果 $a$ 和 $b$ 是两个奇整数,那么,在而且仅仅只有在 $a-b$ 能被 $2^n$ 整除时, $a^3-b^3$ 才能被 $2^n$ 整除.

(匈牙利数学奥林匹克,1908 年)

**[证]** 由于

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2).$$

当 $2^n \mid a-b$ 时,有

$$2^n \mid a^3-b^3.$$

反之,当 $2^n \mid a^3-b^3$ 时,由于 $a$ 和 $b$ 是奇数,则 $a^2+ab+b^2$ 是奇数,因而
$$(2^n,a^2+ab+b^2)=1.$$

于是
$$2^n \mid a-b.$$

因而 $2^n \mid a-b \Longleftrightarrow 2^n \mid a^3-b^3$($a,b$ 为奇数).

**7·40** 设 $r$ 为正整数. 定义数列 $\{a_n\}$ 如下:

$a_1=1$,且对每个正整数 $n$,

$$a_{n+1}=\frac{na_n+2(n+1)^{2r}}{n+2}.$$

证明每个 $a_n$ 都是正整数,并且确定对哪些 $n$,$a_n$ 是偶数.

(第 1 届中国台北数学奥林匹克,1992 年)

[证] 由已知,有

$$(n+2)a_{n+1}=na_n+2(n+1)^{2r},$$

两边同乘以 $n+1$,得

$$(n+2)(n+1)a_{n+1}=n(n+1)a_n+2(n+1)^{2r+1}.$$

令 $b_n=(n+1)na_n \quad (n=1,2,\cdots)$,使得

$$b_{n+1}=b_n+2(n+1)^{2r+1},\quad (n=1,2,\cdots).$$

或 $$b_k-b_{k-1}=2k^{2r+1}\quad (k=2,3,\cdots). \qquad ①$$

于是 $$\begin{aligned} b_n &= \sum_{k=2}^{n}(b_k-b_{k-1})+b_1 \\ &= \sum_{k=2}^{n}2k^{2r+1}+2 \quad (b_1=(1+1)\cdot 1\cdot a_1=2). \\ &= 2\sum_{k=1}^{n}k^{2r+1} \\ &= 2n^{2r+1}+\sum_{k=1}^{n-1}k^{2r+1}+\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)^{2r+1} \\ &= 2n^{2r+1}+\sum_{k=1}^{n-1}[k^{2r+1}+(n-k)^{2r+1}]. \end{aligned}$$

注意到 $2r+1$ 是奇数,故

$$k+(n-k)\mid k^{2r+1}+(n-k)^{2r+1}.$$

即 $$n\mid k^{2r+1}+(n-k)^{2r+1}.$$

所以 $$n\mid b_n.$$

再将 $b_n$ 改写成

$$\begin{aligned} b_n &= \sum_{k=1}^{n}k^{2r+1}+\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)^{2r+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n}[k^{2r+1}+(n+1-k)^{2r+1}]. \end{aligned}$$

所以 $$n+1 \mid b_n.$$

由于$(n,n+1)=1$,则
$$n(n+1) \mid b_n.$$

从而
$$a_n=\frac{b_n}{(n+1)n} \quad (n=1,2,\cdots)$$
是正整数.

为了确定 $a_n$ 的奇偶性,先证明下面的结论:
$$\frac{b_n}{n}=\begin{cases}偶数,若\ n\equiv 0 \pmod 4,\\ 奇数,若\ n\equiv 2 \pmod 4.\end{cases}$$

事实上,由 $n$ 是偶数,故
$$\begin{aligned}b_n&=2\sum_{k=1}^{n}k^{2r+1}\\&=2n^{2r+1}+2\sum_{k=1}^{n-1}k^{2r+1}\\&=2n^{2r+1}+2\sum_{k=1}^{\frac{n-2}{2}}[k^{2r+1}+(n-k)^{2r+1}]+2(\frac{n}{2})^{2r+1}.\end{aligned}$$
$$\frac{b_n}{n}=2n^{2r}+2\sum_{k=1}^{\frac{n-2}{2}}\frac{k^{2r+1}+(n-k)^{2r+1}}{n}+\frac{1}{n}\cdot 2(\frac{n}{2})^{2r+1}.$$

因而$\frac{b_n}{n}$与$\frac{1}{n}\cdot 2(\frac{n}{2})^{2r+1}=(\frac{n}{2})^{2r}$有相同的奇偶性.而

当 $n\equiv 0 \pmod 4$ 时,$(\frac{n}{2})^{2r}$ 为偶数.

当 $n\equiv 2 \pmod 4$ 时,$(\frac{n}{2})^{2r}$ 为奇数.

结论得证.

最后,利用上述结论来分析 $a_n$ 的奇偶性.

(1) 若 $n\equiv 0 \pmod 4$,由于 $a_n$ 是正整数,故
$$a_n=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{b_n}{n}=\frac{偶数}{奇数}=偶数.$$

(2) 若 $n\equiv 1 \pmod 4$,则
$$n+1\equiv 2 \pmod 4.$$

数论卷

于是由 ① 式有

$$a_n=\frac{b_n}{(n+1)n}$$
$$=\frac{b_{n+1}-2(n+1)^{2r+1}}{n+1}\cdot\frac{1}{n}.$$
$$=\text{奇数}-\text{偶数}$$
$$=\text{奇数}.$$

(3) 若 $n\equiv 2 \pmod 4$,同理可知 $a_n$ 为奇数.

(4) 若 $n\equiv 3 \pmod 4$,同理可知 $a_n$ 为偶数.

综合以上,当且仅当 $n\equiv 0$ 或 $3 \pmod 4$ 时,$a_n$ 为偶数.

7·41　一个自然数能表为两个自然数的平方差,则称这个数为"智慧数",比如 $16=5^2-3^2$,16 就是一个"智慧数",在自然数列中,从 1 开始的第 1990 个"智慧数"是哪个数?并请你说明理由.

(中国北京市高中一年级数学竞赛,1990 年)

[解] (1)1 不能表为两个自然数的平方差,所以 1 不是"智慧数";

(2) 对于大于 1 的奇自然数 $2k+1$,有

$$2k+1=(k+1)^2-k^2.$$

所以,大于 1 的奇自然数都是"智慧数";

(3) 由于 $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$,$x+y$ 与 $x-y$ 有相同的奇偶性,所以乘积 $(x+y)(x-y)$ 或者为奇数,或者为 4 的倍数.因而 $4k+2$ 型的数不是"智慧数";

(4) 对于 $4k(k>1)$ 型的自然数,有

$$4k=(k+1)^2-(k-1)^2.$$

所以 $4k(k>1)$ 型的自然数是"智慧数",

但 $k=1$ 时,$4k=4$ 不是"智慧数".

所以,在 1,2,3,4 中只有 3 是"智慧数",在以后的每一组数:$4k+1,4k+2,4k+3,4k+4(k=1,2,\cdots)$ 中都有 3 个"智慧数".

由于 $1989=3\cdot 663$,所以第 1990 个"智慧数"应在 $4\cdot 663=2652$ 个数之后产生.

而 2652 为第 1987 个"智慧数",2653 为第 1988 个"智慧数",2654 不是"智慧数",2655 为第 1989 个"智慧数",2656 为第 1990 个"智慧数".

7·42　设 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{1979}$ 是 $1,2,\cdots,1979$ 这些自然数的任一

排列,为了配对,令 $a_{1980}=0$. 从计算 $b_i=|a_{2i-1}-a_{2i}|$ 得到数列

$$b_1,b_2,\cdots,b_{990}.$$

再从计算 $c_i=|b_{2i-1}-b_{2i}|$ 得到数列

$$c_1,c_2,\cdots,c_{495}.$$

为了配对,令 $c_{496}=0$,从计算 $d_i=|c_{2i-1}-c_{2i}|$ 得到数列 $d_1,d_2,\cdots,d_{298}$……,如此一直算下去(如下图所示),最后得到一个数 $x$. 求证:$x$ 是偶数.

$$a_1\quad a_2\qquad\qquad a_3\quad a_4\qquad\qquad a_5\quad a_6\qquad\qquad a_7\quad a_8\cdots$$

$$b_1=|a_1-a_2|\quad b_2=|a_3-a_4|\quad b_3=|a_5-a_6|\quad b_4=|a_7-a_8|\cdots$$

$$c_1=|b_1-b_2|\qquad\qquad c_2=|b_3-b_4|\cdots$$

$$d_1=|c_1-c_2|\cdots$$

(中国北京市高中数学竞赛,1979年)

[证 1] 最后一次的得数一定可以写成

$$x=\sum_{i=1}^{1979}x_ia_i,\text{其中 } x_i=\pm 1.$$

把其中所有正项之和记为 $S_1$,所有负项之和记为 $-S_2(S_2>0)$,则

$$\begin{cases}S_1+S_2=\sum\limits_{i=1}^{1979}a_i=\sum\limits_{i=1}^{1979}i=\dfrac{(1979+1)\cdot 1979}{2}=1979\cdot 990,\\ S_1-S_2=x.\end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned}x&=2S_1-(S_1+S_2)\\&=2S_1-1979\cdot 990\\&=2(S_1-1979\cdot 495).\end{aligned}$$

所以,$x$ 必为偶数.

[证 2] 考虑另一种配对运算:

从 $b_i'=a_{2i-1}+a_{2i}$ 得到数列

$$b_1',b_2',\cdots,b'_{990}.$$

从 $c_i'=b'_{2i-1}+b'_{2i}$ 得到数列

$$c_1',c_2',\cdots,c'_{495}.$$

……,一直算下去,得到一个数 $x'$.

显然 $x'$ 就是 $a_1,a_2,\cdots,a_{1979}$ 所有各数之和.

$$x' = \sum_{i=1}^{1979} a_i = 1979 \cdot 990$$



是偶数.

对任意两个整数 $m$ 和 $n$, $|m-n|$ 与 $m+n$ 的奇偶性相同,由此 $b_i$ 和 $b_i'$ 的奇偶性相同, $i=1,2,\cdots,990$.

$c_i$ 和 $c_i'$ 的奇偶性相同, $i=1,2,\cdots,495$.

一直推算下去,最后 $x$ 和 $x'$ 的奇偶性相同.

所以, $x$ 是偶数.

**[证 3]** 假设最后一个数 $x$ 是奇数.

注意到每个奇数是由一个奇数与一个偶数相减得出来的,而每个偶数则是由两个奇数或者两个偶数相减得出来的.

这样,倒数第二行必为一个奇数,一个偶数.

倒数第三行的四个数必有奇数个(一个或三个)奇数.

同理,倒数第四行的八个数必有奇数个奇数.

由此倒推上去,则第一行应有奇数个奇数.然而 1,2,…,1979 中共有 990 个奇数,出现矛盾.

所以, $x$ 是偶数.

7·43　证明,如果对于自然数 $n$ 和 $m$ 成立等式 $2m=n^2+1$,则 $m$ 可以表示为两个完全平方数之和.

(乌克兰数学奥林匹克,1992 年)

**[证]** 由等式 $2m=n^2+1$ 可知, $n$ 为奇数,于是可设 $n=2k-1$, $k$ 为自然数,则

$$\begin{aligned} 2m &= (2k-1)^2+1 \\ &= 2(2k^2-2k+1), \end{aligned}$$

即
$$m = k^2+(k-1)^2.$$

从而 $m$ 可表为两个完全平方数之和.

7·44　设 $a,b,c,d$ 为奇数, $0<a<b<c<d$,且 $ad=bc$.试证如果 $a+d=2^k$, $b+c=2^m$,其中 $k,m$ 为整数,则 $a=1$.

(第 25 届国际数学奥林匹克,1984 年)

**[证]** 先证 $k>m$.

由 $a<b<c<d$ 得 $d-a>c-b$.

则
$$(a+d)^2 = 4ad+(a-d)^2$$

$$= 4bc + (a-d)^2$$
$$> 4bc + (c-b)^2$$
$$= (b+c)^2.$$

于是 $$2^k > 2^m, k > m.$$

因为 $ad = bc$,则

$$a(2^k - a) = b(2^m - b).$$
$$2^m b - 2^k a = (b-a)(b+a),$$
$$2^m(b - 2^{k-m}a) = (b-a)(b+a). \qquad ①$$

因为 $a,b$ 是奇数,则 $b - 2^{k-m}a$ 是奇数.

又因为 $(b+a)-(b-a)=2a$ 是一个奇数的 2 倍,所以 $b+a$ 与 $b-a$ 不可能都是 4 的倍数,也不可能都是 $4k+2$ 型的偶数.

设 $e \cdot f = b - 2^{k-m}a$,则 $e,f$ 都是奇数.

由 ① 式可得

$$\begin{cases} b+a = 2^{m-1}e \\ b-a = 2f \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} b+a = 2f \\ b-a = 2^{m-1}e. \end{cases}$$

注意到

$$ef = b - 2^{k-m}a \leqslant b - 2a < b - a \leqslant 2f,$$

则 $$e = 1, \quad f = b - 2^{k-m}a.$$

从而方程组化为

$$\begin{cases} b+a = 2^{m-1} \\ b-a = 2(b - 2^{k-m}a) \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} b+a = 2(b-2^{k-m}a) \\ b-a = 2^{m-1} \end{cases}$$

将每一方程组中的两个方程左右分别相加,都得到

$$a \cdot 2^{k-m+1} = 2^{m-1}.$$

于是 $$a = 1.$$

**7·45** 证明当 $n,k$ 都是给定的正整数,且 $n>2,k>2$ 时,$n(n-1)^{k-1}$ 可以写成 $n$ 个连续偶数的和.

(中国高中数学联赛,1978 年)

**[证]** 设 $n$ 个连续偶数为

$$2a, 2a+2, 2a+4, \cdots, 2a+2(n-1).$$

则 $$S_n = \frac{[2a+2a+2(n-1)]n}{2} = [2a+(n-1)]n.$$

由题设,令 $$[2a+(n-1)]n = n(n-1)^{k-1}.$$

则 $$2a+(n-1)=(n-1)^{k-1}.$$
$$2a=(n-1)^{k-1}-(n-1).$$
$$a=\frac{1}{2}(n-1)[(n-1)^{k-2}-1].$$

当 $n$ 为大于 2 的奇数及 $k>2$ 时，$(n-1)$ 为偶数，$(n-1)^{k-2}-1$ 为正整数，所以 $a$ 为正整数.

当 $n$ 为大于 2 的偶数及 $k>2$ 时，$(n-1)^{k-2}-1$ 为偶数，$n-1$ 为正整数，所以 $a$ 也为正整数.

所以 $n(n-1)^{k-1}$ 可以写成从 $(n-1)[(n-1)^{k-2}-1]$ 开始的 $n$ 个连续偶数之和，即

$$n(n-1)^{k-1}=\sum_{j=0}^{n-1}\{(n-1)[(n-1)^{k-2}-1]+2j\}.$$

7·46　给定方程组

$$\begin{cases} y-2x-a=0. & ① \\ y^2-xy+x^2-b=0. & ② \end{cases}$$

其中 $a,b$ 是整数，$x$ 和 $y$ 是未知数.

证明如果这个方程组有一组有理数解，那么这组有理数一定是整数.

（匈牙利数学奥林匹克，1917 年）

［证］　由 ① 得　$x=\frac{y-a}{2}$，　③

将 ③ 代入 ② 得　$y^2-y\cdot\frac{y-a}{2}+(\frac{y-a}{2})^2-b=0.$

整理得 $$3y^2=4b-a^2,$$
$$(3y)^2=3(4b-a^2).\qquad ④$$

假设 $x$ 和 $y$ 是满足方程组 ① 和 ② 的有理数，因而 $x$ 和 $y$ 也满足方程 ③ 和 ④.

因为 $a$ 与 $b$ 是整数，则 ④ 式右边也是整数，于是 $(3y)^2$ 为整数，因此 $3y$ 也必须是整数.

又因为 ④ 式右边是 3 的倍数，从而 $(3y)^2$ 也能被 3 整除，因此 $3y$ 也必须是 3 的倍数，于是 $y$ 是整数.

下面再证明 $x$ 是整数.

由④式可得 $$(3y)^2+3a^2=12b,$$
$$3y^2+a^2=4b.$$

由于 $4b$ 是偶数，则 $3y^2$ 与 $a^2$ 必须同为奇数或同为偶数，于是 $y$ 和 $a$ 也同为奇数或同为偶数.

于是，$y-a$ 为偶数，$x=\frac{y-a}{2}$ 为整数.

7·47 证明如果 $p$ 是大于1的整数，那么 $3^p+1$ 不可能被 $2^p$ 整除.

（匈牙利数学奥林匹克，1911年）

[证] 当 $p$ 是偶数时，设 $p=2m$，则

$$\begin{aligned}&3^p+1\\=&3^{2m}+1\\=&(8+1)^m+1\\=&8M+2\\=&2(4M+1).\end{aligned}$$

其中 $M$ 是整数，从而由 $4M+1$ 是奇数得

$$2\mid 3^p+1 \quad 且 \quad 2^2\nmid 3^p+1.$$

当 $p$ 是奇数时，设 $p=2m+1$，则

$$\begin{aligned}&3^p+1\\=&3^{2m+1}+1\\=&3(8+1)^m+1\\=&3(8M+1)+1\\=&4(6M+1).\end{aligned}$$

其中 $M$ 是整数，从而由 $6M+1$ 是奇数得

$$2^2\mid 3^p+1,2^3\nmid 3^p+1.$$

于是，当 $p$ 是偶数时，$3^p+1$ 能被2整除，当 $p$ 是奇数时，$3^p+1$ 能被 $4=2^2$ 整除，但在这种情形中，$3^p+1$ 都不能被2的任何更高次幂整除.

因此对大于1的整数 $p$，$3^p+1$ 不可能被 $2^p$ 整除.

7·48 假设 $a_1,b_1,c_1,a_2,b_2,c_2$ 是这样的实数，使得对于任何整数 $x$ 和 $y$，数 $a_1x+b_1y+c_1$ 和 $a_2x+b_2y+c_2$ 中至少有一个是偶整数.

证明两组系数 $a_1,b_1,c_1$ 和 $a_2,b_2,c_2$ 中至少有一组全是整数.

（匈牙利数学奥林匹克，1950 年）

数论卷

［证］ 对于所研究的表达式中的 $(x,y)$，用 $(1,0)$，$(0,0)$ 和 $(-1,0)$ 代入，这时，表达式

$$a_1x+b_1y+c_1 \quad 和 \quad a_2x+b_2y+c_2$$

中的某一个至少有两次取得偶数值.

这样一来，在数 $a+c$，$c$，$-a+c$ 中，至少有两个取偶数值，因此至少有两个数的差是偶数. 由于这三个数中任何两个数的差或者等于 $a$，或者等于 $2a$，于是 $a$ 或 $2a$ 为偶数，从而 $a$ 是整数.

在同一表达式 $a+c$ 或 $-a+c$ 中，由于它们至少有一个整数，且 $a$ 是整数，则 $c$ 是整数.

于是，两个表达式中的某一个表达式的系数 $a$ 和 $c$ 是整数.

利用类似的方法，对 $(x,y)$ 代之以数对 $(0,1)$，$(0,0)$，$(0,-1)$，可以证明：在两个表达式中的某一个表达式的系数 $b$ 和 $c$ 也是整数.

如果上述两种情况下，$a,c$ 为整数及 $b,c$ 为整数的是同一表达式，则这个表达式的系数 $a,b,c$ 是整数，如果在一个表达式中 $a$ 和 $c$ 是整数，而在另一个表达式中 $b$ 和 $c$ 是整数，这时再用 $x=1$，$y=1$ 代入两个表达式，则 $a+b+c$ 是整数，因而系数 $a,b,c$ 都是整数.

**7·49** 在两个大小为 $1982\times1983$ 的方格纸上，每一个小格（$1\times1$ 的正方形）中涂上红色或蓝色，使得每一行和每一列上都有偶数个小格涂上蓝色，把这两张方格纸叠在一起，若其中有一个蓝小格与红小格重叠. 证明：还至少存在三个由两种不同颜色相叠而成的小格.

（基辅数学奥林匹克，1983 年）

［证］ 设第一张方格纸上的蓝格 $A$ 与第二张方格纸上的红格 $A'$ 重叠.

如果第一张纸上 $A$ 所在的列中，其余的蓝格（还有奇数个）均与第二张纸上的蓝格重合，那么由于第二张上这一列的蓝格的个数为偶数，所以必有一蓝格与第一张纸上的红格重叠，即在这一列，第一张纸上有一红方格 $B'$ 与第二张纸上的蓝格 $B$ 重合.

再考查 $A$ 和 $A'$ 所在的行，还有一对红格 $C'$ 和蓝格 $C$ 重叠.

同样，$B$ 和 $B'$ 所在的行，也有一对红格 $D'$ 和蓝格 $D$ 重叠.

即除 $A$ 和 $A'$ 之外，还有三对不同颜色的方格重叠.

7·50　设 $a,b,c,d$ 是自然数,并且

$$a^2+b^2=c^2+d^2.$$

证明 $a+b+c+d$ 一定是合数.

（中国北京市初中二年级数学竞赛,1990 年）

[证]　因为 $a,b,c,d$ 是自然数,所以

$$a^2-a,\quad b^2-b,\quad c^2-c,\quad d^2-d$$

都是偶数,因此,

$$(a^2-a)+(b^2-b)+(c^2-c)+(d^2-d)$$

也是偶数,设为 $M$,则

$$M=(a^2+b^2+c^2+d^2)-(a+b+c+d)$$

是偶数.

又 $$a^2+b^2=c^2+d^2,$$

则 $$M=2(a^2+b^2)-(a+b+c+d).$$

则　$a+b+c+d$ 是偶数,因而一定是合数.

7·51　设 $a,b,c$ 为自然数,使得

$$p=b^c+a,\quad q=a^b+c,\quad r=c^a+b,$$

且 $p,q,r$ 为素数.

证明 $p,q,r$ 中必有两数相等.

（第 38 届莫斯科数学奥林匹克,1975 年）

[证]　在三个自然数 $a,b,c$ 中一定有两个具有相同的奇偶性,不妨设 $a$ 和 $b$ 有相同的奇偶性.

又因为 $b^c$ 与 $b$ 有相同的奇偶性,从而 $b^c$ 与 $a$ 有相同的奇偶性.

于是 $p=b^c+a$ 是偶数,又 $p$ 是素数,则必有 $p=2$.

因此 $$a=b=1.$$

这时 $$q=a^b+c=1^1+c=c+1,$$

$$r=c^a+b=c^1+1=c+1.$$

因此 $q$ 和 $r$ 相等.

7·52　设 $k$ 和 $l$ 为正整数,证明存在一个正整数 $M$,使得对于所有 $n>M$, $(k+\frac{1}{2})^n+(l+\frac{1}{2})^n$ 不是整数.

（澳大利亚数学竞赛,1992 年）

[证]　由于

$$(k+\frac{1}{2})^n+(l+\frac{1}{2})^n$$
$$=\frac{(2k+1)^n+(2l+1)^n}{2^n}.$$

因此，当且仅当

$2^n \mid (2k+1)^n+(2l+1)^n$ 时，$(k+\frac{1}{2})^n+(l+\frac{1}{2})^n$

是整数.

因为 $(2k+1)^n+(2l+1)^n \equiv 2n(k+l)+2 \pmod 4$.

于是，要使 $2^n$ 整除 $(2k+1)^n+(2l+1)^n$，$n$ 必定为奇数. 这时

$$(2k+1)^n+(2l+1)^n$$
$$=(2k+2l+2)[(2k+1)^{n-1}-(2k+1)^{n-2}(2l+1)+\cdots$$
$$+(2l+1)^{n-1}].$$

上式右边第二个因式是 $n$ 个奇数之和，因此第二个因式为奇数.

因此，$2^n \mid (2k+1)^n+(2l+1)^n$，当且仅当 $2^n$ 整除 $2(k+l+1)$.

当我们取 $M$ 为 $2^n$ 整除 $2(k+l+1)$ 的最大的 $n$ 值，则当 $n>M$ 时，$(k+\frac{1}{2})^n+(l+\frac{1}{2})^n$ 不是整数.

7·53　$A$ 是一个16位的正整数. 证明可以从 $A$ 中取出连续若干位数码，使得其乘积是完全平方数. 例如，$A$ 中某位数码是4，就取这个数码.

（日本数学竞赛，1991年）

［证］　设 $A=\overline{a_1a_2\cdots a_{16}}$，其中 $0\leqslant a_1,a_2,\cdots,a_{16}\leqslant 9$，$a_1\neq 0$.

由题设，若 $a_i=0,1,4,9$，则问题已得证.

今设 $A$ 中的数码只含有 2,3,5,6,7,8. 这时，$A$ 的连续若干位数码之积是形如

$$2^p3^q5^r7^s$$

的数.

为简化起见，对于 $p,q,r,s$，我们以1表示其中的奇数，以0表示其中的偶数，于是问题变为：证明存在四元有序数组 $(p,q,r,s)$ 为 $(0,0,0,0)$ 的情形.

首先，有序数组 $(p,q,r,s)$ 仅有 $2^4=16$ 种不同的情形. 再考察以下16个乘积

$$a_1, \quad a_1a_2, \quad a_1a_2a_3, \quad \cdots, \quad a_1a_2a_3\cdots a_{16}.$$

(1) 若其中有一个积是(0,0,0,0) 型,那么问题得证.

(2) 若其中没有一个积是(0,0,0,0) 型,那么根据抽屉原理,必有两个积对应的四元有序数组$(p,q,r,s)$的奇偶性相同,设这两个积为

$$a_1a_2\cdots a_i \quad 及\ a_1a_2\cdots a_j$$

其中 $1 \leqslant i < j \leqslant 16$.

则这两个积的商

$$\overline{a_{i+1}a_{i+2}\cdots a_j}$$

对应四元数组(0,0,0,0). 则$\overline{a_{i+1}a_{i+2}\cdots a_j}$为完全平方数.

7·54　若干个球分布在 $2n+1$ 个袋中,如果任意取走一个袋,总可以把剩下的 $2n$ 个袋分成两组,每组 $n$ 个袋,并且这两组的球的个数相等. 证明每个袋中的球的个数相等.

(意大利数学竞赛,1990 年)

[证]　用数

$$a_1, \quad a_2, \quad \cdots, \quad a_{2n}, \quad a_{2n+1}$$

分别表示这 $2n+1$ 个袋中球的个数.

显然 $a_i$ 是非负整数$(i = 1,2,\cdots,2n+1)$.

不妨设　$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_{2n+1}$.

于是本题化为:

有 $2n+1$ 个非负整数,如果从中任意取走一个数,剩下的 $2n$ 个数可以分成两组,每组 $n$ 个,且它们的和相等,求证这 $2n+1$ 个数都相等.

由题意,

$$2 \mid (a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n+1}) - a_i,$$
$$i = 1,2,\cdots,2n+1.$$

所以 $a_1,a_2,\cdots,a_{2n+1}$ 具有相同的奇偶性.

因此,把这 $2n+1$ 个数都减去 $a_1$ 之后所得到的 $2n+1$ 个数

$$0, a_2 - a_1, a_3 - a_1, \cdots, a_{2n+1} - a_1$$

也满足题意.

并且 $a_i - a_1 (i = 1,2,\cdots,2n+1)$ 为偶数.

于是　$0, \frac{a_2 - a_1}{2}, \frac{a_3 - a_1}{2}, \cdots, \frac{a_{2n+1} - a_1}{2}$ 也满足题意,并且也都

是偶数.

把它们再都除以 2,仍为偶数.

这个过程可以永远继续下去,所以

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_{2n} = a_{2n+1}.$$

即每个袋中的球数都相等.

7·55　设有 $2^n$ 个球分成了许多堆. 我们可以任意选甲乙两堆来按照以下规则挪动:若甲堆的球数 $p$ 不少于乙堆的球数 $q$,则从甲堆拿 $q$ 个球放到乙堆里去,这样算是挪动一次. 证明:可以经过有限次挪动把所有的球合并成一堆.

(中国北京市高中数学竞赛,1963 年)

[证 1]　用数学归纳法证明本题.

$n = 1$ 时,共有 $2^1 = 2$ 个球,可能只有一堆,不必挪动,可能分为两堆,每堆一个,挪动一次就并成一堆.

假设 $n = k$ 时命题成立,即 $2^k$ 个球分成许多堆之后,按规则经过有限次挪动能并成一堆.

当 $n = k + 1$ 时,$2^{k+1}$ 个球所分各堆的球数或是奇数,或是偶数. 奇数个球的堆数必是偶数(否则,总球数将是奇数与题设不合). 对奇数个球的许多堆,任意把它们两两配合,在每两堆之间挪动一次,从而使各堆的球数都变为偶数. 把每堆里的每两个球看作一个大球,则这时 $2^{k+1}$ 个球变成 $2^k$ 个大球.

根据归纳假设,这 $2^k$ 个大球总能按规则并成一堆,并成一堆之后,再把每一个大球分拆成两个小球,这时 $2^k$ 个大球又成为 $2^{k+1}$ 个球,并且并成了一堆.

于是对所有自然数 $n$,$2^n$ 个球可以按规则,经有限次挪动变成一堆.

[证 2]　假设 $2^n$ 个球最初分成了 $h$ 堆,设这 $h$ 堆的球数依次为

$$a_1, a_2, \cdots, a_h.$$

显然由　$a_1 + a_2 + \cdots + a_h = 2^n$ 可知,其中有偶数个 $a_i$ 为奇数. 把相应的奇数个球球堆两两配合,并按规则移动一次,这时总堆数 $k \leqslant h$,各堆的球数变为偶数. 设各堆的球数为

$$a_1', a_2', \cdots, a_k'. \qquad ①$$

由于 $a_i'$ 是偶数($i=1,2,\cdots,k$),则总存在一个整数 $p\geqslant 1$,使得 $2^p$ 能整除所有的 $a_i'$,而 $2^{p+1}$ 不能整除所有的 $a_i'$. 于是 ① 可以写为

$$2^pb_1,2^pb_2,\cdots,2^pb_k. \qquad ②$$

它们必须满足

$$2^p(b_1+b_2+\cdots+b_k)=2^n.$$

在此式中,$b_1,b_2,\cdots,b_k$ 必有奇数.

如果 $p=n$,则 $k=1$, $b_1=1$,此时,所有的球都已并入一堆.

如果 $p<n$,则有

$$b_1+b_2+\cdots+b_k=2^{n-p}.$$

于是,$b_1,b_2,\cdots,b_k$ 之中的奇数必有偶数个. 再把这些奇数按规则两两配合,挪动,每这样两堆移动一次,就使得各堆球数变为

$$2^pb_1',2^pb_2',\cdots,2^pb_l' \quad (l\leqslant k). \qquad ③$$

这时,$b_1',b_2',\cdots,b_l'$ 都是偶数,因此又存在整数 $q\geqslant 1$,使 $2^q$ 能整除所有的$b_i'(i=1,2,\cdots,l)$,但 $2^{q+1}$ 不能整除所有的 $b_i'$. 这样,③ 又可改写为

$$2^{p+q}c_1,\quad 2^{p+q}c_2,\quad \cdots,\quad 2^{p+q}c_l. \qquad ④$$

如果 $p+q=n$,那么 $l=1,c_1=1$,这些球已并成一堆.

如果 $p+q<n$,必然

$$c_1+c_2+\cdots+c_l=2^{n-(p+q)}.$$

这里,$c_1,c_2,\cdots,c_l$ 中的奇数有偶数个,再把奇数个球的堆两两配合挪动.

这样每调整一次,各堆能够提出的公因数(如 $2^p,2^{p+q}$)就加大一次,而且每次都至少乘一个因数 2,因此,必有一个时刻,使公因数变为 $2^n$,即并成一堆. 从而本题得证.

7·56　若有 $n$ 个整数$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足下面的等式

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=a_1a_2\cdots a_n=1990.$$

求最小的自然数 $n(n\geqslant 2)$.

(第 16 届全俄数学奥林匹克,1990 年)

[解]　由于 $a_1a_2\cdots a_n=1990$ 能被 2 整除,而不能被 4 整除,则在 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中只有一个偶数.

又由　$a_1+a_2+\cdots+a_n=1990$ 及 $a_i$ 中只有一个偶数可知 $n$ 为

奇数.

下面证明 $n \neq 3$.

不失一般性,设 $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3$.

由 $a_1 \geqslant \frac{1990}{3}$ 可知,$a_1$ 或者为 1990,或者为 995.

若 $a_1 = 1990$,则 $|a_2| = |a_3| = 1$,且 $a_2$ 与 $a_3$ 同号,但此时

$$a_1 + a_2 + a_3 \neq 1990.$$

若 $a_1 = 995$,则 $|a_2| \leqslant 2$, $|a_3| \leqslant 2$,于是

$$a_1 + a_2 + a_3 < 1990.$$

所以 $n \neq 3$.

若 $n = 5$,取 $a_1 = 1990$, $a_2 = a_3 = 1$, $a_4 = a_5 = -1$,则有

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 1990,$$

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 = 1990.$$

合乎题意.

于是所求的最小自然数 $n = 5$.

7·57　已知:$a_1 = 1$, $a_2 = 2$,

$$a_{n+2} = \begin{cases} 5a_{n+1} - 3a_n, & a_n \cdot a_{n+1} \text{ 为偶数时}, \\ a_{n+1} - a_n, & a_n \cdot a_{n+1} \text{ 为奇数时}. \end{cases}$$

求证对一切 $n \in N, a_n \neq 0$.

(中国高中数学联赛,1988 年)

**[证 1]**　因为 $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, 所以不妨设 $a_{2k-1} = 3p + 1$, $a_{2k} = 3q + 2$, $(k \in N,\ p, q \in Z)$.

下面求 $a_{2k+1}$,则 $a_{2k+1}$ 为下列两种情形的一种:

$$\begin{aligned} a_{2k+1} &= 5a_{2k} - 3a_{2k-1} \\ &= 5(3q + 2) - 3(3p + 1) \\ &= 3(5q - 3p + 2) + 1 \\ &= 3s' + 1 \quad (s' \in Z). \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} a_{2k+1} &= a_{2k} - a_{2k-1} \\ &= (3q + 2) - (3p + 1) \\ &= 3(q - p) + 1 \\ &= 3s'' + 1 \quad (s'' \in Z). \end{aligned}$$

统一记为 $a_{2k+1} = 3s + 1$.

下面再计算 $a_{2k+2}$.

$$\begin{aligned} a_{2k+2} &= 5a_{2k+1} - 3a_{2k} \\ &= 5(3s+1) - 3(3q+2) \\ &= 3(5s-3q-1)+2 \\ &= 3t'+2 \quad (t' \in Z), \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} a_{2k+2} &= a_{2k+1} - a_{2k} \\ &= (3s+1)-(3q+2) \\ &= 3(s-q-1)+2 \\ &= 3t''+2 \quad (t'' \in Z). \end{aligned}$$

由以上,在数列$\{a_n\}$中,奇数项被3除余1,偶数项被3除余2,即不会出现3的倍数的项,而0是3的倍数,所以 $a_n \neq 0$.

[证2] 设 $A_i = \{4k+i \mid k \in Z\}$, $i = 1,2,3$.

$$a_1 = 1 \in A_1, a_2 = 2 \in A_2,$$

$$a_3 = 5a_2 - 3a_1 = 5 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 7 \in A_3.$$

假设$a_{3m+1} \in A_1$, $a_{3m+2} \in A_2$, $a_{3m+3} \in A_3$,即有

$$a_{3m+1} = 4p+1, \quad a_{3m+2} = 4q+2, \quad a_{3m+3} = 4r+3.$$

其中 $p,q,r \in Z$. 于是

$$a_{3m+4} = 5a_{3m+3} - 3a_{3m+2} = 4(5r-3q+2)+1 \in A_1,$$

$$a_{3m+5} = a_{3m+4} - a_{3m+3} = 4(4r-3q+1)+2 \in A_2,$$

$$a_{3m+6} = 5a_{3m+5} - 3a_{3m+4} = 4(5r-6q)+3 \in A_3,$$

所以,对一切 $n \in N$,

$$a_n \in A_1 \cup A_2 \cup A_3.$$

但 $$0 \notin A_1 \cup A_2 \cup A_3.$$

所以 $$a_n \neq 0.$$

[证3] 由递推公式可知,$a_n, a_{n+1}, a_{n+2}$ 的奇偶性只能有

奇,偶,奇; 偶,奇,奇; 奇,奇,偶这三种情形.

由于 $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 7$ 都不是4的倍数,下面证明$\{a_n\}$中所有的项都不是4的倍数.

假设 $a_m$ 是4的倍数,且 $m$ 为最小下标,显然 $m > 3$. 则 $a_{m-1}$, $a_{m-2}$ 均为奇数,$a_{m-3}$ 为偶数.

$$a_m = a_{m-1} - a_{m-2},$$

$$a_{m-1} = 5a_{m-2} - 3a_{m-3},$$

于是 $$3a_{m-3} = 4a_{m-2} - a_m.$$



则 $a_{m-3}$ 也是 4 的倍数,与 $m$ 为 $a_m$ 是 4 的倍数的最小下标矛盾.

因为 0 是 4 的倍数,所以对所有的 $n \in N$,

$$a_n \neq 0.$$

7·58 (1) 求证存在正实数 $\lambda$,使得对任意正整数 $n$,$[\lambda^n]$ 和 $n$ 有相同的奇偶性.

(2) 求出一个满足(1) 的正实数 $\lambda$.

(中国国家集训队测验题,1988 年)

**[解]** 令 $\lambda$ 为方程

$$x^2 - 3x - 2 = 0 \quad ①$$

的正根,则 $$\lambda = \frac{3+\sqrt{17}}{2},$$

$$\mu = \frac{3-\sqrt{17}}{2}$$

其中 $\mu$ 为方程 ① 的负根,且满足

$$-1 < \mu < 0.$$

令 $S_n = \lambda^n + \mu^n$,则由 ① 有

$$\lambda^{n+2} - 3\lambda^{n+1} - 2\lambda^n = 0,$$

$$\mu^{n+2} - 3\mu^{n+1} - 2\mu^n = 0,$$

即 $$(\lambda^{n+2} + \mu^{n+2}) - 3(\lambda^{n+1} + \mu^{n+1}) - 2(\lambda^n + \mu^n) = 0,$$

$$S_{n+2} - 3S_{n+1} - 2S_n = 0 \quad (n \geqslant 1).$$

容易求出, $$S_1 = 3, S_2 = 13.$$

又 $$S_{n+2} \equiv S_{n+1} (\bmod 2).$$

则 $$S_n \equiv 1 \quad (\bmod 2)$$

再由 $-1 < \mu < 0$ 及 $S_n = \lambda^n + \mu^n$ 可得

$$[\lambda^n] = \begin{cases} S_n \equiv n \quad (2 \nmid n), & (\bmod 2) \\ S_n - 1 \equiv n \quad (2 \mid n). & (\bmod 2) \end{cases}$$

7·59 根据下面的定理:

一个素数 $p > 2$ 当且仅当 $p \equiv 1 (\bmod 4)$ 时,能写成两个完全平方数的和(即 $p = m^2 + n^2$, $m$ 和 $n$ 是整数).

求出那些素数,使之能写为下列两种形式之一

(1) $x^2 + 16y^2$;

(2) $4x^2 + 4xy + 5y^2$.

这里 $x$ 与 $y$ 是整数,但不一定是正的.

（第 35 届美国普特南数学竞赛,1974 年）

[**解**] (1) 如果 $p \equiv 1 \pmod 4$,则

$$p \equiv 1 \pmod 8,$$

或

$$p \equiv 5 \pmod 8.$$

若 $p = m^2 + n^2$,且 $p$ 是奇数,

则 $m$ 和 $n$ 一为奇数,一为偶数,设 $m$ 为奇数,$n$ 为偶数,且设 $n = 2v$,则

$$p = m^2 + 4v^2,$$

且

$$m^2 \equiv 1 \pmod 8.$$

由

$$p \equiv 1 \pmod 8$$

可得 $v$ 为偶数,设 $v = 2w$,则

$$p = m^2 + 16w^2.$$

反之,若 $p = m^2 + 16w^2$ 成立.则

$$p \equiv m^2 \pmod 8.$$

于是对于素数 $p \equiv 1 \pmod 8$,可以写成 $x^2 + 16y^2$ 的形式.

(2) 由(1),对于奇素数 $p$,有

$$p = m^2 + 4v^2.$$

若 $p \equiv 5 \pmod 8$,则 $v$ 是奇数.

于是 $m$ 可写成

$$m = 2u + v.$$

$$p = (2u + v)^2 + 4v^2$$

$$= 4u^2 + 4uv + 5v^2.$$

反之,若 $p = 4u^2 + 4uv + 5v^2$,并且 $p$ 是奇数,则有

$$p = (2u + v)^2 + 4v^2$$

于是 $2u + v$ 是奇数,即 $v$ 是奇数,从而

$$p \equiv 5 \pmod 8.$$

于是对于素数 $p \equiv 5 \pmod 8$,可以写成

$$4x^2 + 4xy + 5y^2.$$

7·60　试找出所有不能表示为任何自然数的平方差的自然数.

（第 49 届莫斯科数学奥林匹克，1986 年）

［解］ 对所给的自然数 $n$，考虑方程

$$n = x^2 - y^2.$$

其中 $x$ 和 $y$ 是自然数.

由于 $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$，而 $x+y$ 与 $x-y$ 有相同的奇偶性，因此 $n$ 或者能被 4 整除，或者具有 $4k \pm 1$ 的形式.

下面我们证明，除 $n = 1$ 和 $n = 4$ 之外，凡具有 $4k$ 和 $4k \pm 1$ 形式的自然数 $n$ 都可以表示为 $n = x^2 - y^2$ 的形式.

事实上，如果 $n = 4k$，则

$$(x-y)(x+y) = 4k,$$

我们可以取 $x = k+1, y = k-1 \quad (k > 1)$.

如果 $n = 4k \pm 1$，即 $n$ 是奇数 $2l+1$，则

$$(x-y)(x+y) = 2l+1.$$

我们可以取 $x = l+1, y = l.(l > 0)$.

综上所述，仅有 $n = 1$， $n = 4$ 以及形如 $4k+2$ 的自然数不能表示为两个自然数的平方差.

7·61 证明对任何自然数 $n \geqslant 3$，$2^n$ 都可以表示成 $2^n = 7x^2 + y^2$ 的形式，其中 $x$ 和 $y$ 都是奇数.

（第 48 届莫斯科数学奥林匹克，1985 年）

［证］ 用数学归纳法.

(1) $n = 3$ 时，$2^3 = 8 = 7 + 1$.

所以 $n = 3$ 时，命题成立；

(2) 假设 $n = k$ 时，命题成立，即

$$2^k = 7x^2 + y^2, \quad x \text{ 和 } y \text{ 都是奇数}.$$

当 $n = k+1$ 时，由于

$$\begin{aligned}
&7[\frac{1}{2}(x-y)]^2 + [\frac{1}{2}(7x+y)]^2 \\
&= \frac{7}{4}x^2 + \frac{7}{4}y^2 - \frac{7}{2}xy + \frac{49}{4}x^2 + \frac{7}{2}xy + \frac{1}{4}y^2 \\
&= 14x^2 + 2y^2 \\
&= 2(7x^2 + y)^2 \\
&= 2^{k+1}.
\end{aligned}$$

同理　$7[\frac{1}{2}(x+y)]^2+[\frac{1}{2}(7x-y)]^2=2^{k+1}$.

由于当 $x,y$ 是奇数时，$\frac{1}{2}(x+y)$，$\frac{1}{2}(7x-y)$，$\frac{1}{2}(x-y)$，$\frac{1}{2}(7x+y)$ 都是整数.

如果 $\frac{1}{2}(x-y)$ 是奇数，则 $\frac{1}{2}(7x+y)$ 是奇数，我们就取奇数对 $(\frac{1}{2}(x-y),\frac{1}{2}(7x+y))$.

如果 $\frac{1}{2}(x-y)$ 是偶数，则 $\frac{1}{2}(x-y)+y=\frac{x+y}{2}$ 是奇数，此时 $\frac{1}{2}(7x-y)$ 也是奇数，我们就取奇数对 $(\frac{1}{2}(x+y),\frac{1}{2}(7x-y))$.

于是 $n=k+1$ 时命题成立.

由(1)，(2)，对 $n\geqslant 3$ 的自然数，命题成立.

7·62　有100个民兵，每天晚上三个人值班. 证明不能排出这样一个值班表，使得任何两人在一起值班的次数为1.

（第5届全俄数学奥林匹克，1965年）

［证］　我们选出 $A$ 为值班的民兵，如果所要求的值班办法是可行的，那么其余99个民兵就应该分成若干组，每组两个人，每一组都可以与民兵 $A$ 一起值一次班. 因为99是一个奇数，所以这是不可能做到的.

7·63　设

$$p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

和

$$q(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0$$

是两个整系数多项式. 假设乘积 $p(x)q(x)$ 的一切系数都是偶数，但是它们不完全被4整除.

证明 $p(x)$ 和 $q(x)$ 之一有全部偶系数，另一个至少有一个奇系数.

（第9届加拿大数学竞赛，1977年）

［证］　首先注意 $p(x)$ 和 $q(x)$ 不能都只有偶系数，否则，乘积 $p(x)q(x)$ 的全部系数都能被4整除.

下面我们证明 $p(x)$ 和 $q(x)$ 不能都至少有一个奇系数.

否则，假定对某 $0\leqslant k\leqslant n$ 和 $0\leqslant l\leqslant m$，

$a_n, a_{n-1}, \cdots, a_{k+1}$ 都是偶数，而 $a_k$ 是奇数，且 $b_m, b_{m-1}, \cdots, b_{l+1}$ 都是偶数，而 $b_l$ 是奇数.

在 $p(x) \cdot q(x)$ 中 $x^{k+l}$ 的系数为

$$a_kb_l + a_{k+1}b_{l-1} + a_{k+2}b_{l-2} + \cdots + a_{k-1}b_{l+1} + a_{k-2}b_{l+2} + \cdots$$

在这个和数中，$a_kb_l$ 是奇数，而其他各项均为偶数，于是 $x^{k+l}$ 的系数为奇数，与已知 $p(x)q(x)$ 的所有系数都是偶数相矛盾.

于是 $p(x)$ 和 $q(x)$ 之一的所有系数都是偶数，而另一个的系数中至少有一个奇数.

7·64　设 $k$ 为自然数($k > 1$). 证明，不能在 $k \times k$ 的方格表内填入数字 $1,2,3,\cdots,k^2$，以使得各行的和以及各列的和都是 2 的方幂.

（列宁格勒数学奥林匹克，1989 年）

[证]　假定可以按要求填入 $1,2,\cdots,k^2$.

设 $2^a$ 是最小的行和.

一方面，$2^a$ 应当是 $1 + 2 + \cdots + k^2 = \frac{1}{2}k^2(k^2+1)$ 的约数.

若 $k$ 为奇数，则 $k^2$ 是 $4t+1$ 型的数，从而 $k^2+1$ 是 $4t+2$ 型的数，于是$\frac{1}{2}(k^2+1)$ 是奇数，即$\frac{1}{2}k^2(k^2+1)$ 是奇数，此时 $2^a$ 不能整除 $\frac{1}{2}k^2(k^2+1)$.

若 $k$ 为偶数，则 $k^2+1$ 为奇数，于是

$$2^a \mid \frac{1}{2}k^2 \qquad ①$$

另一方面，由 $2^a$ 是最小的行和，则有

$$2^a \geqslant 1 + 2 + \cdots + k = \frac{1}{2}k(k+1).$$

这样就有$\frac{1}{2}k^2 < \frac{1}{2}k(k+1) \leqslant 2^a$.

由 $k \neq 0$ 知

$$2^a \nmid \frac{1}{2}k^2 \qquad ②$$

① 与 ② 矛盾.

于是，不能在 $k \times k$ 的方格表内填入数字 $1,2,\cdots,k^2$，使得各行的和及各列的和都是 2 的方幂.

7·65　设自然数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中的每一个都不大于自己的下标

(即 $a_k \leqslant k$),而它们的和是偶数.

证明在形如 $a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \cdots \pm a_n$ 的 $2^{n-1}$ 个不同的和中,必有一个等于 0.

(第 44 届莫斯科数学奥林匹克,1981 年)

[证] 不难看出,如果 $a$ 和 $b$ 为自然数,并且 $a \leqslant k$ 和 $b \leqslant k$,那么下列两个不等式

$$|a+b| \leqslant k-1, \ |a-b| \leqslant k-1.$$

至少有一个成立.

所以我们可以适当选择"+","-"号,使得下列不等式

$$|a_n \pm a_{n-1}| \leqslant n-1,$$

$$|a_n \pm a_{n-1} \pm a_{n-2}| \leqslant n-2,$$

$$\cdots\cdots$$

$$|a_n \pm a_{n-1} \pm \cdots \pm a_1| \leqslant 1$$

同时成立.

由于和数 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 是偶数,所以和数

$$a_n \pm a_{n-1} \pm \cdots \pm a_1$$

亦为偶数.

因此必能适当选择"+","-"号,使得

$$a_n \pm a_{n-1} \pm \cdots \pm a_1 = 0.$$

7·66 设 $n \geqslant 2, a_1, a_2, \cdots, a_n$ 都是正整数,且 $a_k \leqslant k (1 \leqslant k \leqslant n)$.

试证明当且仅当 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 为偶数时,可以适当选取"+"号与"-"号,使得 $a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_n = 0$.

(中国中学生数学冬令营选拔试题,1990 年)

[证] 先证必要性.

若有 $a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_n = 0$,则由 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 与 $a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_n$ 有相同的奇偶性可知,$a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 为偶数.

下面用数学归纳法证明充分性.

即如果 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 为偶数,$a_k \in N$, $a_k \leqslant k$, $(1 \leqslant k \leqslant n)$ 我们证明可以适当选取"+"、"-"号,使得

$$a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_n = 0.$$

由 $a_1 \leqslant 1$ 及 $a_1 \in N$ 可知 $a_1 = 1$.

(1) 当 $n = 2$ 时,

因为 $a_2 \leqslant 2$ 及 $a_1 + a_2$ 为偶数,所以 $a_2 = 1$,这时可以选取"-"号,使得



$$a_1 - a_2 = 1 - 1 = 0.$$

(2) 假设当 $2 \leqslant n \leqslant m (m \geqslant 2)$ 时,命题成立.

下面证明,当 $n = m + 1$ 时,命题成立.

分两种情况进行证明:

当 $a_m = a_{m+1}$ 时,因为

$$\begin{aligned} & a_1 + a_2 + \cdots + a_{m-1} \\ = & (a_1 + a_2 + \cdots + a_{m-1} + a_m + a_{m+1}) - 2a_m \\ = & \text{偶数}. \end{aligned}$$

若 $m - 1 = 1$,则必有 $a_1 = 0$,若 $m - 1 \geqslant 2$,由归纳假设,可适当选取"+","-"号,使得

$$a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_{m-1} = 0,$$

从而有
$$a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_{m-1} + (a_m - a_{m+1}) = 0.$$

当 $a_m \neq a_{m+1}$ 时,由于

$$|a_m - a_{m+1}| \leqslant m + 1 - 1 = m,$$

因而 $m$ 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_{m-1}, |a_m - a_{m+1}|$ 符合归纳假设条件,于是可适当选取"+","-"号,使得

$$a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_{m-1} \pm |a_m - a_{m+1}| = 0.$$

从而有 $\quad a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_{m-1} \pm a_m \pm a_{m+1} = 0.$

所以,当 $n = m + 1$ 时命题成立.

于是对所有大于或等于 2 的自然数 $n$,命题都成立.

充分性得证.

7·67 已知 $m, n$ 遍及所有正整数,求 $|12^m - 5^n|$ 的最小值.

(中国国家集训队测验题,1989 年)

[解] 首先注意到 $12^m - 5^n$ 是奇数,又因为 $|12 - 5| = 7$.

我们证明,7 是符合条件的最小值.

令
$$s = |12^m - 5^n|.$$

假设 $s < 7$,则 $s = 1, 3, 5$.

因为 $3 \nmid 5, 5 \nmid 12$,

所以 $3 = |12^m - 5^n|, 5 = |12^m - 5^n|$ 不成立.

若 $s = 1$,则有两种可能.

(1) $12^m - 5^n = 1$.

$$5^n = 12^m - 1 = 11Q(m).$$

其中 $Q(m)$ 为整数.

这时有 $11 \mid 5^n$,这是不可能的.

(2) $12^m - 5^n = -1$.

$$5^n = 12^m + 1.$$

若 $m$ 为奇数,则

$$5^n = 13T(m),$$

这时有 $13 \mid 5^n$,这是不可能的.

若 $m$ 为偶数,设 $m = 2t$,则有

$$5^n = 144^t + 1.$$

当 $t$ 为奇数时,

$$5^n = 145 \cdot K(m),$$

$$145 \mid 5^n.$$

而 $145 = 5 \cdot 29$,则有

$$29 \mid 5^n.$$

这是不可能的.

当 $t$ 为偶数时,设 $t = 2q$,则有

$$5^n = (144^2)^q + 1.$$

由于 $144^2$ 的个位数是 6,则 $(144^2)^q + 1$ 的个位数是 7,而 $5^n$ 的个位数是 5,这也不可能.

所以 $|12^m - 5^n| \neq 1$.

因此,$|12^m - 5^n|$ 的最小值是 7.

7·68 设 $y = x^2 + bx + c$, $b, c \in Z$,如果当 $x \in Z$ 时,总有 $y > 0$,证明 $b^2 - 4c \leqslant 0$.

(中国国家集训队测验题,1989 年)

[证] (1) $b$ 为偶数时,

当 $x = -\dfrac{b}{2}$ 时,$y$ 有最小值,由题设

$$y=(-\frac{b}{2})^2+b(-\frac{b}{2})+c>0,$$

$$-\frac{b^2}{4}+c>0,$$

$$b^2-4c<0.$$

(2)$b$ 为奇数时，

当 $x=\frac{-b\pm 1}{2}$ 时，$y$ 有最小值

$$y=(\frac{-b\pm 1}{2})^2+b(\frac{-b\pm 1}{2})+c>0,$$

$$b^2-4c<1.$$

又由 $b,c$ 是整数，所以

$$b^2-4c\leqslant 0.$$

由(1)，(2)，$b^2-4c\leqslant 0$.

7·69　设 $a$ 是有理数，且 $0<a<1$，如果

$$\cos(3\pi a)+2\cos(2\pi a)=0.$$

求证 $a=\frac{2}{3}$.

（第 32 届国际数学奥林匹克预选题，1991 年）

[证]　令 $x=\cos\pi a$.

则由三倍角与二倍角的余弦公式，已知方程可化为

$$4x^3+4x^2-3x-2=0.$$

即
$$(2x+1)(2x^2+x-2)=0.$$

(1) 如果 $2x+1=0, x=-\frac{1}{2}$，则

$$\cos\pi a=-\frac{1}{2}.$$

由 $0<a<1$ 可得　$a=\frac{2}{3}$.

(2) 如果 $2x^2+x-2=0$，则

$$\cos\pi a=\frac{\sqrt{17}-1}{4}.$$

我们证明，此时 $a$ 不是有理数.

可以用数学归纳法证明：对每一个非负整数 $n$，

$$\cos(2^n \pi a) = \frac{1}{4}(a_n + b_n\sqrt{17}) \qquad ①$$

其中 $a_n$ 和 $b_n$ 都是奇整数.

当 $n=0$ 时,由

$$\cos \pi a = \frac{-1+\sqrt{17}}{4}$$

可知,① 式成立.

设对于 $n \geqslant 0$,① 式成立,则

$$\begin{aligned}
&\cos(2^{n+1}\pi a) \\
&= 2\cos^2(2^n \pi a) - 1 \\
&= 2\cdot\left(\frac{a_n + b_n\sqrt{17}}{4}\right)^2 - 1 \\
&= \frac{1}{8}[(a_n^2 + 17b_n^2 - 8) + 2a_n b_n\sqrt{17}].
\end{aligned}$$

由于 $a_n$ 和 $b_n$ 都是奇数,所以

$$a_n^2 + 17b_n^2 \equiv 2 \pmod 4.$$

从而存在整数 $t$,使得

$$a_n^2 + 17b_n^2 - 8 = 2 + 4t.$$

则 $a_{n+1} = 2t + 1$ 是奇数.

令 $b_{n+1} = a_n b_n$ 也是奇数.

则 $$\cos(2^{n+1}\pi a) = \frac{1}{4}(a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{17}),$$

且 $a_{n+1}, b_{n+1}$ 为奇数.

所以,① 式对一切非负整数 $n$ 成立,且

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= \frac{1}{2}(a_n^2 + 17b_n^2 - 8) \\
&\geqslant \frac{1}{2}(a_n^2 + 9) \\
&> a_n.
\end{aligned}$$

于是,$\{\cos(2^n\pi a) \mid n = 0,1,2,\cdots\}$ 是一个无穷集,然而当 $a$ 为有理数时,$\{\cos(m\pi a) \mid m \in Z\}$ 只能是有限集.所以 $a$ 不是有理数.

因此 $$a = \frac{2}{3}.$$

7·70　奇数 $n \geqslant 3$ 称为"好"奇数,当且仅当存在 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的一

个排列$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$使得以下 $n$ 个和

$$a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots-a_{n-1}+a_n,$$
$$a_2-a_3+a_4-a_5+\cdots-a_n+a_1,$$
$$\cdots\cdots$$
$$a_n-a_1+a_2-a_3+\cdots-a_{n-2}+a_{n-1}.$$

都是正的,求所有的"好"奇数.

(第 32 届国际数学奥林匹克预选题,1991 年)

[解] 令

$$y_1=a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots-a_{n-1}+a_n,$$
$$y_2=a_2-a_3+a_4-a_5+\cdots-a_n+a_1,$$
$$\cdots\cdots$$
$$y_n=a_n-a_1+a_2-a_3+\cdots-a_{n-2}+a_{n-1}.$$

则

$$y_1+y_2=2a_1,$$
$$y_2+y_3=2a_2,$$
$$\cdots\cdots$$
$$y_i+y_{i+1}=2a_i,$$
$$\cdots\cdots$$
$$y_n+y_1=2a_n.$$

且对每一个 $1\leqslant i\leqslant n$,

$$y_i=S-2(a_{i+1}+a_{i+3}+\cdots+a_{i+n-2}).$$

其中 $S=a_1+a_2+\cdots+a_n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$, $a_{n+k}=a_k$.

(1)$n=4k-1$, $k\geqslant 1$ 时.

由于此时 $S$ 是偶数,则每一个 $y_i$ 都是偶数.

又存在 $1\leqslant j\leqslant 4k-1$,使得

$$y_j+y_{j+1}=2\quad (y_{4k}=y_1),$$

从而 $y_j$ 与 $y_{j+1}$ 不可能全是正数.

于是,$n=4k-1$ 不是"好"奇数.

(2)$n=4k+1$, $k\in N$.

由于此时 $S$ 是奇数,则每一个 $y_i$ 都是奇数.

令 $y_1=1$, $y_2=3$, $\cdots$, $y_{2k+1}=4k+1$,

$y_{2k+2}=4k+1$， $y_{2k+3}=4k-3$， $y_{2k+4}=4k-3,\cdots$， $y_{4k-1}=5$， $y_{4k}=5$， $y_{4k+1}=1$.

则 $a_1=2$， $a_2=4$， $\cdots$， $a_{2k}=4k$， $a_{2k+1}=4k+1$， $a_{2k+2}=4k-1$， $a_{2k+3}=4k-3$， $\cdots$， $a_{4k-1}=5$， $a_{4k}=3$， $a_{4k+1}=1$.

于是，所有的 $n=4k+1$， $k\in N$ 都是"好"奇数.

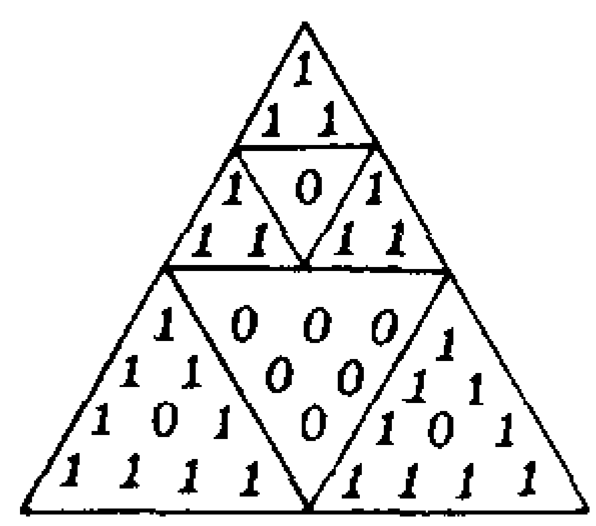
7·71　在 $0\leqslant r\leqslant n\leqslant 63$ 的 $(n,r)$ 组中

$$C_n^r=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

为偶数的有多少组？

（日本数学奥林匹克，1991 年）

**［解］**　如图，将杨辉三角中的每个数对 mod 2 取余数，即将奇数记为 1，偶数记为 0.




并记从第 $2^k$ 行到第 $2^{k+1}-1$ 行之间的奇组数个数为 $a_k$.

易见，　$a_k=a_{k-1}+2a_{k-1}=3a_{k-1}$

由于 $a_1=1,63=2^6-1$ 以及 $a_k=3^k$.

所以，在杨辉三角中从第 0 行到第 63 行中奇组合数的个数为 $a_6=3^6=729$. 从而偶组合数的个数为 $(1+2+\cdots+64)-729=1351$.

7·72　在无限的"三角形"表

$$\begin{array}{ccccccc} & & & a_{1,0} & & & \\ & & a_{2,-1} & a_{2,0} & a_{2,1} & & \\ & a_{3,-2} & a_{3,-1} & a_{3,0} & a_{3,1} & a_{3,2} & \\ a_{4,-3} & a_{4,-2} & a_{4,-1} & a_{4,0} & a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} \\ \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \end{array}$$

中，$a_{1,0}=1$，位于第 $n$ 行（$n\in N,n>1$）第 $k$ 列（$k\in Z,|k|<n$）的数 $a_{n,k}$ 等于上一行三个数之和 $a_{n-1,k-1}+a_{n-1,k}+a_{n-1,k+1}$（如果这些数中有的不在表内，则在和式令它为 0）. 证明从第三行起的每一行中都至少有一个偶数.

(英国数学奥林匹克,1965 年)

[证] 考虑定义在整数集合上的函数

$$f(m)=\begin{cases}0, 当\ m\ 为偶数时,\\ 1, 当\ m\ 为奇数时.\end{cases}$$

并用公式 $b_{n,k}=f(a_{n,k})$ 构造一个数表.

于是,当 $n>1$ 时有

$$\begin{aligned}b_{n,k}&=f(a_{n,k})\\&=f(a_{n-1,k-1}+a_{n-1,k}+a_{n-1,k+1})\\&=f(f(a_{n-1,k-1})+f(a_{n-1,k})+f(a_{n-1,k+1}))\\&=f(b_{n-1,k-1}+b_{n-1,k}+b_{n-1,k+1}).\end{aligned}$$

同时将表中的不出现的数换为 0.

直接计算表明,第 $n$ 行的前四个数 $b_{n,1-n},b_{n,2-n},b_{n,3-n},b_{n,4-n}$ 惟一地确定了第 $n+1$ 行的前四个数,并且第 8 行和第 4 行上的这组数相同. 因此,第9行和第5行,第10行和第6行等等,相应的这组数相同. 由于第 3 行起的每一行中,这组数都含有 0,因此原表中这些行都有偶数.

7·73 设 $n\in N$,且使 $37.5^n+26.5^n$ 为正整数,求 $n$ 的值.

(中国上海市数学竞赛,1998 年)

[解] $37.5^n+26.5^n=\frac{1}{2^n}(75^n+53^n)$.

当 $n$ 为正偶数时,

$$75^n+53^n\equiv(-1)^n+1^n\equiv2\ (\mathrm{mod}4),$$

此时 $75^n+53^n$ 为 $4l+2$ 的数,从而 $37.5^n+26.5^n$ 不可能为正整数.

当 $n$ 为正奇数时,

$$\begin{aligned}75^n+53^n&=(75+53)(75^{n-1}-75^{n-2}\times53+\cdots+53^{n-1})\\&=2^7(75^{n-1}-75^{n-2}\times53+\cdots+53^{n-1}).\end{aligned}$$

上式括号内共有 $n$ 项,且每一项均为奇数,因而括号内是奇数个奇数之和为奇数.

于是正奇数 $n$ 只能取 $n=1,3,5,7$.

由以上可知,只有当 $n=1,3,5,7$ 时,$37.5^n+26.5^n$ 是正整数.

7·74 设 $Z$ 表示全部整数的集合. 试证明:对任何整数 $A,B$,可找到一个整数 $C$,使集合 $M_1=\{x^2+Ax+B\mid x\in Z\}$,与集合 $M_2=$

$\{2x^2+2x+C \mid x\in Z\}$互不相交.

（第36届国际数学奥林匹克预选题,1995年）

[解] 对$A$分奇偶数讨论.

(1)如果$A$是奇数,则

$$x^2+Ax+B=x(x+A)+B\equiv B \pmod 2),$$

$$2x^2+2x+C\equiv C \pmod 2).$$

从而$x^2+Ax+B$与$B$具有相同的奇偶性,$2x^2+2x+C$与$C$有相同的奇偶性,

为使$M_1$与$M_2$不相交,可选取$C=B+1$.

(2)如果$A$是偶数,则

$$x^2+Ax+B=\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+B-\frac{A^2}{4}\equiv\begin{cases}B-\dfrac{A^2}{4}\text{或}\\ B-\dfrac{A^2}{4}+1\end{cases} \pmod 4),$$

且 $2x^2+2x+C=2x(x+1)+C\equiv C \pmod 4)$.

为使$M_1$与$M_2$不相交,可选取$C=B-\dfrac{A^2}{4}+2$.

7·75 求证不存在三边边长全为素数,而面积是正整数的三角形.

（罗马尼亚数学奥林匹克,1994年）

[证] 设$\triangle ABC$的三边的边长为$a,b,c$,面积为$S$,且$a,b,c$为素数,$S$为正整数.

由三角形面积公式

$$16S^2=(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c), \quad ①$$

由于$a+b+c,a+b-c,a-b+c,-a+b+c$具有相同的奇偶性及$16S^2$为偶数,则$a+b+c,a+b-c,a-b+c,-a+b+c$都为偶数,于是只有两种可能:

(1)$a,b,c$全为偶数;

(2)$a,b,c$中两个奇数,一个偶数.

下面考虑:

(1)当$a,b,c$全为偶素数时,有$a=b=c=2$.

此时$S=\sqrt{3}$与$S$是正整数矛盾.

(2)当$a,b,c$为两个奇数,一个偶数时,不妨设$a$为偶数,则$a=$

2.

这时有 $$c-2=c-a<b<c+a=c+2,$$
$$b-2=b-a<c<b+a=b+2.$$

于是，奇素数 $b\in(c-2,c+2)$，$c\in(b-2,b+2)$.

在开区间 $(c-2,c+2)$ 中只有整数 $c+1,c,c-1$. 但 $c$ 为奇素数，则 $c+1,c-1$ 均为偶数，于是必有 $b=c$.

这时，①式化为 $16S^2=(2+2b)\cdot2\cdot2\cdot(2b-2)=16(b^2-1)$.

故 $S^2=b^2-1$.

由此得 $S<b$，即 $S\leqslant b-1$.

这时有 $b^2-1=S^2\leqslant(b-1)^2=b^2-2b+1$，

则 $b\leqslant1$ 与 $b$ 是素数相矛盾.

因此，不存在三边边长都是素数，面积为正整数的三角形.

# 第八章　完全平方数



**8·1**　证明当 $n$ 是非负整数时，$3^n+2\cdot 17^n$ 不是完全平方数.

（英国数学奥林匹克，1991 年）

［证］　(1) $n=4m$ 时，

$$\begin{aligned}&3^n+2\cdot 17^n\\=&(3^4)^m+2\cdot(17^4)^m\\=&81^m+2\cdot 83521^m.\end{aligned}$$

此时，$3^n+2\cdot 17^n$ 的个位数是 3，因而不是完全平方数.

(2) $n=4m+1$ 时，

$$\begin{aligned}&3^n+2\cdot 17^n\\=&3\cdot(3^4)^m+2\cdot 17\cdot(17^4)^m\\=&3\cdot 81^m+2\cdot 17\cdot 83521^m.\end{aligned}$$

此时，$3^n+2\cdot 17^n$ 的个位数是 7，因而不是完全平方数.

(3) $n=4m+2$ 时，

$$\begin{aligned}&3^n+2\cdot 17^n\\=&9\cdot 81^m+2\cdot 289\cdot 83521^m,\end{aligned}$$

此时，$3^n+2\cdot 17^n$ 的个位数仍是 7，因而不是完全平方数.

(4) $n=4m+3$ 时，

$$\begin{aligned}&3^n+2\cdot 17^n\\=&27\cdot 81^m+2\cdot 4913\cdot 83521^m,\end{aligned}$$

此时，$3^n+2\cdot 17^n$ 的个位数也是 3，因而不是完全平方数.

由以上，对非负整数 $n$，$3^n+2\cdot 17^n$ 不是完全平方数.

**8·2**　设 $a$ 与 $b$ 为任意给定的整数，试证明方程

$$x^2+10ax+5b+3=0$$

和
$$x^2+10ax+5b-3=0$$

都没有整数根.

（中国北京市数学竞赛，1978年）

[证]　所给方程的二根显然为

$$x=\frac{-10a\pm\sqrt{100a^2-20b\mp 12}}{2},$$

即
$$x_1=-5a+\sqrt{25a^2-5b\mp 3}.$$
$$x_2=-5a-\sqrt{25a^2-5b\mp 3}.$$

为证明所给方程没有整数根，只要证明 $25a^2-5b\pm 3$ 不是一个完全平方数即可.

事实上，$25a^2-5b=5(5a^2-b)$ 的个位数是0或5，所以 $25a^2-5b\pm 3$ 的个位数只能是

$$2,3,7,8$$

中的一个.

而一个完全平方数的个位数只能是 0,1,4,5,6,9 中的一个，所以 $25a^2-5b\pm 3$ 不是完全平方数，因而所给方程没有整数根.

8·3　一个9位数的各位数字由除了0之外的所有数字组成，且末位数字是5.

证明这个数不可能是整数的完全平方.

（第7届全苏数学奥林匹克，1973年）

[证]　假设存在满足题目要求的完全平方数 $D=A^2$.

由于 $D$ 的个位数字是5，则 $A$ 的个位数字也是5，由此可设

$$A=10a+5,$$

则
$$D=A^2=(10a+5)^2=100a(a+1)+25.$$

由此可看出 $D$ 的最后两位数是25.

由于 $a(a+1)$ 是相邻数的乘积，而相邻数字乘积的个位数只能是2,6或0. 由题设不能有0，而2又在 $D$ 的十位数上出现，所以 $a(a+1)$ 的个位数是6，因此 $D$ 的百位数是6.

于是
$$D=1000k+625.$$

因此必有
$$5^3\mid D.$$

因为 $D$ 是完全平方数，则又有 $5^4 \mid D$.

这样必有 $5 \mid k$，从而 $D$ 的千位数是 0 或是 5.

然而这是不可能的，因为题设中没有 0，并且 $D$ 的个位数是 5.

所以满足题设条件的数不是完全平方数.

8·4　证明数列 11，111，1111，… 中的每一个都不是完全平方数.

（基辅数学奥林匹克，1972 年）

［证 1］　设 $k^2 = \underbrace{11\cdots1}_{t个}$，　$t \geqslant 2$，　$t \in N$，则 $k$ 是奇数．令 $k = 2l + 1$，则

$$(2l+1)^2 = \underbrace{11\cdots1}_{t个}.$$

$$4l^2 + 4l = \underbrace{11\cdots1}_{(t-1)个}0.$$

由于 11…10 不是 4 的倍数，所以上式不可能成立.

于是 11…1 不是完全平方数.

［证 2］　由于

$$\underbrace{11\cdots111}_{t个} = \underbrace{11\cdots1}_{(t-2)个}00 + 11,\quad t \geqslant 2,\quad t \in N.$$

由于
$$\underbrace{11\cdots1}_{(t-2)个}00 \equiv 0 \pmod 4,$$

$$11 \equiv 3 \pmod 4.$$

于是
$$\underbrace{11\cdots111}_{t个} \equiv 3 \pmod 4.\quad (t \geqslant 2,\quad t \in N)$$

由于奇数的平方被 4 除余 1，偶数的平方能被 4 整除，因而 $\underbrace{11\cdots1}_{t个}$ $(t \geqslant 2,\quad t \in N)$ 不是完全平方数.

8·5　假设 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ 和 $b$ 是满足关系式 $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 = b^2$ 的整数．证明所有这些数不可能都是奇数.

（匈牙利数学奥林匹克，1931 年）

［证］　假设 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ 及 $b$ 都是奇数，由于

$$a_i^2 \equiv 1 \pmod 8,$$

$$b^2 \equiv 1 \pmod 8.$$

而
$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 \equiv 5 \pmod 8.$$

所以 $a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2=b^2$ 不可能成立.

因而 $a_1,a_2,a_3,a_4,a_5$ 和 $b$ 不可能都是奇数.



8·6 按任意的次序把 1,2,…,1976 这 1976 个自然数写成一排,证明所得到的数不是一个完全平方数.

(基辅数学奥林匹克,1976 年)

[证] 计算这 1976 个自然数之和

$$\begin{aligned}1+2+\cdots+1976&=\frac{1976\cdot 1977}{2}\\&=988\cdot 1977\\&=(9\cdot 109+7)(9\cdot 219+6)\\&\equiv 6 \pmod 9.\end{aligned}$$

于是由这 1976 个自然数组成的数被 9 除余 6.

由于 $m=9k,\ 9k\pm 1, 9k\pm 2, 9k\pm 3, 9k\pm 4$ 时,

$$m^2\equiv 0,1,4,7 \pmod 9.$$

因此,所得到的数不是平方数.

8·7 证明不存在这样的三位数$\overline{abc}$,使$\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}$ 为完全平方数.

(基辅数学奥林匹克,1975 年)

[证] 设 $n=\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}$.则

$$\begin{aligned}n&=(100a+10b+c)+(100b+10c+a)+(100c+10a+b)\\&=111(a+b+c)\\&=3\cdot 37(a+b+c).\end{aligned}$$

若 $n$ 为完全平方数,则可设 $n=m^2$.

$$m^2=3\cdot 37(a+b+c).$$

于是 $m$ 是 37 的倍数,从而可设 $m=37k$,则

$$37k=3(a+b+c). \quad ①$$

由于 $1\leqslant a+b+c\leqslant 27$

以及 3 与 37 互素,则 ① 式不可能成立.

于是 $n$ 不是完全平方数.

8·8 证明不存在这样的长方体,它的对角线的长是整数,而棱长是三个连续整数.

(基辅数学奥林匹克,1961 年)

[证] 设长方体的棱长为 $n-1$, $n$ 和 $n+1$, 其中 $n$ 为大于 1 的整数.

又设 $m$ 为对角线的长, $m$ 为正整数.

由题意有
$$m^2=(n-1)^2+n^2+(n+1)^2,$$
$$m^2=3n^2+2. \qquad ①$$

由于能被 3 整除的数的平方能被 3 整除,而不能被 3 整除的数的平方被 3 除余 1,因此形如 $3n^2+2$ 的数不是平方数.因而①式不能成立.

所以不存在棱长为连续整数,对角线长为整数的长方体.

8·9 设 $d$ 是异于 2,5,13 的任一正整数.求证在集合 $\{2,5,13,d\}$ 中可以找到两个不同的元素,使得 $ab-1$ 不是完全平方数.

(第 27 届国际数学奥林匹克,1986 年)

[证 1] 由于 $2\cdot5-1$, $2\cdot13-1$, $5\cdot13-1$ 都是平方数,于是只需证明 $2d-1$, $5d-1$ 和 $13d-1$ 中至少有一个不是完全平方数.

(1) 若 $d$ 是偶数,设 $d=2m$,则
$$2d-1=4m-1$$
不是完全平方数.

(2) 若 $d$ 是 $4k+3$ 型的奇数,则
$$5d-1=20k+14=4(5k+3)+2$$
不是完全平方数.

(3) 若 $d$ 是 $4k+1$ 型的奇数,则
$$13d-1=52k+12=4(13k+3).$$
$$5d-1=20k+4=4(5k+1).$$

因此需证明 $13k+3$ 与 $5k+1$ 至少有一个不是完全平方数.

若 $13k+3$ 是完全平方数,则 $13k+3$ 是 $4t$ 或 $4t+1$ 型的数.

若 $13k+3=4t$,则
$$5k+1=(13k+3)-8k-2=4t-8k-2=4(t-2k)-2,$$
于是 $5k+1$ 不是完全平方数.

若 $13k+3=4t+1$,则
$$5k+1=(13k+3)-8k-2=4(t-2k)-1,$$
于是 $5k+1$ 也不是完全平方数.

同样可证,若 $5k+1$ 是完全平方数,则 $13k+3$ 不是完全平方数.

综合(1),(2),(3),$2d-1$, $5d-1$ 和 $13d-1$ 中至少有一个不是完全平方数.

[证 2] 假设 $2d-1$, $5d-1$, $13d-1$ 都是完全平方数,设

$$2d-1=x^2,\quad 5d-1=y^2,\quad 13d-1=z^2.$$

其中 $x,y,z$ 都是正整数.

由 $2d-1=x^2$ 可知,$x$ 为奇数.

设 $x=2n-1$,于是

$$2d-1=(2n-1)^2,$$

$$d=2n^2-2n+1,$$

从而 $d$ 也是奇数.

于是 $5d-1$ 与 $13d-1$ 都是偶数,即 $y$ 与 $z$ 都是偶数.

设 $y=2p,z=2q$.

由 $5d-1=y^2$, $13d-1=z^2$,

可得

$$8d=z^2-y^2=4q^2-4p^2.$$

$$2d=q^2-p^2=(q+p)(q-p).$$

由于 $q+p$ 与 $q-p$ 具有相同的奇偶性,则 $(q+p)(q-p)$ 或为奇数,或为 4 的倍数,然而当 $d$ 为奇数时,$2d$ 不是奇数也不是 4 的倍数,出现矛盾.

因此,$2d-1$, $5d-1$ 和 $13d-1$ 中至少有一个不是完全平方数.

8·10 证明没有一个自然数 $n$,使得

$$n^6+3n^5-5n^4-15n^3+4n^2+12n+3$$

的值是某个自然数的平方.

("友谊杯"国际数学竞赛,1988 年)

[证] $n^6+3n^5-5n^4-15n^3+4n^2+12n+3$

$$=n[n^4(n+3)-5n^2(n+3)+4(n+3)]+3$$

$$=n(n+3)(n^2-1)(n^2-4)+3$$

$$=(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)+3.$$

上式的第一项是 6 个连续整数相乘,因此

$$4\mid(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)$$

于是 $n^6+3n^5-5n^4-15n^3+4n^2+12n+3$ 为 $4k+3$ 型的数,因而对所有的自然数 $n$,均不是平方数.

8·11 求证方程 $a^2+b^2-8c=6$ 无整数解.

（第1届加拿大数学竞赛，1969年）

［证］ 由于每个整数具有

$$4n,\ 4n+1,\ 4n+2,\ 4n+3 \quad (n\in Z),$$

这四种形式中的一种.

那么它的平方为

$16n^2,\ 16n^2+8n+1,\ 16n^2+16n+4,\ 16n^2+24n+9.$

因此一个平方数被8除的余数为0,1,4.

因而任两个平方数之和被8除的余数不可能为6,即 $a^2+b^2=8c+6$ 不可能成立.

所以已知方程没有整数解.

8·12 两个整数数列 $\{a_k\}_{k\geqslant 0}$ 与 $\{b_k\}_{k\geqslant 0}$ 满足

$$b_k=a_k+9,$$
$$a_{k+1}=8b_k+8,\quad (k\geqslant 0).$$

又,数1988出现于 $\{a_k\}_{k\geqslant 0}$ 或 $\{b_k\}_{k\geqslant 0}$ 中.

求证数列 $\{a_k\}_{k\geqslant 0}$ 不含完全平方数的项.

（奥地利—波兰数学竞赛，1988年）

［证］ 由已知条件得

$$a_{k+1}=8a_k+80.$$

由此递推公式可得 $\{a_k\}$ 的通项公式

$$a_k=a_0\cdot 8^k+80\cdot\frac{8^k-1}{7}.$$

当 $k\geqslant 3$ 时,

$$a_k=16[4a_08^{k-2}+5(8^{k-1}+8^{k-2}+\cdots+1)].$$

由于对模8,

$$4a_08^{k-2}+5(8^{k-1}+8^{k-2}+\cdots+1)\equiv 5 \pmod 8.$$

因而不是完全平方数.

因此 $a_k(k\geqslant 3)$ 不是完全平方数.

下面验证 $a_0,a_1,a_2$ 都不是完全平方数.

因为 $k\geqslant 1$ 时,

$8\mid a_k$, 且 $b_k$ 是奇数.

所以 $a_k$ 与 $b_k$ 均不可能等于1988.

因此必有 $a_0=1988$ 或 $b_0=1988$.

当 $b_0 = 1988$ 时， $a_0 = 1979$.

若 $a_0 = 1988$，则 $a_1 = 8 \cdot 1998$，此时 $a_0$ 与 $a_1$ 均不是平方数. 而

$a_2 = 16[4 \cdot 1988 + 5(8+1)]$ 也不是平方数.

若 $a_0 = 1979$， 则

$$a_1 = 8 \cdot 1989, \quad a_2 = 8 \cdot (8 \cdot 1989 + 10) = 16 \cdot 7961.$$

$a_0$， $a_1$ 和 $a_2$ 均不是平方数.

于是对所有 $k \geqslant 0$， $a_k$ 不是完全平方数.

8·13　各位数码之和为(1)1983； (2)1984 的完全平方数是否存在?

（基辅数学奥林匹克,1983 年）

[解]　(1) 若 $n^2$ 的各位数码之和为 1983. 由于 1983 能被 3 整除，则 $n^2$ 也能被 3 整除，从而 $n$ 也能被 3 整除，进而 $n^2$ 能被 9 整除，于是 $n^2$ 的各位数码之和能被 9 整除，于是 1983 能被 9 整除，然而 1983 不能被 9 整除，出现矛盾，所以没有各位数码之和为 1983 的完全平方数.

(2) 各位数码之和为 1984 的完全平方数是存在的.

例如　$n = \underbrace{99\cdots9}_{219个}7 = 10^{220} - 3$，则

$$\begin{aligned} n^2 &= 10^{440} - 6 \cdot 10^{220} + 9 \\ &= 1\underbrace{00\cdots0}_{440个} - 6 \cdot 1\underbrace{00\cdots0}_{220个} + 9 \\ &= \underbrace{99\cdots9}_{219个}4\underbrace{0\cdots0}_{219个}9 \end{aligned}$$

于是，$n^2$ 的各位数码之和为

$$219 \cdot 9 + 4 + 219 \cdot 0 + 9 = 1984.$$

8·14　如果 $f(x) = x^2 + x$，证明方程 $4f(a) = f(b)$ 没有正整数 $a$ 和 $b$ 的解.

（第 9 届加拿大数学竞赛,1977 年）

[证 1]　假定 $a, b$ 是满足方程 $4a^2 + 4a = b^2 + b$ 的正整数，则有

$$4(a+1)^2 > 4a^2 + 4a = b^2 + b > b^2.$$

从而　$$b < 2(a+1).$$

又　$$4a^2 < 4a^2 + 4a = b^2 + b < (b+1)^2,$$

从而　$$b > 2a - 1.$$

于是 $$2a-1<b<2a+2.$$

由 $b$ 是正整数,只能有

$$b=2a \quad 或 b=2a+1.$$

如果 $b=2a$,则原方程化为

$$4a(a+1)=2a(2a+1),$$

即 $$a=0.$$

如果 $b=2a+1$,则原方程化为

$$4a(a+1)=(2a+1)(2a+2),$$

$$2a+2=0,$$

即 $$a=-1.$$

于是,原方程没有正整数解 $a$ 和 $b$.

[证 2] 已知方程

$$4a^2+4a=b^2+b$$

可化为关于 $a$ 的二次方程

$$4a^2+4a-b^2-b=0,$$

于是它的两个根为

$$a=\frac{-1\pm\sqrt{1+b+b^2}}{2},$$

由于 $$b^2<1+b+b^2<(b+1)^2.$$

即 $1+b+b^2$ 在两个连续完全平方数之间,所以它不是完全平方数,因而 $\sqrt{1+b+b^2}$ 不是有理数,从而 $a$ 不可能是正整数.

因而原方程没有正整数解 $a$ 和 $b$.

8·15 证明对任何整数 $n$,都有

$$1155^{1958}+34^{1958}\neq n^2.$$

(第 21 届莫斯科数学奥林匹克,1958 年)

[证] 注意到 $34^2=1156$,容易证明

$$4\cdot 1155^{979}>34^{1958}.$$

于是有

$$(1155^{979})^2<1155^{1958}+34^{1958}<(1155^{979}+2)^2$$

若 $1155^{1958}+34^{1958}=n^2$,则应有

$$1155^{1958}+34^{1958}=(1155^{979}+1)^2.$$

此式左边为奇数,右边为偶数,不可能成立.

于是不可能有

$$1155^{1958}+34^{1958}=n^2.$$



8·16　若 $x$ 与 $y$ 都是自然数，试证 $x^2+y+1$ 和 $y^2+4x+3$ 的值不能同时都是平方数.

（中国北京市初中二年级数学竞赛，1992 年）

［证］（1）当 $x\geqslant y$ 时，

$$x^2+y+1\leqslant x^2+x+1.$$

于是有

$$x^2<x^2+y+1\leqslant x^2+x+1<x^2+2x+1=(x+1)^2.$$

因为 $x^2+y+1$ 夹在两个相邻的完全平方数之间，所以它一定不是完全平方数.

（2）当 $x<y$ 时，

$$y^2<y^2+4x+3<y^2+4y+3<y^2+4y+4=(y+2)^2.$$

（i）若 $y^2+4x+3\neq(y+1)^2=y^2+2y+1$，即 $y\neq 2x+1$，则 $y^2+4x+3$ 不是平方数.

（ii）若 $y^2+4x+3=(y+1)^2=y^2+2y+1$，即 $y=2x+1$，则 $y^2+4x+3$ 是平方数.

但是在 $y=2x+1$ 的条件下，

$$x^2+y+1=x^2+(2x+1)+1=x^2+2x+2,$$

于是　$(x+1)^2<x^2+y+1=x^2+2x+2<(x+2)^2.$

这时 $x^2+y+1$ 夹在两个相邻平方数之间，因而不是完全平方数.

于是，$x^2+y+1$ 和 $y^2+4x+3$ 的值不能同时都是完全平方数.

8·17　证明五个连续正整数的乘积不可能为完全平方数.

（英国数学奥林匹克，1985 年）

［证］　假设五个连续正整数为 $n-2,\ n-1,\ n,\ n+1,\ n+2\ (n\geqslant 3)$. 并设这五个连续正整数的积为完全平方数.

设奇素数 $p\mid n$，则

$$p\nmid(n-2)(n-1)(n+1)(n+2).$$

所以，在 $n$ 的素因数标准分解式中，$p$ 的指数为偶数，从而 $n=2a^2$ 或 $n=a^2$.

由于
$$\begin{aligned}&(n-2)(n-1)(n+1)(n+2)\\=\ &n^4-5n^2+4.\end{aligned}$$

以及有不等式

$$n^4-6n^2+9<n^4-5n^2+4<n^4-4n^2+4,$$

即 $$(n^2-3)^2<n^4-5n^2+4<(n^2-2)^2.$$

$n^4-5n^2+4$ 夹在两个连续平方数之间,所以 $n^4-5n^2+4$ 不是完全平方数.即$(n-2)(n-1)(n+1)(n+2)$ 不是完全平方数.

所以 $$n=2a^2.$$

因为 $$(n-1)(n+2)=n^2+n-2,$$
$$(n+1)(n-2)=n^2-n-2,$$

且 $$(n^2+n-2,n^2-n-2)=(n^2+n-2,2n).$$

以及 $n^2+n-2=n(n+1)-2$ 是偶数,$n\nmid n(n+1)-2$,

所以 $$(n^2+n-2,\ 2n)=2 \text{ 或 } 4.$$

因此$(n-1)(n+2)$与$(n+1)(n-2)$的最大公约数是 2 的幂.

由于 $$n(n-1)(n+2)(n+1)(n-2)$$
$$=2a^2(n-1)(n+2)(n+1)(n-2)$$

为完全平方数.

而 $$n^2<(n-1)(n+2)=n^2+n-2<(n+1)^2,$$
$$(n-1)^2<(n+1)(n-2)=n^2-n-2<n^2.$$

所以$(n-1)(n+2)$与$(n+1)(n-2)$都不是完全平方数,再由$(n-1)(n+2)$与$(n+1)(n-2)$的最大公约数是 2 的幂,从而

$$(n-1)(n+2)=2^k m,$$
$$(n+1)(n-2)=2^t p,$$

其中 $k,\ t$ 为奇数,$(m,p)=1$,于是

$$n(n-1)(n+2)(n+1)(n-2)=2^{k+t+1}a^2mp$$

不是完全平方数.

8·18 证明对任意正整数 $n$,$n^4+2n^3+2n^2+2n+1$ 不是一个完全平方数.

(基辅数学奥林匹克,1970 年)

[证] 注意到不等式

$$\begin{aligned}(n^2+n)^2&=n^4+2n^3+n^2\\&<n^4+2n^3+2n^2+2n+1\\&<n^4+2n^3+3n^2+2n+1\\&=(n^2+n+1)^2.\end{aligned}$$

由于 $n^4+2n^3+2n^2+2n+1$ 介于两个连续平方数 $(n^2+n)^2$ 与 $(n^2+n+1)^2$ 之间，所以不可能是完全平方数.



8·19　求证四个连续正整数之积不能是完全平方数或是完全立方数.

（第 18 届美国普特南数学竞赛，1958 年）

[证]　因为

$$x(x+1)(x+2)(x+3) = (x^2+3x+1)^2-1 = (x^2+3x)^2+2(x^2+3x),$$

故当 $x$ 是正整数时，

$$(x^2+3x)^2 < x(x+1)(x+2)(x+3) < (x^2+3x+1)^2.$$

即 $x(x+1)(x+2)(x+3)$ 介于两个相邻的完全平方数之间，因而不能是完全平方数.

因为两个相邻正整数必定互素，

当 $x$ 是偶数时，$x+1$ 和 $x+3$ 都是奇数，故

$$(x+1,\ x+3) = (x+1,\ 2) = 1.$$

即 $x+1$ 和 $x$, $x+2$, $x+3$ 都互素，从而 $x+1$ 与乘积 $x(x+2)(x+3)$ 也互素.

如果 $x(x+1)(x+2)(x+3)$ 是完全立方数，则 $x+1$ 和 $x(x+2)(x+3)$ 都必须是完全立方数.

但是，当 $x$ 是正整数时

$$(x+1)^3 < x(x+2)(x+3) < (x+2)^3.$$

即 $x(x+2)(x+3)$ 不是完全立方数，故 $x(x+1)(x+2)(x+3)$ 不是完全立方数.

当 $x$ 是奇数时，同理可得 $x+2$ 与 $x(x+1)(x+3)$ 互素，因此，若 $x(x+1)(x+2)(x+3)$ 是完全立方数，则 $x(x+1)(x+3)$ 也必须是完全立方数.

但是，当 $x>1$ 时，

$$(x+1)^3 < x(x+1)(x+3) < (x+2)^3,$$

即 $x(x+1)(x+3)$ 不是完全立方数. 故 $x(x+1)(x+2)(x+3)$ 也不是完全立方数.

对 $x=1$, $x(x+1)(x+2)(x+3)=24$ 也不是完全立方数.

8·20　假设 $n$ 是自然数，$d$ 是 $2n^2$ 的正约数，证明 $n^2+d$ 不是完

全平方数.

(匈牙利数学奥林匹克,1953年)

[证1] 由 $d$ 是 $2n^2$ 的正约数,则 $2n^2=kd$,其中 $k$ 是正整数.

假设 $n^2+d$ 是整数 $x$ 的平方,那么

$$x^2=n^2+d=n^2+\frac{2n^2}{k},$$

则
$$k^2x^2=n^2(k^2+2k).\qquad ①$$

由于

$$k^2<k^2+2k<k^2+2k+1=(k+1)^2,$$

即 $k^2+2k$ 在两个相邻平方数之间,因而不是完全平方数,从而①式右边不是完全平方数,而左边是完全平方数,所以①式不可能成立.

因此,$n^2+d$ 不是完全平方数.

[证2] 设 $2n^2=kd$,其中 $k$ 是正整数.

假设 $n^2+d$ 是整数 $x$ 的平方,则

$$x^2=n^2+d=n^2+\frac{2n^2}{k},$$

$$kx^2=k(n^2+d)=n^2(k+2),$$

$$\frac{k+2}{k}=\frac{n^2+d}{n^2}=\frac{x^2}{n^2}.$$

上式左边的分数的分子与分母彼此相差2,当约去分子分母的公约数时,这个差只能减少而右边的分数在约去分子分母的公约数之后化为 $\frac{p^2}{q^2}$ 的形式,其中 $p$ 和 $q$ 是自然数,且 $p\neq q$,因为 $n^2+d\neq n^2$.又因为

$$p^2-q^2=(p+q)(p-q)\geqslant 3.$$

所以 $\frac{p^2}{q^2}$ 的分子分母的差不小于3,出现矛盾.

所以 $n^2+d$ 不是完全平方数.

**8·21** 对任意自然数 $n\geqslant 3$,在欧氏平面上都存在 $n$ 个点,使得其中任何两点间的距离都是无理数,而每三点构成的三角形非退化且有有理面积.

(第28届国际数学奥林匹克,1987年)

[证] 考虑这样的 $n$ 个点

$$(1,1^2),(2,2^2),\cdots,(n,n^2),$$

则其中任意两点$(i,i^2)$和$(j,j^2)$间的距离

$$\sqrt{(i-j)^2+(i^2-j^2)^2}=|i-j|\sqrt{1+(i+j)^2}.$$

由于 $(i+j)^2<1+(i+j)^2<(i+j+1)^2$.

则$1+(i+j)^2$位于两个相邻平方数$(i+j)^2$与$(i+j+1)^2$之间，显然$1+(i+j)^2$不是完全平方数，因而$\sqrt{(i-j)^2+(i^2-j^2)^2}$是无理数，从而任意两点间的距离是无理数.

对于这些点中的任意三点$(i,\ i^2)$,$(j,\ j^2)$和$(k,\ k^2)$，由于它们是同一条抛物线$y=x^2$上的三点，当然不共线，即此三点组成的三角形为非退化的.

这个三角形的面积为

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} i & i^2 & 1 \\ j & j^2 & 1 \\ k & k^2 & 1 \end{vmatrix}\text{的绝对值}.$$

显然是一个有理数.

8·22 一个数由600个6和若干个0组成.试问它能够是完全平方数吗?

(第36届莫斯科数学奥林匹克,1973年)

[解] 如果该数是完全平方数，那么这个数应该以偶数个0结尾，因此对这些0可不予考虑.

剩下的数具有$2A$的形式，其中$A$由300个3和若干个0组成，且以3结尾.

于是$A$是奇数，设$A=2k+1$， 则$2A=4k+2$，显然不是完全平方数.

8·23 设$x$是一个$n$位数.问是否总存在非负整数$y\leqslant 9$和$z$，使得$10^{n+1}z+10x+y$是一个完全平方数?

(加拿大数学奥林匹克训练题,1991年)

[解] 不一定.

例如，当$x=111$时，就不存在非负整数$y\leqslant 9$和$z$，使得$10^4z+1110+y$是一个完全平方数.

用反证法.

若 $10^4z+1110+y$ 是完全平方数,设

$$10^4z+1110+y=k^2.$$

由于奇数的平方被 8 除余 1,偶数的平方被 8 除余 0 或 4,则

$$k^2\equiv 0 \text{ 或 } 1 \text{ 或 } 4 \pmod 8.$$

又 $$1110\equiv 6 \pmod 8,$$

所以 $$10^4z+1110+y\equiv y+6 \pmod 8.$$

从而有

$$y+6\equiv 0 \text{ 或 } 1 \text{ 或 } 4 \pmod 8.$$

因为 $y$ 是完全平方数的末位数,所以 $y$ 只能是 0,1,4,9,6,5.

对 $y$ 逐个验证,只有 $y=6$ 才满足

$$y+6=12\equiv 4 \pmod 8.$$

即满足 $$y+6\equiv 0 \text{ 或 } 1 \text{ 或 } 4 \pmod 8.$$

于是 $k$ 为偶数,并有

$$10^4z+1116=k^2.$$

设 $k=2l$,则

$$4l^2\equiv 1116 \pmod{10^4},$$

$$l^2\equiv 279 \pmod{2500},$$

$$l^2\equiv 279\equiv 3 \pmod 4.$$

又因为 $l^2$ 为平方数,它被 4 除的余数为 0 或 1,即

$$l^2\equiv 0 \text{ 或 } 1 \pmod 4.$$

产生矛盾.

所以题设的要求对 $x=111$ 就不存在.

**8·24** 试问能否找到四个自然数,使得其中每两个数的乘积与 1990 的和都是完全平方数.

(前苏联教委推荐试题,1990 年)

**[解]** 由于奇数的平方被4除余1,偶数的平方被4除余0,而1990 被 4 除余 2.

于是若两数之积与 1990 之和为完全平方数,则这两数之积被 4 除只能余 2 或余 3.

因此,若存在这样的四个自然数,则至多有一个是偶数.否则若有两个偶数,则其积与 1990 之和被 4 除余 2 不可能是平方数.

因而,这四个自然数中至少有三个奇数.由于奇数被 4 除余 1 或余

3,则必定有两个奇数对模4同余.然而

$$(4k_1+1)(4k_2+1)=4(4k_1k_2+k_1+k_2)+1,$$

$$(4k_1+3)(4k_2+3)=4(4k_1k_2+3k_1+3k_2+2)+1.$$

于是,这两个奇数之积与1990之和被4除余3,因而不可能是完全平方数.

由以上,不存在符合题目要求的四个自然数.

8·25 是否存在自然数 $x,y$,使得 $x^2+y$ 和 $y^2+x$ 都是完全平方数.

(第6届全俄数学奥林匹克,1966年)

[解] 不妨设 $x\geqslant y$, 由 $y\geqslant 1$ 可得

$$x^2<x^2+y\leqslant x^2+x<(x+1)^2.$$

由于 $x^2+y$ 位于两个连续平方数 $x^2,(x+1)^2$ 之间,所以 $x^2+y$ 不可能是完全平方数.

因此,不存在自然数 $x,y$,使得 $x^2+y$ 和 $y^2+x$ 都是完全平方数.

8·26 将数1,2,…,1982分别平方后,按某种顺序写成一列,得到一个多位数.

问:这个多位数可能是完全平方数吗?

(第45届莫斯科数学奥林匹克,1982年)

[解] 这个多位数不是完全平方数.

我们注意这样一个事实:

若 $3\mid a$,则 $3\mid a^2$.

若 $3\nmid a$,则 $a^2\equiv 1\pmod 3$.

由于1,2,…,1982中有

$$3,6,9\cdots,1980$$

共660个3的倍数,则有 $1982-660=1322$ 个不是3的倍数,由于

$$1322\equiv 2\pmod 3.$$

所以所得到的多位数是一个被3除余2的数,因此不可能是完全平方数.

8·27 (1)找出两个自然数 $x$ 和 $y$,使得 $xy+x$ 和 $xy+y$ 是两个不同的自然数的平方.

(2)能否在988和1991之间找出这样的自然数 $x$ 和 $y$?

(第25届全苏数学奥林匹克,1991年)

[解]　(1)$x=1$, $y=8$ 是满足题目要求的自然数,此时

$xy+x=1\cdot 8+1=9=3^2, xy+y=1\cdot 8+8=16=4^2$.

(2) 不能.

否则,若存在 $988\leqslant x<y\leqslant 1991$,使

$$xy+x=a^2,$$
$$xy+y=b^2.$$

其中 $a$ 和 $b$ 为自然数,则

$$b>a>988.$$

于是
$$y-x=b^2-a^2=(b-a)(b+a)\geqslant 2\cdot 988.$$
$$y\geqslant x+2\cdot 988\geqslant 988+2\cdot 988>1991.$$

出现矛盾.

所以,在 988 和 1991 之间不存在这样的自然数 $x$ 和 $y$.

8·28　对任何整数 $n\geqslant 0$,令 $S(n)=n-m^2$,

其中 $m$ 是满足 $m^2\leqslant n$ 的最大整数.数列 $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ 定义如下:

$$a_0=A, \ a_{k+1}=a_k+S(a_k), \ k\geqslant 0.$$

问对于哪些正整数 $A$,这个数列最终为常数?

(第 52 届美国普特南数学竞赛,1991 年)

[解]　如果 $A$ 是完全平方数,由题设,这个数列各项恒等于 $A$,因此这个数列最终为常数.

显然,如果数列不包含任何完全平方数,它将发散于无穷大.

下面我们证明,如果 $A$ 不是完全平方数,则任何 $a_n$ 都不是完全平方数.

事实上,如果 $a_n$ 不是完全平方数,而 $a_{n+1}$ 是完全平方数,设

$$a_{n+1}=(r+1)^2.$$

若 $a_n\geqslant r^2$,则

$$a_{n+1}=a_n+S(a_n),$$
$$(r+1)^2=a_n+(a_n-r^2),$$
$$r^2+(r+1)^2=2a_n.$$

此式的左边是奇数,右边是偶数,矛盾.

若 $a_n<r^2$,则

$$a_{n+1}=a_n+S(a_n),$$

$$(r+1)^2<r^2+[r^2-1-(r-1)^2]$$

$$=r^2+2r-2.$$



此不等式显然不成立.

因此 $A$ 不是完全平方数,则任何 $a_n$ 都不可能是完全平方数.

由以上可知,仅当 $A$ 是完全平方数时,这个数列最终是常数.

8·29 求所有不超过1000的这样的整数,它的平方的末两位数码相同,但不等于零.

(基辅数学奥林匹克,1962 年)

[解] 注意到平方数的个位不等于零,因此平方数的个位数只能是

$$1,4,5,6,9.$$

首先,完全平方数的末两位数码不可能都是奇数.

这是因为奇数的平方的十位数是偶数,而个位数是奇数.

因此,完全平方数的末两位不可能是 11,55,99.

另外,若完全平方数的个位数是 6,则其十位数是奇数.

因此,完全平方数的末两位不可能是 66.

于是,我们只需找出完全平方数的末两位是 44.

由于

$$(50k+m)^2=2500k^2+100km+m^2$$

则 $50k+m$ 与 $m$ 的平方有相同的末两位数码.因此只要找出在 $\{1,2,\cdots,50\}$ 中,它们的平方的末两位数码是 44 即可.

我们计算 $12^2,18^2,22^2,28^2,32^2,38^2,42^2,48^2$ 可知,只有

$$12^2=144,\quad 38^2=1444.$$

于是,具有题设性质的数只有

$$50k+12,\quad 50k+38$$

其中 $k\in\{0,1,2,\cdots,19\}$.

所以在不超过 1000 的数的完全平方数的末两位数码相同的数有 40 个.

8·30 求出所有的素数 $p$,使得 $2p^4-p^2+16$ 是一个完全平方数.

(列宁格勒数学奥林匹克,1980 年)

[**解 1**]　当 $p=2$ 时，

$$2p^4-p^2+16=44$$

不是完全平方数.

所以 $p$ 是奇素数.

设
$$2p^4-p^2+16=k^2,$$

其中 $k$ 是奇数.

$$p^2(2p^2-1)=(k-4)(k+4).$$

因为 $p$ 是素数,因此 $p\mid k-4$ 或 $p\mid k+4$,但 $p$ 不能同时整除 $k-4$ 和 $k+4$,否则

$$p\mid(k+4)-(k-4)=8,$$

这与 $p$ 为奇素数矛盾.

因此 $k+4$ 与 $k-4$ 中有且只有一个能被 $p^2$ 整除.

若 $p^2\mid k-4$,设 $k-4=sp^2$,这里 $s$ 是奇数.

于是
$$k+4=sp^2+8,$$

从而
$$p^2(2p^2-1)=(k+4)(k-4)=sp^2(sp^2+8),$$

即
$$s(sp^2+8)=2p^2-1.$$
$$(s^2-2)p^2=-8s-1.$$

此式的右边为负数,所以只能有 $s=1$.

这时
$$p^2=9,\quad p=3.$$

而当 $p=3$ 时,

$$2p^4-p^2+16=169$$

是完全平方数.

如果 $p^2\mid k+4$,设 $k+4=sp^2$,则 $s$ 是奇数,于是

$$k-4=sp^2-8$$
$$(s^2-2)p^2=8s-1.$$

当 $s=1$ 时,有 $-p^2=7$,这不可能.

当 $s\geqslant3$ 时.由于

$$\begin{aligned}(s^2-2)p^2&>(s^2-4)p^2\\&=(s+2)(s-2)p^2\\&\geqslant5\cdot9(s-2)\\&=(8s-1)+(37s-89)\\&\geqslant(8s-1)+(111-89)\end{aligned}$$

$$>8s-1.$$

这也出现矛盾.



综合以上,当且只当 $p=3$ 时,$2p^4-p^2+16$ 才是平方数.

**[解 2]** 当 $p=2$ 时,$2p^4-p^2+16=44$ 不是完全平方数.

当 $p\geqslant 3$ 时,若 $3\nmid p$,则

$$p^2\equiv 1 \pmod 3,$$

$$2p^4-p^2+16\equiv 2 \pmod 3,$$

此时 $2p^4-p^2+16$ 不是平方数.

于是 $3\mid p$,又 $p$ 是素数,所以 $p=3$.

而当 $p=3$ 时, $2p^4-p^2+16=169$ 是平方数.

**8·31** 在十进制中,位数大于 1 的某数的平方,其十位数码等于 7,这个平方数的个位数码等于多少?

（匈牙利数学奥林匹克,1917 年）

**[证]** 设某数为 $A=10a+b$,其中 $a$ 为一整数,$b\in\{0,1,2,\cdots,9\}$,则

$$\begin{aligned}A^2&=(10a+b)^2\\&=100a^2+20ab+b^2.\end{aligned}$$

$A^2$ 的十位数码由 $b^2$ 的十位数码与 $2ab$ 的个位数码之和决定.

由题设,$A^2$ 的十位数码是 7,是奇数,而 $2ab$ 的个位数是偶数,所以 $b^2$ 的十位数必须是奇数.

考察 $b=0,1,2,\cdots,9$ 时,$b^2$ 的十位数码,仅当 $4^2=16,6^2=36$ 时,$b^2$ 的十位数码是奇数. 于是 $A^2$ 的个位数是 6.

由以上,当 $A^2$ 的十位数码是奇数时,$A^2$ 的个位数码是 6,对本题,$A^2$ 的个位数码是 6. 事实上 $24^2=576$, $26^2=676$ 就是这样的数.

**8·32** 求所有这样的自然数 $n$,使 $2^8+2^{11}+2^n$ 是一个自然数的完全平方.

（第 6 届全俄数学奥林匹克,1980 年）

**[解 1]** (1) 当 $n\leqslant 8$ 时,

$$\begin{aligned}N&=2^8+2^{11}+2^n\\&=2^n(2^{8-n}+2^{11-n}+1).\end{aligned}$$

为使 $N$ 是平方数,$n$ 一定为偶数,即 $n=2,4,6,8$.

一一验算,$N$ 都不是完全平方数.

(2) 当 $n = 9$ 时,

$N = 2^8 + 2^{11} + 2^9 = 2^8 \cdot 11$,

不是平方数.

(3) 当 $n \geqslant 10$ 时,

$$\begin{aligned} N &= 2^8 + 2^{11} + 2^n \\ &= 2^8(1 + 2^3 + 2^{n-8}) \\ &= 2^8(9 + 2^{n-8}). \end{aligned}$$

于是 $9 + 2^{n-8}$ 应为完全平方数,且为奇数的完全平方.不妨设为 $(2k+1)^2$,即

$$9 + 2^{n-8} = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1.$$

$$2^{n-8} = 4k^2 + 4k - 8 = 4(k-1)(k+2),$$

$$2^{n-10} = (k-1)(k+2).$$

由于 $k-1$ 与 $k+2$ 一为奇数,一为偶数,于是只能有

$$k - 1 = 1, k = 2.$$

$$2^{n-10} = 4 = 2^2.$$

所以 $$n = 12.$$

**[解 2]** 假设 $2^8 + 2^{11} + 2^n$ 是一个完全平方数.

$$2^8 + 2^{11} + 2^n = m^2.$$

则有
$$\begin{aligned} 2^n &= m^2 - (2^8 + 2^{11}) \\ &= m^2 - 2^8 \cdot 9. \\ &= (m - 48)(m + 48). \end{aligned}$$

因为 2 是素数,则令

$$\begin{cases} m - 48 = 2^s, \\ m + 48 = 2^t. \end{cases}$$

其中 $t, \quad s \in N, \quad s < t, \quad t + s = n.$

消去 $m$ 可得

$$2^t - 2^s = 96,$$

$$2^s(2^{t-s} - 1) = 96 = 2^5 \cdot 3.$$

因为 $2^{t-s} - 1$ 为奇数.则有

$$s = 5, \quad 2^{t-s} - 1 = 3.$$

即 $$s = 5, \quad t = 7,$$

于是 $$n = s + t = 12.$$

**[解 3]** 设 $2^4 = x$,则

$$2^8 = x^2, \quad 2^{11} = 2^7 x,$$

于是有

$$2^8 + 2^{11} + 2^n = x^2 + 2^7 x + 2^n.$$

若 $2^8 + 2^{11} + 2^n$ 是一个完全平方数,则方程

$$x^2 + 2^7 x + 2^n = 0$$

有两个相等实根,于是

$$\Delta = (2^7)^2 - 4 \cdot 2^n = 0,$$

$$n = 12.$$

8·33 用[87,91]区间上的自然数做直角三角形的斜边,其他两边也都是自然数,试求所有这样的直角三角形三边的长.

(中国江西省数学竞赛,1979 年)

**[解]** 由 $(m^2 + n^2)^2 = (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2$

可设直角三角形的斜边为 $k(m^2 + n^2)$,两条直角边分别为 $k(m^2 - n^2)$,$k(2mn)(m > n)$,其中 $m$ 和 $n$ 都是自然数.

(1) 若斜边为 87,即

$$k(m^2 + n^2) = 87.$$

当 $k = 1$ 时,$m^2 + n^2 = 87$,由于 87 是 $4k + 3$ 型的数,而 $4k + 3$ 型的数不能表为两个数的平方和的形式,此时无解.

当 $k = 3$ 时,$m^2 + n^2 = 29$.此时有解 $m = 5, \quad n = 2$.

这样的三角形存在,它的三边为

$$3(5^2 + 2^2), \quad 3(5^2 - 2^2), \quad 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2,$$

即三角形三边为 87,63,60.

当 $k = 29$ 时, $m^2 + n^2 = 3$,此时无解.

(2) 若斜边为 88,即

$$k(m^2 + n^2) = 88.$$

当 $k = 1,2,4,8,11,22,44$ 时,

$$m^2 + n^2 = 88,44,22,11,8,4,2.$$

此时均无满足方程的自然数 $m, n$.

(3) 若斜边为 89,即

$$k(m^2 + n^2) = 89.$$

当 $k=1$ 时， $m^2+n^2=89=64+25$,则有 $m=8$， $n=5$.
这时三角形三边为 89,39,80.

(4) 若斜边为 90,即

$$k(m^2+n^2)=90.$$

当 $k=2$ 时， $m^2+n^2=45=36+9$,则有

$$m=6, \quad n=3.$$

当 $k=9$ 时， $m^2+n^2=10=9+1$,则有

$$m=3, \quad n=1.$$

当 $k=18$ 时， $m^2+n^2=5=4+1$,则有

$$m=2, \quad n=1.$$

在这三种情况下,三角形三边为 90,54,72.

当 $k=1,3,5,6,10,15,30,45$ 时,三角形不存在.

(5) 若斜边为 91 时,即

$$k(m^2+n^2)=91.$$

当 $k=7$ 时, $m^2+n^2=13=3^2+2^2$,则有

$$m=3, n=2.$$

直角三角形三边为:91,35,84.

当 $k=1,13$ 时,三角形不存在.

所以所求直角三角形三边有下面四组解:

(87,63,60),(89,39,80),(90,54,72),(91,35,84).

**8·34** 把自然数依次写在黑板上,规定遇到完全平方数时就要跳过去接着写它后面的自然数,这样写成了

$$2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 10,\ 11,\cdots$$

这一列数. 这样写的第一个数是2,第4个数是6,第8个数是11,…按照这个规律,在黑板上写出的第 1992 个数是多少?

（中国北京市高中一年级数学竞赛,1992 年）

**[解]** 设 $f(n)$ 表示第 $n$ 个非完全平方数,则有

$$f(1)=2=1+1, \quad f(2)=3=2+1,$$
$$f(3)=5=3+2, \quad f(4)=6=4+2,$$
$$f(5)=7=5+2, \quad f(6)=8=6+2,$$
$$f(7)=10=7+3, \quad f(8)=11=8+3.$$

由此可设 $\qquad f(n)=n+k$

其中 $k$ 满足

$$k^2 < f(n) < (k+1)^2,$$

即
$$k^2 < n + k < (k+1)^2.$$

$$k^2 + 1 \leqslant n + k \leqslant (k+1)^2 - 1,$$

$$(k - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} = k^2 - k + 1 \leqslant n \leqslant k^2 + k = (k + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}.$$

从而
$$k - \frac{1}{2} < \sqrt{n} < k + \frac{1}{2}.$$

即 $k$ 是与$\sqrt{n}$ 最接近的整数,所以

$$f(n) = n + (\text{与}\sqrt{n}\text{ 最接近的整数}).$$

由于与 $\sqrt{1992}$ 最接近的整数是 45,则

$$f(1992) = 1992 + 45 = 2037.$$

8·35　使得 $n^2 - 19n + 91$ 为完全平方数的自然数 $n$ 有多少个?

(中国北京市初中二年级数学竞赛,1991 年)

[解]　由于　$n^2 - 19n + 91 = (n-9)^2 + (10-n).$

当 $n > 10$ 时,

$$n^2 - 19n + 91 = (n-9)^2 + (10-n) < (n-9)^2,$$

$$(n-10)^2 < (n-9)^2 + (10-n) < (n-9)^2.$$

因为介于两个相邻的平方数之间的整数不能是完全平方数,所以 $n > 10$ 时,没有平方数.

于是
$$1 \leqslant n \leqslant 10.$$

对 $n = 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10$ 一一验算,只有 $n = 9$,　$n = 10$ 时,$n^2 - 19n + 91$ 为完全平方数.

因此,符合要求的自然数 $n$ 只有 2 个.

8·36　试求一个非 1 的数 $k$,使 $k$ 和 $k^4$ 可以分别表示为相邻的两个整数平方的和,并证明这样的 $k$ 只有一个.

(中国北京市初中数学竞赛,1980 年)

[解]　设 $k$ 为所求的数.

则 $k$ 可表示为相邻两个整数的平方的和:

$$k = n^2 + (n+1)^2.$$

$$\begin{aligned} k^2 &= [n^2 + (n+1)^2]^2 \\ &= n^4 + (n+1)^4 + 2n^2(n+1)^2 \end{aligned}$$

$$=n^4-2n^2(n+1)^2+(n+1)^4+4n^2(n+1)^2$$
$$=[n^2-(n+1)^2]^2+[2n(n+1)]^2$$
$$=(2n+1)^2+[2n(n+1)]^2.$$

即两个完全平方数的和的平方一定可以表为另两个数的平方和.

则

$$k^4=\{(2n+1)^2+[2n(n+1)]^2\}^2$$
$$=\{(2n+1)^2-[2n(n+1)]^2\}^2+[2(2n+1)\cdot 2n(n+1)]^2$$

由于 $k^4$ 可表为相邻两数的平方和,则

$$|-(2n+1)^2+[2n(n+1)]^2-4n(n+1)(2n+1)|=1,$$

即
$$|4n(n+1)^2(n-2)-1|=1.$$

若
$$4n(n+1)^2(n-2)-1=1,$$

则
$$2n(n+1)^2(n-2)=1.$$

此方程无整数解.

若
$$4n(n+1)^2(n-2)-1=-1,$$
$$4n(n+1)^2(n-2)=0,$$

则
$$n=0,-1\text{或}2.$$

当 $n=0$ 或 $-1$ 时, $k=1$ 与题设矛盾.

则
$$n=2.$$

此时
$$k=2^2+(2+1)^2=13.$$

$$k^4=13^4$$
$$=\{(2\cdot 2+1)^2-[2\cdot 2(2+1)]^2\}^2+\{4\cdot 2(2+1)(2\cdot 2+1)\}^2$$
$$=119^2+120^2.$$

所以13为所求.

由上述过程,这样的 $k$ 是惟一的.

8·37　如果 $n,p$ 是两个自然数,记

$$S_{n,p}=1^p+2^p+\cdots+n^p.$$

试确定自然数 $p$,使得对任何自然数 $n$,$S_{n,p}$ 都是一个自然数的平方.

(法国数学奥林匹克,1991年)

[解]　由于对任何自然数 $n$,$S_{n,p}$ 都是一个完全平方数,特别地取 $n=2$, $S_{2,p}$ 也是一个完全平方数.即存在自然数 $x$,满足下式:

$$x^2 = 1 + 2^p \quad (x > 1).$$

所以 $$x^2 - 1 = 2^p,$$

$$(x-1)(x+1) = 2^p.$$

于是 $$\begin{cases} x - 1 = 2^s, \\ x + 1 = 2^t. \end{cases}$$

整数 $s, t$ 满足：

$$0 \leqslant s < t, \quad s + t = p.$$

因此有 $$\frac{x+1}{x-1} = 2^{t-s} \geqslant 2.$$

所以 $$x + 1 \geqslant 2x - 2,$$

于是 $$1 < x \leqslant 3.$$

当 $x = 2$ 时，

$$1 + 2^p = 4$$

此时无解.

当 $x = 3$ 时，

$$1 + 2^p = 9,$$

$$p = 3.$$

又因为

$$S_{n,3} = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

为一个完全平方数.

所以，只有惟一的自然数 $p = 3$，使对于任何自然数 $n$， $S_{n,p}$ 是完全平方数.

8·38　求使 $4^{27} + 4^{1000} + 4^x$ 是完全平方数的最大整数 $x$.

（第 6 届全苏数学奥林匹克，1972 年）

[解]

$$\begin{aligned} & 4^{27} + 4^{1000} + 4^x \\ = & 2^{54} + 2^{2000} + 2^{2x} \\ = & 2^{54}(1 + 2^{1946} + 2^{2x-54}) \\ = & 2^{54}(1 + 2 \cdot 2^{1945} + 2^{2x-54}) \end{aligned}$$

显然，当 $2^{2x-54} = (2^{1945})^2$，即

$$2x - 54 = 2 \cdot 1945$$

$$x = 1972$$

时，原式 $= 2^{54}(1 + 2^{1945})^2$ 是一个完全平方数.

如果 $x > 1972$，则

$$2^{2x-54} < 1 + 2 \cdot 2^{1945} + 2^{2x-54} < (2^{x-27} + 1)^2.$$

此时已知的数介于两个连续平方数 $(2^{x-27})^2$ 与 $(2^{x-27} + 1)^2$ 之间，不可能是一个完全平方数.

于是，使 $4^{27} + 4^{1000} + 4^x$ 是完全平方数的最大整数为 $x = 1972$.

8·39 求满足方程 $x^2 + x = y^4 + y^3 + y^2 + y$ 的所有整数 $x$，$y$.

（第 1 届全苏数学奥林匹克，1967 年）

[**解**] 已知方程可化为

$$4x^2 + 4x + 1 = 4y^4 + 4y^3 + 4y^2 + 4y + 1,$$

$$(2x + 1)^2 = (2y^2 + y)^2 + 3y^2 + 4y + 1, \quad ①$$

$$(2x + 1)^2 = (2y^2 + y)^2 + 2(2y^2 + y) + 1 - y^2 + 2y,$$

$$(2x + 1)^2 = (2y^2 + y + 1)^2 - (y^2 - 2y). \quad ②$$

我们先求满足不等式组

$$\begin{cases} 3y^2 + 4y + 1 > 0, \\ y^2 - 2y > 0. \end{cases}$$

的整数解 $y$.

容易求出，$y$ 是不等于 $-1,0,1,2$ 的整数.

(1) 当 $y \neq -1,0,1,2$ 且 $y \in Z$ 时，

由于此时 $3y^2 + 4y + 1 > 0, y^2 - 2y > 0$.

则由 ①，② 得

$$(2y^2 + y)^2 < (2x + 1)^2 < (2y^2 + y + 1)^2.$$

由于在相邻平方数 $(2y^2 + y)^2$ 与 $(2y^2 + y + 1)^2$ 之间不再有完全平方数，所以 $(2x + 1)^2$ 不可能是整数的平方，即此时原方程没有整数解.

(2) 当 $y = -1,0,1,2$ 时，

$y = 0$，由原方程得 $x = 0$ 或 $x = -1$；

$y = -1$，由原方程得 $x = 0$ 或 $x = -1$；

$y = 1$，由原方程得 $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \notin Z$；

$y = 2$，由原方程得 $x = 5$ 或 $x = -6$.

因此，已知方程共有六组解.

$$\begin{cases}x=0,\\y=0,\end{cases}\quad\begin{cases}x=-1,\\y=0,\end{cases}\quad\begin{cases}x=0,\\y=-1,\end{cases}$$
$$\begin{cases}x=-1,\\y=-1,\end{cases}\quad\begin{cases}x=5,\\y=2,\end{cases}\quad\begin{cases}x=-6,\\y=2.\end{cases}$$



8·40　证明如果自然数 $a,b,c$ 满足关系式

$$a^2+b^2=c^2.$$

那么

(1) 数 $a$ 和 $b$ 中至少有一个能被 3 整除；

(2) 数 $a$ 和 $b$ 中至少有一个能被 4 整除；

(3) 数 $a,b,c$ 中至少有一个能被 5 整除.

（波兰数学竞赛,1955 年）

[证]　(1) 由于一个整数是 3 的倍数,那么它的平方也是 3 的倍数,如果一个整数不是 3 的倍数,那么它的平方被 3 除余 1.

若 $a$ 和 $b$ 都不能被 3 整除,则 $a^2+b^2$ 被 3 除余 2,此时 $a^2+b^2$ 不可能是平方数,即 $a^2+b^2=c^2$ 不可能成立.

所以 $a$ 和 $b$ 中至少有一个能被 3 整除.

(2) 我们可以假设 $a,b,c$ 互素. 否则若 $a$ 与 $b$ 有公约数 $k>1$,则 $c$ 也有公约数 $k>1$. 我们可以从 $a^2+b^2=c^2$ 中约去 $k$.

因为 $a,b$ 互素,所以它们不可能都是偶数.

若 $a$ 和 $b$ 都是奇数. 因为奇数的平方被 4 除余 1,则 $a^2+b^2$ 被 4 除余 2,它不可能是平方数 $c^2$.

若 $a$ 和 $b$ 一为偶数,一为奇数,并设 $a$ 为偶数,$b$ 为奇数,则由 $a^2+b^2=c^2$ 知 $c$ 为奇数.

此时有
$$\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{c+b}{2}\cdot\frac{c-b}{2}.$$

因为 $b$ 和 $c$ 都是奇数,则 $\frac{c+b}{2}$,　$\frac{c-b}{2}$ 都是整数,又由

$$\frac{c+b}{2}+\frac{c-b}{2}=c$$

是奇数,于是 $\frac{c+b}{2}$ 和 $\frac{c-b}{2}$ 一为奇数,一为偶数. 因而 $\frac{c+b}{2}\cdot\frac{c-b}{2}$ 是偶数. 从而 $\frac{a}{2}$ 是偶数,$a$ 是 4 的倍数.

(3) 由于不能被 5 整除的整数的平方被 5 除余 1 或 4.

若 $a$ 和 $b$ 中有一个能被 5 整除,则本题得证.

若 $a$ 和 $b$ 都不能被 5 整除,则 $a^2+b^2$ 被 5 除的余数只可能是 $1+1=2$, $(1+4)-5=0$, $(4+4)-5=3$. 另一方面 $c^2$ 被 5 除的余数只可能是 0,1,4. 于是 $c^2$ 是 5 的倍数,因而 $c$ 是 5 的倍数.

8·41 若在两个连续完全平方数之间有若干个不同的自然数. 证明它们中间任两数的乘积都不相等.

(第 17 届全苏数学奥林匹克,1983 年)

[证] 设两个连续完全平方数为 $n^2$ 和 $(n+1)^2$.

并设自然数 $a,b,c,d$ 满足

$$n^2<a<b<c<d<(n+1)^2.$$

因为 $$ab<cd,\quad ac<bd,$$

所以只需证明 $ad\neq bc$ 即可.

若 $ad=bc$,则可设

$$\frac{d}{b}=\frac{c}{a}=\frac{p}{q}, \qquad ①$$

其中 $p>q$, $(p,q)=1$, $p,q\in N$.

于是有 $$p\geqslant q+1.$$

$$\frac{p}{q}\geqslant 1+\frac{1}{q}.$$

由 ① 知,$a,b$ 是 $q$ 的倍数,且 $b>a$,则

$$b\geqslant a+q.$$

$$\frac{p}{q}=\frac{d}{b}\leqslant\frac{d}{a+q}<\frac{(n+1)^2}{n^2+q}.$$

于是有 $$1+\frac{1}{q}\leqslant\frac{p}{q}<\frac{(n+1)^2}{n^2+q},$$

即 $$(q+1)(n^2+q)<q(n+1)^2,$$

$$(n-q)^2<0.$$

出现矛盾.

于是 $$ad\neq bc.$$

从而在 $n^2$ 与 $(n+1)^2$ 之间的不同的自然数,它们的两两乘积均不相等.

8·42 证明若自然数 $a$ 不能被 5 整除,则

$$a^8+3a^4-4$$

能被 100 整除.

（基辅数学奥林匹克,1948 年）

[证]
$$\begin{aligned}&a^8+3a^4-4\\=&(a^4-1)(a^4+4)\\=&(a^2-1)(a^2+1)(a^4+4).\end{aligned}$$

由于当 $5\nmid a$ 时,

$$a^2\equiv\pm 1 \pmod 5.$$

从而
$$a^4\equiv 1 \pmod 5.$$

于是
$$5\mid(a^2-1)(a^2+1),$$
$$5\mid a^4+4.$$

从而
$$25\mid(a^2-1)(a^2+1)(a^4+4).$$

若 $a$ 为奇数,则

$$a^2\equiv 1 \pmod 4,$$

从而
$$4\mid a^2-1.$$

若 $a$ 为偶数,则

$$a^2\equiv 0 \pmod 4,$$

从而
$$4\mid a^4+4.$$

于是
$$4\mid(a^2-1)(a^2+1)(a^4+4).$$

又因为$(4,25)=1$,所以

$$4\cdot 25=100\mid(a^2-1)(a^2+1)(a^4+4),$$

即
$$100\mid a^8+3a^4-4,\ (5\nmid a).$$

8·43 证明在 99 个排成一行的数码 9 的后面可以添加 100 个数码,使得所得到的这 199 位数为完全平方数.

（基辅数学奥林匹克,1972 年）

[证] $\underbrace{99\cdots9}_{99个}\underbrace{00\cdots0}_{100个}=10^{199}-10^{100}.$

设 $n=[10^{99}\cdot\sqrt{10}]$,则

$$n=[10^{99}\cdot\sqrt{10}]<10^{99}\cdot\sqrt{10}<n+1,$$

于是
$$n^2<10^{2\cdot 99}\cdot 10=10^{199},$$

$$n^2>(10^{99}\cdot\sqrt{10}-1)^2$$

$$= 10^{199} - 2 \cdot 10^{99} \cdot \sqrt{10} + 1$$
$$> 10^{199} - 10^{100}.$$

由以上,则有

$$10^{199} - 10^{100} < n^2 < 10^{199}.$$

显然,$n^2$ 的前 99 位都是 9,且是完全平方数,从而 $n$ 为所求的数.

**8·44** 有 40 个整数,其中每一个整数都不能被 5 整除,证明这些数的 4 次方之和能被 5 整除.

(基辅数学奥林匹克,1973 年)

**[证]** 设这 40 个整数为

$$a_1, a_2, \cdots, a_{40},$$

且 $$5 \nmid a_i, \quad i = 1,2,\cdots,40.$$

于是
$$a_i^2 \equiv \pm 1 \pmod 5,$$
$$a_i^4 \equiv 1 \pmod 5,$$

从而 $$\sum_{i=1}^{40} a_i^4 \equiv 40 \equiv 0 \pmod 5.$$

**8·45** 设 $a, b, c$ 是三个互不相等的正整数,求证在 $a^3b - ab^3, b^3c - bc^3$, $c^3a - ca^3$ 三个数中,至少有一个数能被 10 整除.

(中国初中数学联赛,1986 年)

**[证]** 所给的三个数可化为

$$a^3b - ab^3 = ab(a^2 - b^2),$$
$$b^3c - bc^3 = bc(b^2 - c^2),$$
$$c^3a - ca^3 = ca(c^2 - a^2).$$

若 $a$ 和 $b$ 中有一个偶数,则 $2 \mid ab$,若 $a$ 和 $b$ 中没有一个偶数,即都是奇数,则 $2 \mid a^2 - b^2$, 于是 $2 \mid ab(a^2 - b^2) = a^3b - ab^3$.

同理, $2 \mid b^3c - bc^3$, $2 \mid c^3a - ca^3$.

即 $a^3b - ab^3$, $b^3c - bc^3$, $c^3a - ca^3$ 这三个数都能被 2 整除.

若 $a, b, c$ 三数中,有一个能被 5 整除,则所给三个数中一定有一个能被 5 整除.

若 $a, b, c$ 都不能被 5 整除,则有

$$a^2 \equiv \pm 1 \pmod 5 \quad (\text{当 } 5 \nmid a \text{ 时}).$$

因为 $a^2, b^2, c^2$ 三数被 5 除的余数只有 $+1$ 和 $-1$ 两种可能,于是,

$a^2$, $b^2$, $c^2$ 中必有两数对 5 同余,不妨设 $a^2$ 和 $b^2$ 对 5 同余,则 $5 \mid a^2 - b^2$,于是 $5 \mid ab(a^2 - b^2) = a^3b - ab^3$.



因而,所给三个数 $a^3b - ab^3$, $b^3c - bc^3$, $c^3a - ca^3$ 中一定有一个能被 5 整除.

又因为 2 和 5 互素,所以所给三数中一定有一个能被 $2 \cdot 5 = 10$ 整除.

**8·46** 证明整数可以表示为两个整数的平方和的充要条件是这个数的二倍也具有这种性质.

(匈牙利数学奥林匹克,1938 年)

[证] 假设整数 $x$ 可以表示成两个整数的平方和:

$$x = a^2 + b^2,$$

则对 $2x$ 有

$$2x = (a + b)^2 + (a - b)^2.$$

反之,对整数 $x$ 有

$$2x = a^2 + b^2,$$

则数 $a$ 和 $b$ 或同为奇数,或同为偶数,因而 $\frac{a+b}{2}$ 与 $\frac{a-b}{2}$ 均为整数,此时有

$$x = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

**8·47** 设 $a,b,c$ 为直角三角形的边长,证明若这些数都是整数,则乘积 $abc$ 能被 30 整除.

(西班牙数学竞赛,1992 年)

[证] 因为整数 $a,b,c$ 是直角三角形的边长,令 $c$ 为斜边的长,则有

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

(1) 若 $a$ 和 $b$ 都是奇数,则

$$a^2 \equiv 1 \pmod 4,$$
$$b^2 \equiv 1 \pmod 4.$$

从而 $$c^2 = a^2 + b^2 \equiv 2 \pmod 4.$$

然而,形如 $4k + 2$ 的数不是完全平方数,所以 $c$ 不是整数.

因此,$a$ 和 $b$ 中至少有一个偶数,即

$$2 \mid abc. \qquad ①$$

(2) 若 $a$ 和 $b$ 都不能被 3 整除,则

$$a^2 \equiv 1 \pmod 3,$$

$$b^2 \equiv 1 \pmod 3.$$

从而

$$c^2 = a^2 + b^2 \equiv 2 \pmod 3.$$

然而,形如 $3k+2$ 的数不是完全平方数,所以 $a$ 和 $b$ 中至少有一个是 3 的倍数,即

$$3 \mid abc. \qquad ②$$

(3) 若 $a$, $b$ 和 $c$ 均不能被 5 整除,则

$$a^2 \equiv \pm 1 \pmod 5,$$

$$b^2 \equiv \pm 1 \pmod 5,$$

$$c^2 \equiv \pm 1 \pmod 5.$$

如果

$$a^2 + b^2 \equiv \pm 2 \pmod 5,$$

则 $a^2 + b^2$ 不可能是完全平方数.因此或者

$$c^2 = a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod 5,$$

此时,$c$ 是 5 的倍数;或者 $a$ 和 $b$ 中有一个能被 5 整除,因而

$$5 \mid abc. \qquad ③$$

由 ①,②,③ 及 2,3,5 互素,则

$$2 \cdot 3 \cdot 5 = 30 \mid abc.$$

**8·48** 设 $m$ 和 $n$ 为整数,且 $m \geqslant 1$, $n \geqslant 1$,使 $\sqrt{7} - \frac{m}{n} > 0$.证明 $\sqrt{7} - \frac{m}{n} > \frac{1}{mn}$.

(罗马尼亚数学竞赛,1978 年)

[证] 因为

$$\sqrt{7} - \frac{m}{n} > 0,$$

所以

$$7n^2 > m^2.$$

于是

$$7n^2 = m^2 + a, \quad a \in N. \qquad ①$$

由于

$$n^2 \equiv 1,0,4 \pmod 8,$$

所以

$$7n^2 \equiv 7,0,4 \pmod 8.$$

又当 $a = 1,2$ 时,

$$m^2 + a \equiv 1,2,3,5,6 \pmod 8.$$

此时 ① 式不可能成立.

因此 $$a \geqslant 3.$$

当 $a \geqslant 3$ 时，

$$\begin{aligned} 7m^2n^2 &= (m^2 + a)m^2 \\ &= m^4 + am^2 \\ &\geqslant m^4 + 2m^2 + m^2 \\ &\geqslant (m^2 + 1)^2. \end{aligned}$$

其中等号当且仅当 $a = 3,\quad m = 1$ 时成立.

然而当 $a = 3,\quad m = 1$ 时,① 式变为

$$7n^2 = 1^2 + 3 = 4$$

这是不可能的.

所以 $$7m^2n^2 > (m^2 + 1)^2.$$

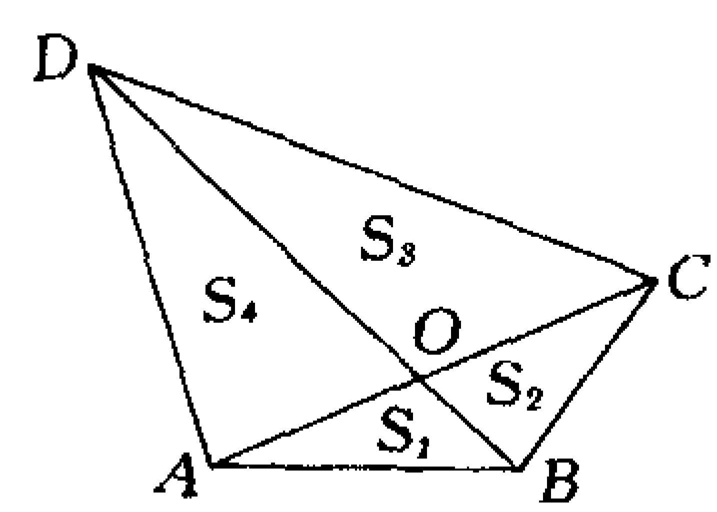
即 $$\sqrt{7}mn > m^2 + 1,$$

$$\sqrt{7} - \frac{m}{n} > \frac{1}{mn}.$$

8·49　凸四边形被对角线所分成的 4 个三角形的面积值都是整数. 证明这 4 个三角形的面积值的乘积不可能以 1988 结尾.

（第 51 届莫斯科数学奥林匹克,1988 年）

[证]　设 $\triangle AOB, \triangle BOC, \triangle COD, \triangle DOA$ 的面积依次为 $S_1,\ S_2,\ S_3,\ S_4$.




则有 $$\frac{S_1}{S_2} = \frac{AO}{OC} = \frac{S_4}{S_3}.$$

于是 $$S_1S_3 = S_2S_4.$$

从而 $$S_1S_2S_3S_4 = (S_1S_3)^2.$$

即 4 个三角形的面积之积是一个完全平方数.

若这个乘积以 1988 结尾,设

$$S = S_1S_2S_3S_4 = \overline{\cdots 1988}.$$

由于 $S$ 是完全平方数,则其个位数不能为 8,即这 4 个三角形的面积值的乘积不可能以 1988 结尾.

8·50　求方程$\underbrace{\sqrt{x+\sqrt{x+\cdots+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}}_{1964\text{个}}=y$的整数解.

（第 4 届全俄数学奥林匹克，1964 年）

[解]　设 $x$ 和 $y$ 是满足方程的一组整数解.

对已知方程连续平方和移项，可得

$$\sqrt{x+\sqrt{x}}=m.$$

其中 $m$ 是整数.

此时又有　$\sqrt{x}=m^2-x.$

因此$\sqrt{x}$也是整数，设$\sqrt{x}=k,\quad k\geqslant 0.$

则有　$m^2=k^2+k.$

如果 $k>0$，则有

$$k^2<m^2=k^2+k<(k+1)^2.\qquad ①$$

因为在两个连续平方数 $k^2,(k+1)^2$ 之间不可能再有完全平方数，所以 $k>0$ 时，① 式不可能成立，即 $m$ 不是整数.

于是　$k=0.$

此时　$x=y=0.$

这是满足已知方程的惟一一组整数解.

8·51　证明对任何整数 $d$，都可找到整数 $m$ 和 $n$，使得

$$d=\frac{n-2m+1}{m^2-n}.$$

（第 25 届莫斯科数学奥林匹克，1962 年）

[证]　已知等式可化为

$$(d+1)n=dm^2+2m-1.$$

若 $d=-1$ 时，有

$$m^2-2m+1=0,$$
$$m=1.$$

若 $d\neq-1$ 时，有

$$n=m^2-\frac{(m-1)^2}{d+1}.$$

为此只需$(m-1)^2$是 $d+1$ 的倍数即可，我们只要令 $m=d+2$，此时可得到

$$n=(d+2)^2-(d+1)=d^2+3d+3.$$

于是,对任何 $d\neq-1$ 的整数,取 $m=d+2$, $n=d^2+3d+3$,即可得到题目的等式.

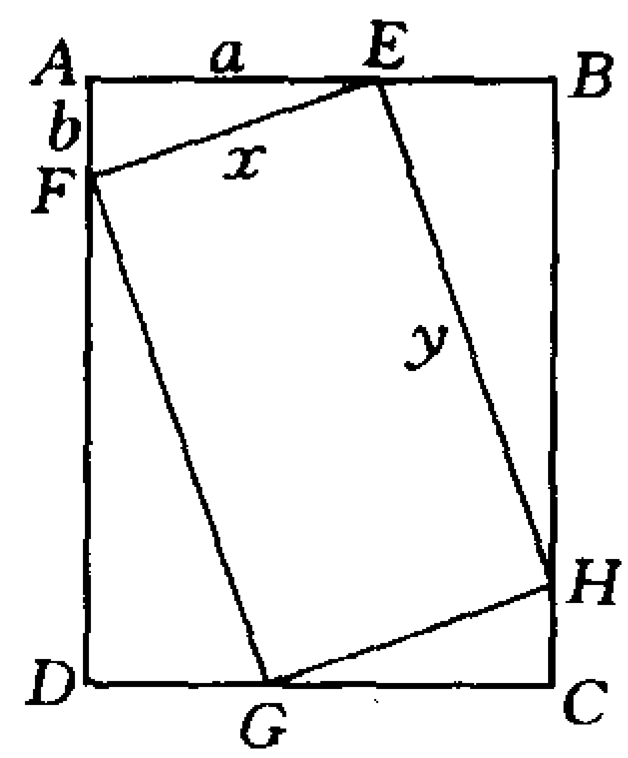


若 $d=-1$,则取 $m=1$, $n$ 为任意整数即可.

8·52 地毯商人阿里巴巴有一块长方形的地毯,尺寸未知,不幸,他的量尺坏了,又没有其他的测量工具,但他发现如果将地毯平铺在他两间店房的任一间,地毯的每一个角恰好与房间的不同的墙相遇,他知道地毯的长、宽均是整数英尺,两间房子的一边有相同的长(不知多长),另一边分别为 38 英尺和 50 英尺,求地毯的尺寸.(1 英尺 = 0.3048 米)

(第 30 届国际数学奥林匹克预选题,1989 年)

[解] 设房间的另一边长为 $q$ 英尺.




如图,设 $AE=a$, $AF=b$.

容易证明

$\triangle AEF\cong\triangle CGH\backsim\triangle BHE\cong\triangle DFG$.

设这两组相似三角形的相似比为 $k$,则

$$BE=bk,\quad DF=ak.$$

所以有 $\begin{cases}a+bk=50,\\ ak+b=q.\end{cases}$

解得 $$\begin{cases}a=\dfrac{qk-50}{k^2-1},\\ b=\dfrac{50k-q}{k^2-1}.\end{cases}$$

$$x^2=a^2+b^2=\frac{(qk-50)^2}{(k^2-1)^2}+\frac{(50k-q)^2}{(k^2-1)^2}\qquad ①$$

同理可对另一房间有

$$x^2=\frac{(qk-38)^2}{(k^2-1)^2}+\frac{(38k-q)^2}{(k^2-1)^2}\qquad ②$$

由①, ②得

$$(qk-50)^2+(50k-q)^2=(qk-38)^2+(38k-q)^2.$$

整理可得

$$1056k^2-48kq+1056=0,$$

即 $$22k^2-kq+22=0.$$

$$kq = 22(k^2+1),$$

$$q = 22(k+\frac{1}{k}). \quad ③$$

由于 $x$, $y$ 是整数,则 $k=\frac{y}{x}$ 是有理数.

令 $k=\frac{c}{d}$,其中 $c,d$ 是正整数,且 $(c,d)=1$.

③式化为

$$q = 22\left(\frac{c}{d}+\frac{d}{c}\right),$$

$$dq = 22(c+\frac{d^2}{c}).$$

因为 $dq$ 是整数,则 $22(c+\frac{d^2}{c})$ 是整数,从而

$$c \mid 22, \quad c \in \{1,2,11,22\},$$

同理 $$d \mid 22, \quad d \in \{1,2,11,22\}.$$

由于 $(c,d)=1$,不妨设 $c>d$,则

$$k = 1,2,11,22,\frac{11}{2}.$$

由③式,相应的 $q$ 为

$$q = 44,55,244,485,125.$$

由①得

$$x^2(k^2-1)^2 = q^2k^2-100qk+2500+2500k^2-100qk+q^2,$$

$$x^2(k^2-1)^2 = q^2(k^2+1)+2500(k^2+1)-200qk. \quad ④$$

由③式 $$kq = 22(k^2+1).$$

代入④式得

$$x^2(k^2-1)^2 = (k^2+1)(q^2-1900). \quad ⑤$$

当 $k=1$ 时,⑤式化为

$$0 = (1^2+1)(44^2-1900) = 72.$$

显然不能成立.

当 $k=2$ 时, $q=55$,代入⑤式解得

$$x = 25, \quad y = 2\cdot 25 = 50.$$

此时地毯的尺寸为25英尺·50英尺.

当 $k=11$ 时, $q=244$,则

第八章 完全平方数

$$61 \mid k^2+1,\quad 61 \mid q^2,\quad 61 \nmid 1900.$$

于是 $$61 \mid (k^2+1)(q^2-1900).$$

但 $$61^2 \nmid k^2+1,\quad 61 \nmid q^2-1900,$$

所以 $$61^2 \nmid (k^2+1)(q^2-1900),$$

从而$(k^2+1)(q^2-1900)$不是完全平方数.

而⑤式左边为$x^2(k^2-1)^2$是完全平方数,出现矛盾.

当$k=22$时, $q=485$.

于是 $$97 \mid q=485,\quad 97 \mid k^2+1.$$

因此 $$97 \mid (k^2+1)(q^2-1900).$$

而 $$97^2 \nmid (k^2+1)(q^2-1900).$$

从而$(k^2+1)(q^2-1900)$不是完全平方数,又出现矛盾.

当$k=\frac{11}{2}$时, $q=125$.

于是 $$k^2+1=\frac{125}{4},\quad k^2-1=\frac{117}{4},$$

$$x^2\cdot 117^2=4\cdot 125\cdot(125^2-1900)$$

$$x^2\cdot 117^2=50^2\cdot 5\cdot 549$$

$$x^2\cdot 117^2=5^5\cdot 4\cdot 3^2\cdot 61$$

上式的右边不是完全平方数,仍导致矛盾.

所以,只有$k=2$的一种可能,即地毯的尺寸为25英尺·50英尺.

**8·53** $n$为非负整数,$d_0,d_1,\cdots,d_n$为0,1,或2.

$$d_0+3d_1+3^2d_2+\cdots+3^kd_k+\cdots+3^nd_n$$

是正整数的平方.证明在$0\leqslant i\leqslant n$中至少有一个$i$,使$d_i=1$.

(澳大利亚数学竞赛,1989年)

[证] 因为完全平方数为$3k$型或$3k+1$型.

设 $$m=d_0+3d_1+3^2d_2+\cdots+3^nd_n.$$

若$m$是$3k+1$型的数,则

$$d_0=1.$$

若$d_0\neq 1$,则必有$d_0=0$,从而

$$m=3(d_1+3d_2+\cdots+3^{n-1}d_n).$$

由于$m$是3的倍数,又是平方数,则

$$3 \mid m_1=d_1+3d_2+\cdots+3^{n-1}d_n.$$

从而必有 $$d_1 = 0.$$

于是 $$m_1 = 3(d_2 + 3d_3 + \cdots + 3^{n-2}d_n).$$

同样有 $$3 \mid d_2 + 3d_3 + \cdots + 3^{n-2}d_n;$$

又有 $$d_2 = 0.$$

由此下去，$d_1, d_2, \cdots, d_n$ 都为0，从而 $m = 0$ 与 $m$ 是正整数矛盾.

所以，在 $0 \leqslant i \leqslant n$ 中，至少有一个 $i$，使得 $d_i = 1$.

8·54 假设 $n$ 是整数. 证明如果 $2 + 2\sqrt{28n^2 + 1}$ 是整数，那么它是完全平方数.

（匈牙利数学奥林匹克，1969 年）

[证] 设 $2 + 2\sqrt{28n^2 + 1}$ 等于整数 $m$，即

$$m = 2 + 2\sqrt{28n^2 + 1}.$$

$$(m - 2)^2 = 4(28n^2 + 1),$$

$$m^2 - 4m + 4 = 4(28n^2 + 1). \quad ①$$

由 ① 式，$m^2$ 为偶数，因而 $m$ 为偶数.

设 $m = 2k$，$k$ 为整数，则由 ① 式有

$$4k^2 - 8k + 4 = 4(28n^2 + 1),$$

$$28n^2 = k^2 - 2k. \quad ②$$

由 ② 式，$k^2$ 为偶数，因而 $k$ 为偶数.

设 $k = 2p$，$p$ 为整数，则由 ② 式有

$$28n^2 = 4p^2 - 4p,$$

即 $$7n^2 = p^2 - p = p(p - 1). \quad ③$$

因为 $p$ 和 $p - 1$ 是相邻的整数，所以

$$(p, p - 1) = 1.$$

这样，由 ③ 式，$p$ 和 $p - 1$ 必然一为完全平方数，一为完全平方数与 7 的乘积，于是只能有如下两种情形：

(1) $p = A^2$，$p - 1 = 7B^2$；

(2) $p = 7M^2$，$p - 1 = N^2$.

其中 $A, B, M, N$ 都是整数.

先考虑第一种情形. 由

$$m = 2k = 4p$$

可得 $$m = 4A^2 = (2A)^2.$$

因此,$m$ 是完全平方数.

再考虑第二种情形.

设 $N = 7t + r,\quad r = 0,1,2,\cdots,6.$

于是有

$$p - 1 = 7M^2 - 1 = N^2,$$

即

$$\begin{aligned}7M^2 - 1 &= (7t + r)^2 \\ &= 49t^2 + 14tr + r^2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}r^2 &= 7M^2 - 49t^2 - 14tr - 1 \\ &= 7(M^2 - 7t^2 - 2tr - 1) + 6.\end{aligned}$$

于是 $$r^2 \equiv 6 \pmod 7. \quad ④$$

而 $r = 0,1,2,3,4,5,6$ 时, $r^2 = 0,1,4,9,16,25,36$,它们被 7 除的余数为 0,1,4,2. 即

$$r^2 \equiv 0,1,4,2 \pmod 7 \quad ⑤$$

④ 式和 ⑤ 式矛盾.

因而,第二种情况不可能出现.

于是 $m = 2 + 2\sqrt{28n^2 + 1}$ 一定是完全平方数.

8·55 证明若 $x,y$ 为正整数,使得 $x^2 + y^2 - x$ 能被 $2xy$ 整除,则 $x$ 是完全平方数.

(英国数学奥林匹克,1991 年)

[证 1] 因为 $$2xy \mid x^2 + y^2 - x,$$

所以存在整数 $k$,满足

$$x^2 + y^2 - x = 2kxy.$$

则关于 $y$ 的二次方程

$$y^2 - 2kxy + (x^2 - x) = 0$$

若有一根为整数,另一根也必为整数.

从而判别式

$$\begin{aligned}\Delta &= 4[k^2x^2 - (x^2 - x)] \\ &= 4x[(k^2 - 1)x + 1]\end{aligned}$$

应为完全平方数.

由于 $x$ 与$(k^2 - 1)x + 1$ 互素,则 $x$ 必为完全平方数.

[证 2] 设 $x^2 + y^2 - x = 2kxy,\quad k \in Z.$ ①

对 $x$ 的任一素因数$p$,若在 $x$ 的标准分解式中,$p$ 的指数为奇数 $2m$

$+1$,则由

$$y^2 = x(2ky + 1 - x),$$

可知 $$p^{2m+1} \mid y^2.$$

从而 $$p^{2(m+1)} \mid y^2.$$

又因为 $$p^{2(m+1)} \mid 2kxy,$$

则由 ① $$p^{2(m+1)} \mid x.$$

与 $$p^{2m+1} \parallel x.$$

矛盾.

所以,$p$ 的指数为偶数.

即 $x$ 为完全平方数.

8·56 证明如果整数 $a$ 和 $b$ 满足关系式

$$2a^2 + a = 3b^2 + b, \quad ①$$

那么 $a - b$ 和 $2a + 2b + 1$ 是完全平方数.

(波兰数学竞赛,1964 年)

[证] 如果 $a = 0$,则由 ① 式得 $b = 0$.

此时 $a - b = 0$, $2a + 2b + 1 = 1$ 都是完全平方数,问题得证.

如果 $a \neq 0$,则由 ① 式可知,$b \neq 0$, $a \neq b$.

设 $d$ 是 $a$ 与 $b$ 的最大公约数,且设

$$a = a_1 d, \quad b = b_1 d. \quad ②$$

则 $$(a_1, b_1) = 1, \text{且 } a_1 \neq b_1.$$

因此有

$$b_1 = a_1 + r, \quad ③$$

其中 $r$ 是与 $a_1$ 互素的非零整数.

由 ① 和 ② 得

$$2da_1^2 + a_1 = 3db_1^2 + b_1.$$

将 ③ 式代入得

$$2da_1^2 + a_1 = 3d(a_1 + r)^2 + a_1 + r,$$

由此得

$$da_1^2 + 6da_1 r + 3dr^2 + r = 0. \quad ④$$

④ 式左边前三项能被 $d$ 整除,所以

$$d \mid r. \quad ⑤$$

④ 式左边后三项能被 $r$ 整除,所以

$$r \mid da_1^2.$$

因为$(r,a_1)=1$,所以

$$r \mid d. \qquad ⑥$$

由 ⑤,⑥ 可知 $r=d$ 或者 $r=-d$.

如果 $r=d$,则由 ④ 式得

$$a_1^2+6a_1r+3r^2+1=0. \qquad ⑦$$

由于对任何整数 $a_1$, $a_1^2+1$ 不能被 3 整除,
因此 ⑦ 式不成立,所以 $r \neq d$.

于是 $$r=-d.$$

因为 $$b_1=a_1+r=a_1-d,$$

所以 $$b=b_1d=a_1d-d^2=a-d^2.$$

即 $$a-b=d^2. \qquad ⑧$$

又由 ① 式可得

$$2a^2-2b^2+(a-b)=b^2,$$

$$(a-b)(2a+2b+1)=b^2.$$

由 ② 式和 ⑧ 式得

$$d^2(2a+2b+1)=b_1^2d^2,$$

即 $$2a+2b+1=b_1^2. \qquad ⑨$$

由 ⑧ 和 ⑨ 可知,$a-b$ 和 $2a+2b+1$ 都是完全平方数.

**8·57** 一个具有相同的非零数字的(有限)数列,能成为一个整数的平方的尾部.试求这种数列最长的长度,并求出尾部为这种数列的最小平方数.

(第 31 届美国普特南数学竞赛,1970 年)

**[解]** 设 $x$ 是一个整数,则 $x^2$ 的个位数只能是 0,1,4,9,6,5.

$x^2$ 的个位是 0 的情况由题目的假设已排除.

如果 $x^2$ 的尾部有两个相同的数字,则只能是 11,44,55,66,99.

然后 $x^2$ 的末两位是 11,55,99 时,

$$x^2 \equiv 3 \pmod 4,$$

这是不可能的.

$x^2$ 的末两位是 66 时,

$$x^2 \equiv 2 \pmod 4,$$

这也是不可能的.

下面讨论平方数的末几位都是4的情形.

若$x^2$的末四位是4,即

$$x^2 \equiv 4444 \pmod{10000},$$

则
$$x^2 \equiv 12 \pmod{16}.$$

此时由

$$x^2 = 16k + 12 = 4(4k + 3)$$

可知,亦不可能成立.

于是,$x^2$的尾部中最多有三个4.

注意到
$$38^2 = 1444.$$

于是这种数列最长为3,即尾部有三个4.

又1444是符合要求的最小平方数.

8·58　求满足$1! + 2! + 3! + \cdots + m! = n^k$的大于1的正整数$m$,$n$,$k$.

(加拿大数学奥林匹克训练题,1988年)

[解]　记$f(m) = 1! + 2! + \cdots + m!$.

当$m > 1$时,

$$3 \mid f(m).$$

因此有
$$3 \mid n.$$

对于$m \geqslant 9$,　$m!$能被$27 = 3^3$整除.

但　$f(8) = 46233$不能被27整除,所以在$m \geqslant 8$时,$k = 2$.

又在$m \leqslant 6$时,$f(m)$不能被27整除.

$f(7)$虽然能被27整除,但不是$n^k(k > 1)$的形式.

所以必须$k = 2$,　即$f(m)$是平方数.

对于$m > 4$,　$m!$能被5整除.

所以在$m \geqslant 4$时,

$$f(m) \equiv f(4) \equiv 3 \pmod 5.$$

从而$f(m)$不是平方数.(平方数被5除余0,1或4).

于是
$$m \leqslant 3.$$

容易求出,只有一组大于1的正整数$m$,$n$,$k$,即

$$m = 3, \quad n = 3, \quad k = 2$$

数论卷

适合题设的等式.

8·59　(1) 证明有无穷多个整数 $n$,使 $2n+1$ 与 $3n+1$ 为完全平方数,并证明这样的 $n$ 是 40 的倍数.

(2) 更一般地,证明若 $m$ 为正整数,则有无穷多个整数 $n$,使 $mn+1$ 与 $(m+1)n+1$ 为完全平方数.

(加拿大数学奥林匹克训练题,1989 年)

[证]　(1) 若 $2n+1$ 与 $3n+1$ 都是完全平方数,设

$$\begin{cases}2n+1=a^2, & a\in Z, & ①\\ 3n+1=b^2. & b\in Z. & ②\end{cases}$$

则

$$\begin{aligned}(5a+4b)^2&=2(12a^2+20ab+8b^2)+a^2\\&=2(12a^2+20ab+8b^2+n)+1,\\(6a+5b)^2&=3(12a^2+20ab+8b^2)+b^2\\&=3(12a^2+20ab+8b^2+n)+1,\end{aligned}$$

因此,$n'=12a^2+20ab+8b^2+n$ 满足 $2n'+1$ 与 $3n'+1$ 都是完全平方数,所以存在无穷多个 $n$,使 $2n+1$ 与 $3n+1$ 都是完全平方数.

下面证明这样的 $n$ 是 40 的倍数.

由 ① 可得 $a$ 为奇数,设 $a=2k+1$,因此

$$2n=a^2-1=(2k+1)^2-1=4k(k+1).$$

$$n=2k(k+1).$$

从而 $n$ 是偶数.再由 ② 可知 $b$ 是奇数.

设 $b=2h+1$,因此

$$3n=b^2-1=(2h+1)^2-1=4h(h+1).$$

由于 $2\mid h(h+1)$,以及 $(3,8)=1$,　所以

$$8\mid n.$$

下面证明 $5\mid n$.

如果　$$n\equiv 1,3 \pmod 5,$$

则　$$2n+1\equiv 3,2 \pmod 5.$$

如果　$$n\equiv 2,4 \pmod 5,$$

则　$$3n+1\equiv 2,3 \pmod 5.$$

而对于平方数 $t^2$,有

$$t^2\equiv 0,1,4 \pmod 5.$$

所以当 $2n+1$ 及 $3n+1$ 是完全平方数时，不可能有

$$n\equiv 1,2,3,4\pmod 5.$$

即必须 $5\mid n.$

又由 $(5,8)=1.$

于是 $40\mid n.$

(2) 设

$$mn+1=a^2, \quad ③$$

$$(m+1)n+1=b^2. \quad ④$$

等价于

$$n=b^2-a^2, \quad ⑤$$

$$m(b^2-a^2)+1=a^2. \quad ⑥$$

由 ⑤,⑥ 得

$$(m+1)a^2-mb^2=1. \quad ⑦$$

令

$$x=(m+1)a,\quad y=b, \quad ⑧$$

得

$$x^2-m(m+1)y^2=m+1, \quad ⑨$$

方程 ⑨ 有解

$$x=m+1,\quad y=1. \quad ⑩$$

注意到 *Pell* 方程

$$x^2-m(m+1)y^2=1 \quad ⑪$$

有一组解为

$$x=2m+1,\quad y=2.$$

因而 ⑨ 有无穷多组正整数解 $x,y$，它们可由下式定出：

$x+\sqrt{m(m+1)}y=(m+1+\sqrt{m(m+1)})(2m+1+2\sqrt{m(m+1)})^k$，(其中 $k$ 为非负整数) ⑫

由 ⑫ 可以看出 $x$ 为 $m+1$ 的倍数，因此由 ⑧ 可得出 $a,b$ 适合 ⑦，由 ⑤ 定出整数 $n$.

$m,n$ 适合 ⑤， ⑦，因而适合 ⑤， ⑥.

因此有无穷多个整数 $n$ 满足 ③， ④.

8·60 试问：是否存在这样的自然数 $A$，当把它补在自己的右边，所得的数恰是一个完全平方数？

（第 39 届莫斯科数学奥林匹克，1976 年）

**[解]** 假设 $A$ 是满足条件的 $n$ 位数，则 $\overline{AA}$ 应是一个完全平方数 $k^2$，则有

$$\overline{AA} = A(10^n + 1) = k^2.$$

显然 $10^n + 1$ 应为一个素数平方的倍数.

容易想到,当 $n$ 为奇数时,$10^n + 1$ 是 11 的倍数.

可以证明 $10^{11} + 1$ 是 $11^2 = 121$ 的倍数.

事实上,

$$10^{11} + 1 = 11(10^{10} - 10^9 + 10^8 - 10^7 + 10^6 - 10^5 + 10^4 - 10^3 + 10^2 - 10 + 1)$$

由于当 $t$ 为偶数时,

$$10^t \equiv 1 \pmod{11},$$

当 $t$ 为奇数时,$10^t \equiv 10 \pmod{11}$. .

于是有

$$\begin{aligned}&10^{10} - 10^9 + 10^8 - 10^7 + 10^6 - 10^5 + 10^4 - 10^3 + 10^2 - 10 + 1\\ \equiv\ &1 - 10 + 1 - 10 + 1 - 10 + 1 - 10 + 1 - 10 + 1\\ \equiv\ &0 \pmod{11}.\end{aligned}$$

因而 $10^{11} + 1$ 能被 $11^2$ 整除.

但是 $\dfrac{10^{11} + 1}{121} = 826446281$ 不是一个 11 位数;它的最小平方数倍数是

$$16 \cdot \frac{10^{11} + 1}{121} = 13223140496.$$

这是一个 11 位数.

为此取 $A = 13223140496$.

则 $\overline{AA}$ 是一个平方数,它等于 $(4 \cdot 826446281)^2$.

**8·61** 给定一个无穷等差数列,它的每一项都是正整数,且其中有一项是完全平方数.证明这个数列有无穷多项是完全平方数.

(第 3 届全俄数学奥林匹克,1963 年)

[证] 设这个数列的公差为 $d$,且设其中一项 $a = m^2$,这里 $m$ 为自然数.

当 $k$ 为自然数时,注意到恒等式

$$\begin{aligned}&(m + kd)^2\\ =\ &m^2 + 2mkd + k^2d^2\\ =\ &m^2 + (2mk + k^2d)d.\end{aligned}$$

于是当 $a = m^2$ 是完全平方数时,在它后面的第 $2mk + k^2d$ 项也是完全平方数.

由于 $m$ 和 $d$ 是给定的，$k$ 是任意自然数，所以这个数列有无穷多项是完全平方数.

8·62　令 $a_n$ 表示前 $n$ 个素数的和（$a_1=2$，$a_2=2+3$，$a_3=2+3+5$ 等等）. 证明对任意的 $n$，$[a_n, a_{n+1}]$ 中包含一个完全平方数.

（基辅数学奥林匹克，1979 年）

［证］　设 $p_n$ 表示第 $n$ 个素数，则

$$p_1=2,\ p_2=3,\ p_3=5,\ p_4=7,\ p_5=11.$$

$$a_1=2,\ a_2=5,\ a_3=10,\ a_4=17,\ a_5=28.$$

显然，在区间 $[2,5]$，$[5,10]$，$[10,17]$，$[17,28]$ 中都包含一个完全平方数.

因而，我们只需在 $n\geqslant 5$ 时证明本题.

由于不等式

$$a_n\leqslant m^2\leqslant a_{n+1}$$

与

$$\sqrt{a_n}\leqslant m\leqslant \sqrt{a_{n+1}}$$

互相等价，其中 $m$ 为自然数，所以在区间 $[\sqrt{a_n}, \sqrt{a_{n+1}}]$ 的长度不小于 1 时，区间 $[a_n, a_{n+1}]$ 中必包含一个完全平方数.

由于不等式

$$\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}\geqslant 1$$

与

$$a_{n+1}\geqslant 1+2\sqrt{a_n}+a_n$$

与

$$p_{n+1}=a_{n+1}-a_n\geqslant 1+2\sqrt{a_n}$$

互相等价，所以欲证本题只需证明在 $n\geqslant 5$ 时

$$p_{n+1}\geqslant 1+2\sqrt{a_n}$$

$$(p_{n+1}-1)^2\geqslant 4a_n=4(p_1+p_2+\cdots+p_n) \qquad ①$$

即可.

令 $$q_n=(p_n-1)^2-4(p_1+\cdots+p_{n-1}).$$

现在证明：在 $n\geqslant 2$ 时，$q_n$ 单调增加. 为此计算

$$\begin{aligned}q_{n+1}-q_n&=(p_{n+1}-1)^2-(p_n-1)^2-4p_n\\&=(p_{n+1}-p_n)(p_{n+1}+p_n-2)-4p_n.\end{aligned}$$

在 $n\geqslant 2$ 时，$p_n$ 为奇数，从而

$$p_{n+1}\geqslant p_n+2.$$

$$q_{n+1}-q_n \geqslant 2(p_{n+1}+p_n-2)-4p_n$$
$$=2(p_{n+1}-p_n-2)$$
$$\geqslant 0.$$

从而 $q_n$ 单调增加.

注意到

$$q_5=(11-1)^2-4(2+3+5+7)=32>0.$$

由单调性

$$q_n \geqslant q_5>0.$$

于是 ① 式成立,从而本题得证.

8·63　设 $f(x)=x+[\sqrt{x}]$.　试证对于任意自然数 $m$,

$$m,\quad f(m),\quad f(f(m)),\quad f(f(f(m))),\cdots$$

中必含有完全平方数.

（第 44 届美国普特南数学竞赛,1983 年）

**[证]**　(1) 若 $m$ 为完全平方数,结论显然.

(2) 若 $m$ 不是平方数,设

$$m=k^2+r,$$

其中 $k$ 和 $r$ 为正整数,且 $0<r\leqslant 2k$.

令　$A=\{m \mid m=k^2+r,\ 0<r\leqslant k\}$,

$B=\{m \mid m=k^2+r,\ k<r\leqslant 2k\}$.

对于集合 $B$ 中的每一个 $m=k^2+r$,由

$$k<r\leqslant 2k,$$

得　$$k^2+k<k^2+r\leqslant k^2+2k<(k+1)^2.$$

所以　$$[\sqrt{k^2+r}]=k.$$

$$f(m)=m+[\sqrt{m}]$$
$$=k^2+r+k$$
$$=(k+1)^2+(r-k-1).$$

由　$$0\leqslant r-k-1<k$$

可得　$f(m)\in A$ 或 $f(m)$ 是完全平方数.

这就说明,只须考虑 $m$ 在 $A$ 中的情况.

设 $m=k^2+r,\quad 0<r\leqslant k$.

则　$$f(m)=m+[\sqrt{m}$$

$$= m + [\sqrt{k^2 + r}]$$
$$= m + k.$$
$$f(f(m)) = f(m + k)$$
$$= m + 2k$$
$$= k^2 + r + 2k$$
$$= (k + 1)^2 + (r - 1).$$

进而可推出

$$f(f(f(m))) = (k + 1)^2 + (r - 1) + k + 1$$
$$= k^2 + 3k + 2 + (r - 1)$$
$$= k^2 + 4k + 4 + (r - k - 3)$$
$$k^2 + 3k + 1 < k^2 + 3k + 1 + r \leqslant k^2 + 4k + 1.$$

所以 $[\sqrt{k^2 + 3k + 1 + r}] = k + 1.$

$$f(f(f(f(m)))) = (k + 1)^2 + r + k + k + 1$$
$$= (k + 2)^2 + (r - 2).$$

如此下去,随着 $f$ 的复合,有

$$r \to r - 1 \to r - 2 \to \cdots \to 2 \to 1 \to 0.$$

于是,当 $r = 0$ 时,数列

$$m,\quad f(m),\quad f(f(m)),\cdots$$

中的项必含有完全平方数.

8·64 已知整数列 $\{a_0, a_1, a_2, \cdots\}$ 满足

(1) $a_{n+1} = 3a_n - 3a_{n-1} + a_{n-2},\quad n = 2,3,\cdots;$

(2) $2a_1 = a_0 + a_2 - 2;$

(3) 对任意自然数 $m$,在数列 $\{a_0, a_1, a_2, \cdots\}$ 中必有相继的 $m$ 项 $a_k, a_{k+1}, \cdots,\quad a_{k+m-1}$ 都是完全平方数.

求证 $\{a_0, a_1, a_2, \cdots\}$ 的所有项都是完全平方数.

(第 7 届中国中学生数学冬令营,1992 年)

**[证 1]** 由条件(1)知

$$a_{n+1} - a_n = 2(a_n - a_{n-1}) - (a_{n-1} - a_{n-2}).$$

记 $d_n = a_n - a_{n-1},\quad n = 1,2,\cdots$,则

$$d_{n+1} - d_n = d_n - d_{n-1} = \cdots = d_2 - d_1.$$

由条件(2)得

$$d_2 - d_1 = a_2 - 2a_1 + a_0 = 2,$$

所以有

$$a_n = a_0 + \sum_{k=1}^{n} d_k = a_0 + nd_1 + n(n-1),$$

即 $$a_n = n^2 + bn + c, \quad n = 0,1,2,\cdots,$$

其中 $b = a_1 - a_0 - 1, c = a_0$.

由条件(3)知,存在非负整数 $t$,使得 $a_t$ 和 $a_{t+2}$ 都是完全平方数,从而

$$a_{t+2} - a_t \not\equiv 2 \pmod 4.$$

又 $$\begin{aligned} a_{t+2} - a_t &= (t+2)^2 + b(t+2) - t^2 - bt \\ &= 4t + 4 + 2b, \end{aligned}$$

所以 $b$ 是偶数. 令 $b = 2\lambda$,则

$$\begin{aligned} a_n &= n^2 + 2\lambda n + c \\ &= (n+\lambda)^2 + c - \lambda^2. \end{aligned} \qquad ①$$

下面证明 $c - \lambda^2 = 0$.

否则,若 $c - \lambda^2 \neq 0$,则 $c - \lambda^2$ 的不同约数只有有限多个,设其个数为 $m$.

由 $a_n$ 的通项公式可知,存在 $n_0$ 使得当 $n \geqslant n_0$ 时,数列 $\{a_n\}$ 严格单调递增.

由条件(3),存在 $k \geqslant n_0$,使得

$$a_{k+i} = p_i^2, \quad i = 0,1,2,\cdots,m.$$

其中 $p_i$ 为非负整数,且 $p_0 < p_1 < p_2 < \cdots < p_m$.

由此可知

$$\begin{aligned} c - \lambda^2 &= a_n - (n+\lambda)^2 \\ &= p_i^2 - (k+i+\lambda)^2 \\ &= (p_i - k - i - \lambda)(p_i + k + i + \lambda) \end{aligned}$$

$$i = 0,1,2,\cdots,m$$

与 $c - \lambda^2$ 只有 $m$ 个不同约数矛盾.

于是 $$c - \lambda^2 = 0.$$

由 ① 式,$a_n = (n+\lambda)^2, \quad n = 0,1,2,\cdots$.

即数列 $\{a_0, a_1, a_2, \cdots\}$ 的所有项都是完全平方数.

[证 2]　由证 1 得

$$a_n = n^2 + bn + c.$$

从而存在 $n_0$,使得当 $n \geqslant n_0$ 时,数列 $\{a_n\}$ 严格单调递增,且

$$0 < (n - \frac{|b|+1}{2})^2 \leqslant a_n \leqslant (n + \frac{|b|+1}{2})^2.$$

于是有

$$0 < \sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n} = \frac{a_{n+1} - a_n}{\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_n}}$$

$$< \frac{2n+1+b}{2\sqrt{a_n}} \leqslant \frac{2n+1+b}{2n-|b|-1}.$$

由此可知,存在 $n_1 \geqslant n_0$,使得当 $n \geqslant n_1$ 时,

$$0 < \sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n} < 2. \quad ②$$

利用条件(3),易知存在 $k \geqslant n_1$,使得 $a_k$ 和 $a_{k+1}$ 都是完全平方数,所以由 ② 有

$$\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k} = 1.$$

记 $\sqrt{a_k} = t$,

由 $a_n = n^2 + bn + c$　可得

$$a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} + 2, \quad n = 1,2,\cdots.$$

所以由 $\sqrt{a_k} = t$,　即 $a_k = t^2$ 得

$$a_{k+2} = 2(t+1)^2 - t^2 + 2 = (t+2)^2,$$

$$a_{k-1} = 2t^2 - (t+1)^2 + 2 = (t-1)^2.$$

于是,用数学归纳法易证,数列 $\{a_0, a_1, a_2, \cdots\}$ 的所有项都是完全平方数.

8·65　证明如果一个矩形的边长为奇数,则其内部不含这样的点,它到四个顶点的距离都是整数.

(前南斯拉夫数学奥林匹克,1973 年)

[证]　用 $x_1$ 和 $x_2$ 表示矩形内某一点 $P$ 到两条对边的距离,用 $y_1$ 和 $y_2$ 表示 $P$ 到另一组对边的距离.

则由已知条件,矩形的边长

$$A = x_1 + x_2, \quad B = y_1 + y_2$$

都是奇数.

假设 $P$ 点到四个顶点的距离 $a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}$ 都是整数,且

$$x_i^2+y_j^2=a_{ij}^2,\quad i=1,2,\quad j=1,2.$$

记 $u_i=x_iA\cdot B,\quad v_j=y_jA\cdot B$,则

$$\begin{aligned}u_1-u_2&=(x_1-x_2)A\cdot B=(x_1^2-x_2^2)B\\&=[(x_1^2+y_1^2)-(x_2^2+y_2^2)]B\\&=(a_{11}^2-a_{21}^2)B\\&=C.\end{aligned}$$

$$u_1+u_2=(x_1+x_2)A\cdot B=A^2\cdot B=D.$$

同理 $$v_1-v_2=(a_{11}^2-a_{12}^2)A=E,$$

$$v_1+v_2=(y_1+y_2)A\cdot B=A\cdot B^2=F.$$

$$u_i^2+v_j^2=(x_i^2+y_j^2)A^2\cdot B^2=a_{ij}^2A^2B^2=b_{ij}^2.$$

这里 $C,E$ 与 $b_{ij}$ 都是整数,$D$ 与 $F$ 是奇数.

若 $u_i,v_j$ 都是整数.

由于 $u_1+u_2$ 为奇数,故 $u_1,u_2$ 有一个为奇数,同理,$v_1,v_2$ 有一个为奇数.设 $u$ 和 $v$ 表示这两个奇数,$b^2=u^2+v^2$.

对奇数 $u,v$ 有

$$u^2\equiv1\pmod 4,$$

$$v^2\equiv1\pmod 4,$$

则 $$b^2\equiv2\pmod 4.$$

但是不可能有整数的平方对模 4 余 2.

因此,$u_i,v_j$ 不全是整数.于是 $U_i=2u_i=D\pm C,\quad V_j=2v_j=F\pm E$ 至少有一个是奇数.不妨设这个奇数为 $U_1$,则由

$$u_1^2+v_1^2=b_{11}^2$$

可得 $$U_1^2+V_1^2=4b_{11}^2.$$

但是这是不可能的.因为

$$U_1^2\equiv1\pmod 4,\quad 4b_{11}^2\equiv0\pmod 4,$$

而 $$V_1^2\not\equiv3\pmod 4.$$

因此这样的点不存在.

8·66 设 $k_1<k_2<k_3<\cdots<\cdots$ 是正整数,且没有两个是相邻的,又对于 $m=1,2,3,\cdots,S_m=k_1+k_2+\cdots+k_m$.

求证 对每一个正整数 $n$,区间 $[S_n,S_{n+1})$ 中至少含有一个完全

平方数.

（中国上海市数学竞赛,1996年）

**[证1]** 区间$[S_n,S_{n+1})$至少含有一个完全平方数的充要条件是区间$[\sqrt{S_n},\sqrt{S_{n+1}})$中至少含有一个整数.

这等价于证明:对每个$n\in N$,都有$\sqrt{S_{n+1}}-\sqrt{S_n}\geqslant 1$.

其又等价于$\sqrt{S_{n+1}}\geqslant\sqrt{S_n}+1$

$$\Leftrightarrow S_{n+1}\geqslant S_n+2\sqrt{S_n}+1,$$

$$\Leftrightarrow S_{n+1}-S_n\geqslant 2\sqrt{S_n}+1,$$

$$\Leftrightarrow k_{n+1}\geqslant 2\sqrt{S_n}+1,$$

注意到$k_{m+1}-k_m\geqslant 2$.所以当$k_n$为偶数时,

$$S_n=k_n+k_{n-1}+\cdots+k_1\leqslant k_n+(k_n-2)+\cdots+2$$

$$=\frac{k_n(k_n+2)}{4}=\frac{(k_n+1)^2-1}{4}$$

$$<\frac{(k_n+1)^2}{4}$$

当$k_n$为奇数时,

$$S_n=k_n+k_{n-1}+\cdots+k_1\leqslant k_n+(k_n-2)+\cdots+1$$

$$=\frac{(k_n+1)^2}{4}$$

于是有　$\sqrt{S_n}\leqslant\frac{k_n+1}{2},k_n\geqslant 2\sqrt{S_n}-1,$

且　$k_{n+1}\geqslant k_n+2\geqslant 2\sqrt{S_n}+1.$

从而本题得证.

**[证2]** 用反证法.

假设对于某个$n\in N$,区间$[S_n,S_{n+1})$中没有完全平方数.

则存在非负整数$a$,使得

$$a^2<S_n<S_{n+1}\leqslant(a+1)^2. \quad ①$$

这样就有$k_{n+1}=S_{n+1}-S_n<(a+1)^2-a^2=2a+1.$

由于$k_1<k_2<\cdots<k_n<k_{n+1}$是没有两个相邻的正整数,则

$$k_n\leqslant k_{n+1}-2<2a+1-2=2a-1.$$

继而有$k_{n-1}<2a-3,$

$k_{n-2}<2a-5,$

……

$$S_n = k_n + k_{n-1} + \cdots + 1$$
$$< (2a-1) + (2a-3) + \cdots + 1$$
$$= a^2 \quad ②$$

这表明②与①矛盾,故所设不真.因此命题成立.

8·67 $M$ 是$\{1,2,3,\cdots,15\}$的一个子集,使得 $M$ 的任何 3 个不同元素的乘积不是一个平方数,确定 $M$ 内全部元素的最多数目.

(第 35 届国际数学奥林匹克预选题,1994 年)

[解] 由于子集

$\{1,4,9\},\{2,6,12\},\{3,5,15\},\{7,8,14\}$

中,每个子集的 3 个正整数之积都是一个完全平方数,且它们两两不相交,则符合题目要求的子集 $M$ 的元素的个数至多有 11 个.

这是因为,如果 $M$ 的不同元素的个数大于或等于 12 个,则上述四个子集中,至少有一个子集的元素全在 $M$ 内(否则,上述四个子集,每个子集有 2 个元素在 $M$ 内,再加上$\{10,11,13\}$,只有 11 个元素).因此,$M$ 的元素个数至多有 11 个.

$M$ 可以这样组成,从上述四个子集中,每个子集各至少取一个元素,然而以$\{1,2,\cdots,15\}$中去掉这 4 个元素.

注意这样一点,上述四个三元子集中的元素不包括 10.

(1)如果 $10 \notin M$,则 $M$ 内元素的个数小于或等于 10.

(2)如果 $10 \in M$,我们用反证法证明 $M$ 内元素的个数也小于或等于 10.

假设 $M$ 内元素的个数大于 10.由前所证,$M$ 的元素个数至多有 11 个,则 $M$ 的元素个数为 11.

如果$\{3,12\}$不是 $M$ 的子集,即 3 与 12 这两个数至少有一个不在 $M$ 内,在$\{1,2,\cdots,15\}$中至多再减掉 3 个数,组成集合 $M$.

当然 10 在 $M$ 内.

由于$\{2,5\},\{6,15\},\{1,4,9\},\{7,8,14\}$是四个两两不相交的子集,3 与 12 不在其中,于是这四个子集中,至少有一个子集在 $M$ 内.如果留在 $M$ 内的是一个三元子集,由于 $1\times4\times9=6^2$,$7\times8\times14=28^2$,都是完全平方数,不合题意.

如果留在 $M$ 内的是一个二元子集,对于$\{2,5\}$,由于 $2\times5\times10=$

$10^2$,是一个完全平方数,对于{6、15},由于 $6\times15\times10=30^2$ 是一个完全平方数,也不合题意.

如果{3,12}是 $M$ 的一个子集,那么,由题意{1},{4},{9},{2,6},{5,15}和{7,8,14}中的任一个都不是 $M$ 的一个子集,这是因为

$1\times3\times12=6^2, 4\times3\times12=12^2, 9\times3\times12=18^2,$

$2\times6\times12=12^2, 5\times15\times3=15^2, 7\times8\times14=28^2.$

这样一来,上述六个两两不相交的子集的每个子集中至少有一个元素不在 $M$ 内,于是 $M$ 的元素个数至多为 $15-6=9$ 个,与 $M$ 恰有 11 个元素矛盾.

所以,满足题目条件的 $M$ 的全部元素的个数不会超过 10 个.

我们构造一个恰含 10 个元素的集合 $M$.

$$M=\{1,4,5,6,7,10,11,12,13,14\}$$

可以验证,$M$ 中任 3 个元素之积都不是完全平方数.

8·68　$n$ 是一个给定的正整数,有多少个在 $\bmod 2^n$ 意义下的完全平方数?

(英国数学奥林匹克,1994 年)

[解]　用 $A_n$ 表示在 $\bmod 2^n$ 意义下的完全平方数的个数.

显然,对 mod2,有 0,1 两个完全平方数,

对 $\bmod 2^2=\bmod 4$,也只有 0,1 两个完全平方数.

即有　　$A_1=2, A_2=2.$

对于 $n\geqslant3$,我们证明 $A_n=2^{n-3}+A_{n-2}$　　①

设 $a,b$ 是奇数,$0<a<2^n, 0<b<2^n$,且满足

$$a^2\equiv b^2(\bmod 2^n),$$

即
$$(a+b)(a-b)\equiv0(\bmod 2^n).$$

由于 $a,b$ 是奇数,则 $a-b, a+b$ 都是偶数,考虑 mod4.由于奇数是 $4k+1$ 或 $4k+3$ 型,那么 $a-b$ 与 $a+b$ 不可能都是 4 的倍数,即 $a-b$ 与 $a+b$ 之中必有一个是 2 的倍数,而不是 4 的倍数.这时必有

$$a-b\equiv0(\bmod 2^{n-1})$$

或
$$a+b\equiv0(\bmod 2^{n-1}).$$

于是　$b\equiv a(\bmod 2^n)$ 或 $b\equiv -a(\bmod 2^{n-1})$.

利用 $0<a<2^n, 0<b<2^n$ 及上式,有

$$b\equiv a(\bmod 2^n), b\equiv 2^{n-1}+a(\bmod 2^n).$$

或　$b\equiv 2^{n-1}-a(\mathrm{mod}2^n)$，且 $b\equiv 2^n-a(\mathrm{mod}2^n)$.

由于 $a$ 是奇数，当 $n\geqslant 3$ 时，上述四个同余式的右端 4 个正整数 $a$，$2^{n-1}+a$，$2^{n-1}-a$，$2^n-a$ 两两不等，在 $\mathrm{mod}2^n$ 的意义下，大于或等于 1 小于 $2^n$ 的奇数一共有 $2^{n-1}$ 个. 在这 $2^{n-1}$ 个奇数中，任取一个作为 $a$，对于这个 $a$，由上面的论述可知，满足 $a^2\equiv b^2(\mathrm{mod}2^n)$ 的有 4 个，即 $b=a$，$b=2^n-a$，$b\equiv 2^{n-1}+a(\mathrm{mod}2^n)$，$b\equiv 2^{n-1}-a(\mathrm{mod}2^n)$，因此，将这 $2^{n-1}$ 个奇数，可分为 4 个奇数一组进行分组，一共有 $\frac{2^{n-1}}{4}=2^{n-3}$ 组，对于不同两组中的奇数，$a^2\equiv b^2(\mathrm{mod}2^n)$ 不成立. 因此，在奇数情况下，所求数目为 $2^{n-3}$.

在偶数情况下，设偶数 $2a$，$2b$，$0\leqslant 2a<2^n$，$0\leqslant 2b<2^n$，满足

$$(2a)^2\equiv(2b)^2(\mathrm{mod}2^n).$$

从而有 $0\leqslant a<2^{n-1}$，$0\leqslant b<2^{n-1}$，且

$$a^2\equiv b^2(\mathrm{mod}2^{n-2}).$$

由于当 $2^{n-1}\leqslant 2a<2^n$，$2^{n-1}\leqslant 2b<2^n$ 时，有

$$(2a-2^{n-1})^2\equiv(2a)^2(\mathrm{mod}2^n),$$
$$(2b-2^{n-1})^2\equiv(2b)^2(\mathrm{mod}2^n),$$

所以只须考虑 $0\leqslant 2a<2^{n-1}$，$0\leqslant 2b<2^{n-1}$ 的情况.

这时，在 $\mathrm{mod}2^{n-2}$ 意义下，完全平方数的个数与在 $\mathrm{mod}2^n$ 意义下，完全平方数是偶数的个数成一一对应. 因此公式①成立.

在公式①中，当 $n$ 为偶数时，有

$$A_{2k}=2^{2k-3}+A_{2k-2},A_{2k-2}=2^{2k-5}+A_{2k-4},$$
$$A_{2k-4}=2^{2k-7}+A_{2k-6},\cdots\cdots$$
$$A_6=2^3+A_4,A_4=2+A_2.$$

将上述 $k-1$ 个式子相加得

$$\begin{aligned}A_{2k}&=(2+2^3+\cdots+2^{2k-5}+2^{2k-3})+A_2\\&=\frac{1}{3}(2^{2k-1}-2)+2\\&=\frac{1}{3}(2^{2k-1}+4).\end{aligned}$$

当 $n$ 为奇数时，有

$$A_{2k+1}=2^{2k-2}+A_{2k-1},A_{2k-1}=2^{2k-4}+A_{2k-3},$$
$$A_{2k-3}=2^{2k-6}+A_{2k-5},\cdots\cdots$$

$A_5=2^2+A_3, A_3=2^0+A_1,$

将上诸式相加得

$$A_{2k+1}=(2^0+2^2+\cdots+2^{2k-4}+2^{2k-2})+2=\frac{1}{3}(2^{2k}+5)$$

于是得 $A_n=\begin{cases}\frac{1}{3}(2^{n-1}+4), n \text{ 为偶数}, \\ \frac{1}{3}(2^{n-1}+5), n \text{ 为奇数}.\end{cases}$

8·69　求出有序整数对$(m,n)$的个数,其中$1\leqslant m\leqslant 99, 1\leqslant n\leqslant 99$,$(m+n)^2+3m+n$是完全平方数.

（第17届美国数学邀请赛,1999年）

[解]　由$1\leqslant m\leqslant 99, 1\leqslant n\leqslant 99$可得

$$(m+n)^2+3m+n<(m+n)^2+4(m+n)+4$$
$$=(m+n+2)^2.$$

又　$(m+n)^2+3m+n>(m+n)^2.$

于是$(m+n)^2<(m+n)^2+3m+n<(m+n+2)^2.$

若$(m+n)^2+3m+n$是完全平方数,则必有

$$(m+n)^2+3m+n=(m+n+1)^2.$$

然而$(m+n)^2+3m+n=(m+n+1)^2+n-m-1.$

于是必有 $n-m-1=0.$

即　$m=n-1.$

此时　$n=2,3,\cdots,99, m=1,2,\cdots,98.$

所以所求有序整数对$(m,n)$共有98对:

$(m,n)=(1,2),(2,3),\cdots,(98,99).$

# 第九章 数的可除性特征

9·1 设 $p$ 是大于3的素数,若 $p^n$($n$ 是自然数)是20位数.证明在这20个数码中至少有3个数码是相同的.

(基辅数学奥林匹克,1981年)

[证] 假设 $p^n$ 中的20个数码没有三个是相同的,则数码0,1,2,…,9在 $p^n$ 中各出现2次.

计算 $p^n$ 的各位数码之和为

$$2(0+1+2+\cdots+9)=90.$$

则 $p^n$ 是3的倍数,从而 $p$ 是3的倍数,又 $p$ 是大于3的素数,这是不可能的.

所以在 $p^n$ 的20位数码中必有三个是相同的.

9·2 两人一起写一个由1,2,3,4,5这五个数码组成的 $2k$ 位数,第一个人写第一位数码,第二个人写第二位数码,第三位数码仍由第一个人写,依次类推.在第一个人设法干扰的情况下,第二个人能否使所得之数被9整除?讨论以下两种情况:

(1)$k=10$.

(2)$k=15$.

(基辅数学奥林匹克,1975年)

[解] 设所写的 $2k$ 位数为

$$N=\overline{a_1a_2\cdots a_{2k-1}a_{2k}}.$$

其中 $a_i\in\{1,2,3,4,5\}$.

设第一个人为 $A$,第二个人为 $B$.

奇数下标 $i$ 的数码 $a_i$ 由 $A$ 选取,而偶数下标 $i$ 的数码 $a_i$ 由 $B$ 选取.

再设 $$S_i = \sum_{t=1}^{i} a_t.$$

则 $N$ 能被 9 整除的充要条件是 $S_{2k}$ 能被 9 整除.

(1) 当 $k = 3m$（$m$ 为自然数）时，我们可以证明，在这种情况下，不管 $A$ 如何选取，$B$ 总能获胜.

为此，对应 $A$ 取的任意数 $a_{2i-1}$，$1 \leqslant i \leqslant k$，$B$ 应取 $a_{2i} = 6 - a_{2i-1}$，显然，由 $a_{2i-1} \in \{1,2,3,4,5\}$，可得 $6 - a_{2i-1} = a_{2i} \in \{1,2,3,4,5\}$.

这时，对任意的 $i \leqslant k$，

$$S_{2i} = (a_1 + a_2) + \cdots + (a_{2i-1} + a_{2i}) = 6i.$$

$$S_{2k} = 6k = 18m.$$

所以不管 $A$ 如何选取，$B$ 总能使 $N$ 能被 9 整除.

(2) 当 $k$ 不能被 3 整除时，我们证明，在这种情况下，$A$ 可以使 $B$ 不能达到目的.

为此，$A$ 只要取 $a_1 = 3$，然后对应 $B$ 取的任意 $a_{2i}$，$1 \leqslant i \leqslant k-1$，$A$ 只要选取 $a_{2i+1} = 6 - a_{2i}$，这样一来

$$\begin{aligned} S_{2k} &= a_1 + (a_2 + a_3) + \cdots + (a_{2k-2} + a_{2k-1}) + a_{2k} \\ &= 3 + 6(k-1) + a_{2k} \\ &= 6k - 3 + a_{2k}. \end{aligned}$$

如果 $k = 3m + 1$，那么

$$S_{2k} = 18m + 3 + a_{2k}.$$

它被 9 除的余数为 $3 + a_{2k}$，由 $a_{2k} \in \{1,2,3,4,5\}$，则

$$3 + a_{2k} \in \{4,5,6,7,8\}.$$

此时 $$S_{2k} \equiv 4,5,6,7,8 \pmod 9).$$

因此不能被 9 整除.

如果 $k = 3m + 2$，那么

$$S_{2k} = 18m + 9 + a_{2k}.$$

由于 $a_{2k} \in \{1,2,3,4,5\}$，则

$$S_{2k} \equiv 1,2,3,4,5 \pmod 9).$$

因此，$S_{2k}$ 不能被 9 整除.

这样，当 $k$ 不能被 3 整除时，$A$ 可以采取上述策略使 $B$ 不能达到目

的.

9·3　两个小孩依次写一个 $k$ 位数:第一个数码由第一个人写,第二个数码由第二个人写,第三个数码又由第一个人写,依次类推.第二个小孩能否做到使得出的数能被 9 整除,如果第一个小孩干扰第二个小孩做成功,请对以下两种情况加以讨论:

(1) $k = 10$;

(2) $k = 13$.

(基辅数学奥林匹克,1975 年)

[解]　一个自然数被 9 除后所得的余数与这数的各位数码之和被 9 除后所得的余数相同.

所以,写最后一个数码的小孩,不管前面所写的各位数是什么,对所写的最后一个数码都可以选择符合要求的余数,即写最后一个数码的小孩既可以使这个 $k$ 位数能被 9 整除,也可以使这个 $k$ 位数不能被 9 整除.

事实上,最后一个数码之外的前面各位数码之和被 9 除的余数为 $n$,则

$$n \in \{0,1,2,\cdots,8\}.$$

如果最后一个数码取 $9 - n \in \{1,2,\cdots,9\}$,那么所得之数的各位数码之和被 9 除的余数将是

$$(9 - n) + n = 9.$$

即这个和能被 9 整除,从而这个 $k$ 位数也能被 9 整除.

如果最后一个数码取 $8 - n \in \{0,1,\cdots,8\}$,那么所得之数的各位数码之和被 9 除的余数将是

$$(8 - n) + n = 8.$$

即这个和不能被 9 整除,从而这个 $k$ 位数也不能被 9 整除.

当 $k$ 为偶数(如 $k = 10$)时,最后一步由第二个小孩做,他能达到自己的目的.

当 $k$ 为奇数(如 $k = 13$)时,第一个小孩可以用自己的最后一步干扰第二个小孩,使之不成功.

9·4　能被 3 整除,且构成每个数的数码只限于 1,2,3(1,2,3 可以不全部用到)的所有小于 200000 的不同自然数共有多少个?

(中国上海市高二数学竞赛,1988 年)

[**解 1**]　由于能被 3 整除的自然数的充分必要条件是它的各位数码之和能被 3 整除，所以，一位数中能被 3 整除的只有 3.

对二位数，若十位数是 1，则个位是 2；若十位数是 2，则个位是 1；若十位数是 3，则个位是 3，因此，满足条件的二位数只有三个：12，21，33.

对三位数，若十位与百位的数码和为 2，则只有 11，此时个位是 1，即三位数为 111；若十位与百位的数码和为 3，则只有 12 和 21，此时个位只能是 3，即三位数为 123，213；若十位与百位的数码和为 4，则有 13，31，22，此时个位数码只能是 2，即 132，312，222；若十位与百位的数码和为 5，则有 23，32 两种，此时个位只能是 1，即 231，321；若十位与百位的数码和为 6，则只有 33，此时个位只能是 3，即 333.

因此满足条件的三位数有 $1+2+3+2+1=9=3^2$ 个，

类似地满足条件的四位数有 $3^3$ 个，五位数有 $3^4$ 个.

满足条件的六位数，其首位数码必须是 1，此时也有 $3^4$ 个.

故满足条件的自然数共有

$$1+3+3^2+3^3+2\cdot 3^4=202(\text{个}).$$

[**解 2**]　由数码 1，2，3 构成的 $k$ 位数共有 $3^k$ 个.

把这 $3^k$ 个数按从小到大的顺序排成一列：

$$11\cdots11,\quad 11\cdots12,\quad 11\cdots13,\quad 11\cdots21,\quad 11\cdots22,\quad \cdots,\quad 33\cdots33.$$

我们把这一列数从前面开始，把相继三个数分成一组，故可分为 $\frac{3^k}{3}=3^{k-1}$ 组，因为每一组中的三个数被 3 除的余数都不相同，故这 $3^k$ 个数中被 3 除余 0，1，2 的数各有 $3^{k-1}$ 个.

于是，一位数中被 3 整除的数有 $3^{1-1}=1$ 个. 二位数中被 3 整除的数有 $3^{2-1}=3$ 个，…，五位数中被 3 整除的数有 $3^{5-1}=3^4$ 个，又六位数的首位数必须是 1，因此 1 后面的五位数被 3 除应余 2，其数目也为 $3^{5-1}=3^4$ 个，因此共有

$$1+3+3^2+3^3+3^4+3^4=202(\text{个}).$$

**9·5**　$n$ 是具有下述性质的最小整数：它是 15 的倍数，而且每一位数字都是 0 或 8. 求 $\frac{n}{15}$.

（第 2 届美国数学邀请赛，1984 年）

[**解**]　由于 $n$ 是 15 的倍数，所以 $n$ 既是 5 的倍数，又是 3 的倍数. 因为 $n$ 是 5 的倍数，所以它的个位数字只能是 0 或 5，又由题设，$n$ 的每

一位数字是 0 或 8，所以 $n$ 的个位数字是 0.

又因为 $n$ 是 3 的倍数，所以 $n$ 中 8 的个数应是 3 的倍数，又要求 $n$ 最小，所以 $n$ 中应含有 3 个 8. 于是

$$n = 8880.$$

$$\frac{n}{15} = \frac{8880}{15} = 592.$$

**9·6** 任取一个能被 9 整除的 1962 位数，它的各位数码之和记为 $a$，$a$ 的各位数码之和记为 $b$，$b$ 的各位数码之和记为 $c$. 问 $c$ 等于多少？

（第 2 届全俄数学奥林匹克，1962 年）

［解］ 由题设

$$a \leqslant 1962 \cdot 9 = 17658 < 19999,$$
$$b \leqslant 1 + 4 \cdot 9 = 37,$$
$$c \leqslant 3 + 9 = 12.$$

因为任何一个正整数与它的各位数字之和在除以 9 时有相同的余数.

由于已给的 1962 位数能被 9 整除，则 $a, b, c$ 均能被 9 整除.

鉴于 $$c \leqslant 12,$$
所以 $$c = 9.$$

**9·7** 设 $A$ 是十进制数 $4444^{4444}$ 的各位数字之和，而 $B$ 是 $A$ 的各位数字之和，求 $B$ 的各位数字之和（这里所有的数都是十进制数）.

（第 17 届国际数学奥林匹克，1975 年）

［解］ 首先估计 $4444^{4444}$ 的位数.

由于 $$4444^{4444} < 10000^{4444},$$
而 $10000^{4444}$ 有 $4 \cdot 4444 + 1 = 17777$ 个数字，而每个数字最大只能是 9，

因此，$4444^{4444}$ 不超过 17777 位，且

$$A < 17777 \cdot 9 = 159993.$$

则 $A$ 不超过六位数.

记 $A = a_5 \cdot 10^5 + a_4 \cdot 10^4 + a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$，其中 $a_5 \leqslant 1$，$a_4, a_3, a_2, a_1, a_0$ 不大于 9.

因此，有 $$B \leqslant 1 + 5 \cdot 9 = 46.$$

则 $B$ 不超过两位数.

记 $B = b_1 \cdot 10 + b_0$， 其中 $0 \leqslant b_0 \leqslant 9$， $0 \leqslant b_1 \leqslant 4$.

又设 $B$ 的各位数字和是 $C$，则

$$C < 4 + 9 = 13.$$

由于一个整数如果它不是 9 的倍数，那么，当它被 9 除时所得的余数，正好等于该数的各位数字之和被 9 除的余数.

所以需要求出 $4444^{4444}$ 被 9 除的余数.

因为 $$4444 = 493 \cdot 9 + 7,$$

所以 $$4444^{4444} \equiv 7^{4444} \pmod 9,$$

$$\begin{aligned} 7^{4444} &= 7^{4443} \cdot 7 \\ &= (7^3)^{1481} \cdot 7 \\ &= (342 + 1)^{1481} \cdot 7. \end{aligned}$$

于是 $$7^{4444} \equiv 1^{1481} \cdot 7 \pmod 9.$$

因此 $$4444^{4444} \equiv 7 \pmod 9.$$

这样就有

$$4444^{4444} \equiv A \equiv B \equiv C \pmod 9.$$

所以 $$C \equiv 7 \pmod 9.$$

又由于 $$C < 13.$$

所以 $$C = 7.$$

即 $B$ 的各位数字之和等于 7.

9·8 对 1 至 1000000000 的所有正整数，求每一个数的各位数字之和，再对所得的 10 亿个数，求每一个数的各位数字之和，…，直到得到 10 亿个一位数为止. 问所得数中 1 多还是 2 多?

（第 4 届全俄数学奥林匹克，1964 年）

［解］ 因为任何正整数与它的各位数字之和在被 9 除时，有相同的余数.

因此，得到数字和为 1 的数是所有 $9k + 1$ 型的数，即

$$1, 10, 19, 28, \cdots, 999999991, 1000000000.$$

共有 111111112 个.

而得到的数字和为 2 的数是所有 $9k + 2$ 型的数，即

$$2, 11, 20, 29, \cdots, 999999992.$$

共有 111111111 个.

所以所得的数中 1 比 2 多 1 个.

9·9　定义$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$如下：

$a_1 = 1989^{1989}$，且$a_n(n>1)$等于$a_{n-1}$的各位数字之和，$a_5$等于多少？

（第21届加拿大数学竞赛，1989年）

［解］　由于　$a_1 = 1989^{1989} < 10000^{1989}$，

而$10000^{1989}$共有$4\cdot 1989+1=7957$位.

所以$a_1$不多于7957位.

由题设，$a_2$是$a_1$的各位数字之和，则

$$a_2 < 10\cdot 8000 = 80000.$$

所以$a_2$最多为5位数，因而

$$a_3 \leqslant 7+4\cdot 9 = 43,$$

$$a_4 \leqslant 4+9 = 13.$$

于是$a_5$为一位数.

由于任何一个正整数能被9整除的充要条件是它的数字和能被9整除.

由于$9 \mid 1+9+8+9=27$，则

$$9 \mid 1989^{1989}.$$

于是　$9 \mid a_5$.

即　$a_5 = 0$或9.

$a_5=0$显然不可能，所以$a_5=9$.

9·10　抹去数$2^{1970}$的第一位数码，并将所得的数与该数码相加，再对加得的和数重复刚才的步骤，如此一直下去，直至得到一个十位数为止.证明该十位数中必有两个相同的数码.

（第33届莫斯科数学奥林匹克，1970年）

［证］　首先注意到，题设中的运算步骤所得到的每一个数都与$2^{1970}$对模9同余.

由于
$$\begin{aligned}2^{1970} &= 2^{6\cdot 328+2}\\ &= 4\cdot 64^{328}\\ &= 4(9\cdot 7+1)^{328}\\ &\equiv 4 \pmod 9.\end{aligned}$$

因此$2^{1970}$不能被9整除，进而题中所得各数均不能被9整除.

若该十位数没有两个相同的数码,则这个十位数由数码0,1,2,3,4,5,6,7,8,9组成,而

$$0+1+2+3+\cdots+9=45$$

是9的倍数.

于是该十位数也是9的倍数,这是不可能的.

9·11　有七块分别标有数码1,2,3,4,5,6,7的记分牌.证明,由这七块记分牌组成的任何两个七位数中,一个都不能被另一个整除.

(第15届莫斯科数学奥林匹克,1952年)

[证]　设这七位数为$\overline{a_1a_2\cdots a_7}$.

由于$a_1+a_2+\cdots+a_7=1+2+\cdots+7=28$,被9除余1,则由这七个数码组成的七位数被9除余1.

设$A,B$是其中的两个不同的七位数,且$A$能被$B$整除,则$\frac{A}{B}$是整数.

从而$\frac{A-B}{B}$是整数.

又$A$与$B$对模9余1,则$A-B$能被9整除,而$B$不能被9整除,于是$\frac{A-B}{B}$能被9整除.

又
$$\frac{A-B}{B}<7,$$

则$A-B=0$,即$A=B$,与$A$和$B$不同矛盾.

9·12　给定数字$2^k$,其中$k$是一个大于3的自然数.证明不论怎样重排$2^k$的数码,都不能得到一个等于$2^n$的数,其中$n$为任意一个大于$k$的自然数.

(第34届莫斯科数学奥林匹克,1971年)

[证]　首先注意到这样一个事实:对数$A$的各位数码无论如何重排,都不会使数$A$扩大9倍或更多倍.因此应有

$$\frac{2^n}{2^k}<9. \quad ①$$

此外,如果两个数具有相同的数码,则它们的差能被9整除.即有

$$9\mid 2^n-2^k.$$

从而
$$9\mid 2^k(2^{n-k}-1),$$

即 $$9 \mid 2^{n-k}-1.$$

但由①式可知 $$2^{n-k}<9,$$



因此 $2^{n-k}-1$ 不可能是 9 的倍数.

即不可能使 $2^k$ 的各位数码重排得到 $2^n(n>k)$.

9·13 在十进位中,各位数码是 0 或 1,并且能被 225 整除的最小自然数是多少?

(中国初中数学联赛,1989 年)

[解] 注意到 $225=9\cdot25$,且 9 和 25 互素.因此所求的数应同时能被 9 和 25 整除.

若这个数能被 25 整除,则它的末两位数均为 0,即必为 00.

若这个数能被 9 整除,则它的各位数码之和能被 9 整除,为使其最小,应为 9 个 1.

于是,满足题目要求的最小自然数是

$$11111111100.$$

9·14 $N$ 是由 5 个不同的非零数码组成的 5 位数,且 $N$ 等于这 5 个数码中取 3 个不同的数码构成的所有三位数的和,求所有的这种 5 位数 $N$.

(第 6 届拉丁美洲数学竞赛,1991 年)

[解] 设 5 位数 $N=\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$.

$a_1$ 作百位的三位数有 $P_4^2=12$ 个,

$a_1$ 作十位的三位数有 $P_4^2=12$ 个,

$a_1$ 作个位的三位数有 $P_4^2=12$ 个.

于是依题意有

$$\begin{aligned} N&=\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}\\ &=(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)(100\cdot12+10\cdot12+12)\\ &=1332(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5). \end{aligned}$$

由于 $9\mid1332$,则

$$9\mid N=\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}.$$

从而 $$9\mid(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5).$$

于是 $N$ 应是 $1332\cdot9=11988$ 的倍数.

因为

$$15=1+2+3+4+5\leqslant a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$$
$$\leqslant 9+8+7+6+5=35,$$

所以 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$ 只能为 18 或 27.

(1) 当 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=18$ 时,

$$\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}=1332\cdot 18=23976,$$

但是 $2+3+9+7+6=27\neq 18.$

(2) 当 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=27$ 时,

$$\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}=1332\cdot 27=35964.$$

此时 $3+5+9+6+4=27.$

所以,所求的五位数只有 35964.

9·15 圆上有1956个数码,已知从某一位起把这些数按顺时针方向记下,得到的一个 1956 位数能被 27 整除. 证明如果从任何一位起把这些数码按顺时针方向记下的话,那么所得的一个 1956 位数也能被 27 整除.

(基辅数学奥林匹克,1956 年)

[证] 本题的结论对于圆上写 $3n$ 个数码也是成立的. 现在我们证明这个一般情形.

假定从某一位开始按顺时针方向读起,得到的 $3n$ 位数为

$$\overline{a_1a_2\cdots a_{3n}}=10^{3n-1}a_1+10^{3n-2}a_2+\cdots+10a_{3n-1}+a_{3n}.$$

并设 $27\mid\overline{a_1a_2\cdots a_{3n}}.$

我们只要证明从相邻一位读起所得到的数

$$\overline{a_2a_3\cdots a_{3n}a_1}$$

也能被 27 整除即可.

研究下面的差

$$\begin{aligned}&10\cdot\overline{a_1a_2a_3\cdots a_{3n}}-\overline{a_2a_3\cdots a_{3n}a_1}\\&=(10^{3n}-1)a_1\\&=(1000^n-1)a_1.\end{aligned}$$

由于 $1000\equiv 1\pmod{27},$

则 $1000^n\equiv 1\pmod{27},$

$$27\mid 1000^n-1.$$

又 $$27 \mid 10 \cdot \overline{a_1a_2\cdots a_{3n}},$$
所以 $$27 \mid \overline{a_2a_3\cdots a_{3n}a_1}.$$



9·16　已知数$\overline{32※35717※}$能被 72 整除,求这两个星号所表示的数码.

(基辅数学奥林匹克,1963 年)

[解]　由于$\overline{32※35717※}$能被 72 整除,因而它能被 8 和 9 整除.

若一个数能被 8 整除,则这个数的末三位能被 8 整除,显然末三位是 176,即最后一个 ※ 号为 6.

若一个数能被 9 整除,则这个数的各位数码之和能被 9 整除,即

$$3+2+※+3+5+7+1+7+6$$
$$=34+※.$$

于是 ※ 号为 2.

即所求的两个星号数码一个为 2,一个为 6.

9·17　设$\overline{a679b}$是一个十进制的五位数,可被 72 整除,试决定 $a$ 与 $b$ 的值.

(第 12 届加拿大数学竞赛,1980 年)

[解]　由于 $72=8\cdot 9$,　8 和 9 互素.

所以$\overline{a679b}$若能被 72 整除,则必须同时能被 8 和 9 整除.

如果$\overline{a679b}$能被 8 整除,其充要条件是末三位 $79b$ 能被 8 整除.

由此可得到惟一的 $b=2$.

如果$\overline{a6792}$能被 9 整除,其充要条件是它的各位数字和能被 9 整除.即

$$a+6+7+9+2=24+a$$

能被 9 整除,可得到惟一的 $a=3$.

于是 $$a=3,\quad b=2,$$
此时 $$36792=72\cdot 511.$$

9·18　用 1,2,3,4,5,6 这六个数码组成一个六位数$\overline{abcdef}$,其中不同的字母代表 1—6 中不同的数码,要求前两个数码组成的两位数$\overline{ab}$是 2 的倍数;并且还要求$\overline{abc}$是 3 的倍数;$\overline{abcd}$是 4 的倍数;$\overline{abcde}$是 5 的倍数;$\overline{abcdef}$是 6 的倍数,试找出所有这样的六位数,并说明你的推理过程.

(中国北京市初中二年级数学竞赛,1982 年)

[解]　因为要求$\overline{ab}$是2的倍数，$\overline{abcd}$是4的倍数，$\overline{abcdef}$是6的倍数，所以

$$b,d,f\in\{2,4,6\},$$
$$a,c,e\in\{1,3,5\}.$$

又因为$\overline{abcde}$是5的倍数，所以$e=5$.

这时第1位$a$与第3位$c$只能取1或3，此时有$a+c=4$.

因为$\overline{abc}$是3的倍数，则

$$3\mid a+b+c=4+b.$$

于是只能有　$b=2$.

这时，所求六位数只能从如下几个数中去寻找：

123456，　123654，

321456，　321654.

经检验，由$4\nmid 1234$，　$4\nmid 3214$.

所以只有123654与321654是满足题目要求的六位数.

9·19　由数字0,1,2,3,4,5能否组成数字不重复且能被11整除的六位数？为什么？

（中国广西壮族自治区数学竞赛，1979年）

[解]　设所组成的六位数是$\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$.若这个六位数能被11整除，则

$$a_1-a_2+a_3-a_4+a_5-a_6=11n,$$

即　$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=11n+2(a_2+a_4+a_6).\quad ①$$

由于　$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=15,$$

则　$$11n+2(a_2+a_4+a_6)=15.\quad ②$$

显然，$0\leqslant n<2$，从而$n=0$或$n=1$.

(1) 当$n=0$时，②化为

$$2(a_2+a_4+a_6)=15,$$

此式左端为偶数，右端为奇数，不可能成立.

(2) 当$n=1$时，②化为

$$a_2+a_4+a_6=2.$$

但是，0,1,2,3,4,5中任意三个数之和都大于2，所以此时也无解.

综合以上，由0,1,2,3,4,5不可能组成数字不重复且能被11整除的六位数.

**9·20** 求所有满足如下条件的三位数:它除以11所得的商等于它的各位数码的平方和.

(第2届国际数学奥林匹克,1960年)

[解] 设所求的三位数为

$$n = 100a + 10b + c,$$

其中 $b, c \in \{0,1,2,\cdots,9\}$, $a \in \{1,2,\cdots,9\}$.

$n$ 能被 11 整除的充要条件是 $a - b + c$ 能被 11 整除.

由于 $$-8 \leqslant a - b + c \leqslant 18,$$

于是只有 $$a - b + c = 0. \quad ①$$

$$a - b + c = 11. \quad ②$$

又由题意

$$100a + 10b + c = 11(a^2 + b^2 + c^2). \quad ③$$

下面分两种情况讨论:

第一种情况:解 ①,③,即解

$$\begin{cases} a - b + c = 0, & ① \\ 100a + 10b + c = 11(a^2 + b^2 + c^2). & ③ \end{cases}$$

由 ① 得 $$b = a + c.$$

代入 ③,可得

$$100a + 10(a + c) + c = 11[a^2 + (a + c)^2 + c^2],$$

$$11(10a + c) = 11(2a^2 + 2c^2 + 2ac),$$

$$10a + c = 2a^2 + 2c^2 + 2ac,$$

$$2a^2 + 2(c - 5)a + 2c^2 - c = 0. \quad ④$$

考虑方程 ④ 的根的判别式

$$\Delta = 4(c - 5)^2 - 8(2c^2 - c) \geqslant 0,$$

解得 $c$ 的范围为

$$\frac{-\sqrt{91} - 4}{3} \leqslant c \leqslant \frac{\sqrt{91} - 4}{3}. \quad ⑤$$

在满足 ⑤ 式的条件下,由方程 ④ 得

$$a = \frac{5 - c \pm \sqrt{25 - 8c - 3c^2}}{2}.$$

由于 $c$ 是非负整数,则由 ⑤ 式得

$$c = 0 \quad \text{或}\ c = 1.$$

注意到 $$10a+c=2a^2+2c^2+2ac,$$
则 $c$ 必为偶数,因此只有
$$c=0.$$
因而解得 $$a=5\text{ 或 }a=0.$$
由于 $a\in\{1,2,\cdots,9\}$,所以 $a=0$ 应舍去.

又由 $b=a+c$ 及 $a=5,\quad c=0$ 得
$$b=5.$$
于是得到所求的三位数是 550.

第二种情况:解 ②,③,即解
$$\begin{cases}a-b+c=11, & ②\\ 100a+10b+c=11(a^2+b^2+c^2). & ③\end{cases}$$
由 ② 得 $$b=a+c-11,$$
代入 ③,可得
$$100a+10(a+c-11)+c=11[a^2+(a+c-11)^2+c^2],$$
整理得
$$2a^2+2(c-16)a+2c^2-23c+131=0. \quad ⑥$$
考虑方程 ⑥ 的根的判别式
$$\Delta=4(c-16)^2-8(2c^2-23c+131)\geqslant 0,$$
解得 $c$ 的范围为
$$\frac{7-\sqrt{31}}{3}\leqslant c\leqslant\frac{7+\sqrt{31}}{3}. \quad ⑦$$
在满足 ⑦ 式的条件下,由方程 ⑥ 得
$$a=\frac{16-c\pm\sqrt{-3c^2+14c-6}}{2}.$$
由于 $c$ 是非负整数,则由 ⑦ 式得
$$c=1,\quad c=2,\quad c=3,\quad c=4.$$
又由 ⑥ 式得
$$23c=2a^2+2(c-16)a+2c^2+131,$$
所以 $c$ 必定为奇数,即只有
$$c=1\quad\text{或}\quad c=3.$$
当 $c=1$ 时, $a=\dfrac{15\pm\sqrt{5}}{2}$ 不是整数.

当 $c=3$ 时,可求得

$$a_1=8,\quad 或\quad a_2=5.$$

由 $b=a+c-11$ 及 $a=8,\ \ c=3$ 得

$$b=0.$$

这时,求得的三位数是 803.

由 $b=a+c-11$ 及 $a=5,\ \ c=3$ 得

$$b=-3.$$

不是非负整数,故舍去.

由以上,所求的三位数有两个:

550 和 803.

9·21　设自然数 $\overline{62\alpha\beta427}$ 为 99 的倍数,求 $\alpha,\beta$.

（中国上海市数学竞赛,1957 年）

[解]　因为 $\overline{62\alpha\beta427}$ 是 99 的倍数,所以它既是 9 的倍数,又是 11 的倍数.

因为 $\overline{62\alpha\beta427}$ 是 9 的倍数,则

$$6+2+\alpha+\beta+4+2+7=9m\quad (m\in N).$$

$$\alpha+\beta+3=9(m-2).$$

因为 $\qquad 0\leqslant\alpha\leqslant 9,\quad 0\leqslant\beta\leqslant 9,$

所以 $\qquad 3\leqslant\alpha+\beta+3\leqslant 21.$

于是 $\qquad \alpha+\beta+3=9$ 或 $\alpha+\beta+3=18.$

即 $\qquad \alpha+\beta=6$ 或 $\alpha+\beta=15.$

因为 $\overline{62\alpha\beta427}$ 是 11 的倍数,则

$$(6+\alpha+4+7)-(2+\beta+2)=11k\quad (k\in \overline{Z^-}),$$

$$\alpha-\beta+13=11k.$$

因为 $\qquad 4\leqslant\alpha-\beta+13\leqslant 22,$

所以 $\qquad \alpha-\beta+13=11$ 或 $\alpha-\beta+13=22,$

即 $\qquad \alpha-\beta=-2$ 或 $\alpha-\beta=9.$

从而可以得到四个方程组

$$\begin{cases}\alpha+\beta=6,\\ \alpha-\beta=-2,\end{cases}\qquad \begin{cases}\alpha+\beta=6,\\ \alpha-\beta=9,\end{cases}$$

$$\begin{cases}\alpha+\beta=15,\\ \alpha-\beta=-2,\end{cases}\qquad \begin{cases}\alpha+\beta=15,\\ \alpha-\beta=9.\end{cases}$$

解以上方程组，由于两数的和与差有相同的奇偶性，并且 $0\leqslant\alpha\leqslant 9$，$0\leqslant\beta\leqslant 9$，所以只有解 $\alpha=2$，$\beta=4$.

9·22　如果在多位数

$$\overline{3※4※1※0※8※2※40923※0※320※2※56}$$

中星号所在的数字是 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 的某一个排列（这些数中每个都用一次），那么所得的数能被 396 整除. 试证之.

（基辅数学奥林匹克，1963 年）

［证］　注意到

$$396=4\cdot 9\cdot 11.$$

由于已知的多位数的末两位数是 56，它能被 4 整除，所以这个多位数能被 4 整除.

再考虑这个多位数的数码之和，它是该数中已知的数码之和加上星号所表示的数码之和，这个和为

$$(3+4+1+0+8+2+4+0+9+2+3+0+3+2+0+2+5+6)+(0+1+2+3+4+5+6+7+8+9)=99,$$

因此这个多位数能被 9 整除.

再考虑这个多位数的奇数位之和与偶数位之和：

奇数位之和：

$$3+4+1+0+8+2+4+9+3+0+3+0+2+5=44.$$

偶数位之和：

$$0+1+2+3+4+5+6+7+8+9+0+2+2+6=55.$$

由于这个多位数的偶数位之和与奇数位之和的差为 11，所以这个多位数能被 11 整除.

又因为 4,9,11 两两互素，所以这个多位数能被 $4\cdot 9\cdot 11=396$ 整除.

9·23　$\overline{a_1a_2a_3\cdots a_{1999}a_{2000}}$ 是按如下规则写出的一个两千位的自然数（其中诸 $a_i$ 代表阿拉伯数码）：先写出 $a_1$，接着依规则写 $a_2,a_3,\cdots$，当 $a_i$ 已写出，接着写 $a_{i+1}$ 时，要使两位数 $\overline{a_ia_{i+1}}$ 是 17 或 23 的倍数（$i=$

1,2,…,1999). 若按上述规则写出的一个两千位的自然数的各数码 $a_i$ 中,1,9,8,7 这四个数码都出现过. 求证写出的这个两千位自然数必定是合数.

(中国北京市高中一年级数学竞赛,1987 年)

[证] 两位数中,17 的倍数有

$$17,34,51,68,85;$$

23 的倍数有

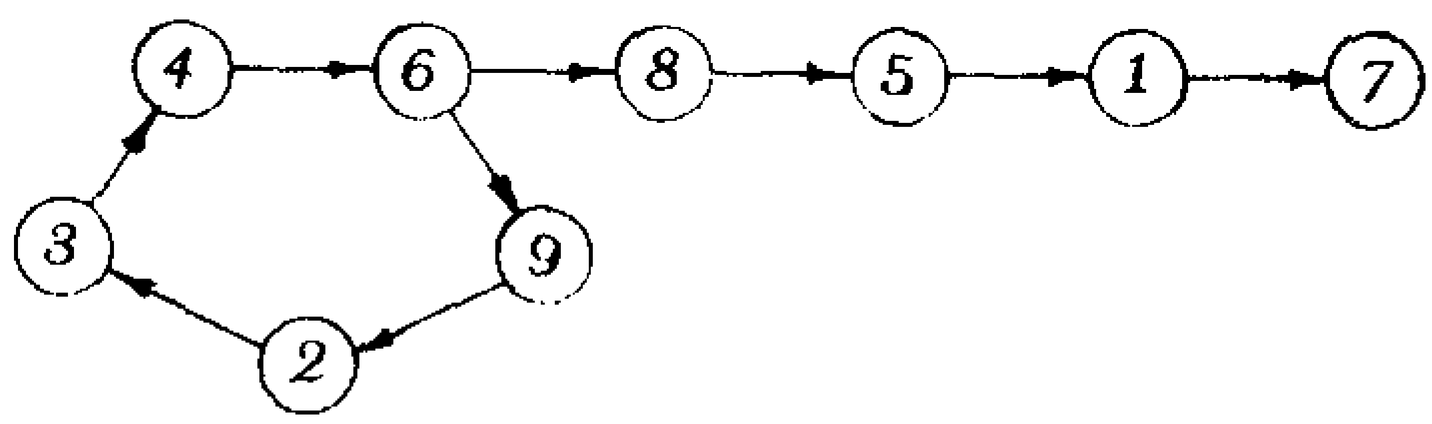
$$23,46,69,92.$$

以上 9 个数中,个位数里 1,2,3,4,5,6,7,8,9 均出现.

十位数中,6 出现两次,7 没出现,其余数字 1,2,3,4,5,8,9 均出现一次.

显然,7 不能作十位数,即 7 不能在两千位数的前 1999 位出现,即 7 是这个二千位数的最后一位.

这样,7 的前一位应是 1(17 是 17 的倍数),再前面应有 5 出现(51 是 17 的倍数),…,可排成下面一个图:




这样,某个数码出现,依图中箭头所指即下面出现的数码.

显然,在两千位数 $\overline{a_1a_2\cdots a_{1999}a_{2000}}$ 中,

$$a_{2000}=7,\quad a_{1999}=1,\quad a_{1998}=5,\quad a_{1997}=8,\quad a_{1996}=6,$$

从 1996 位开始的前 1996 位即从 $a_1\to a_{1996}=6$ 位都是在 $6\to9\to2\to3\to4\to6\to9\to\cdots$ 中循环,且每五个数为一个循环节.

所以这 2000 位数的所有数码之和为

$$\begin{aligned}&(6+9+2+3+4)\cdot399+(6+8+5+1+7)\\=&24\cdot399+27\\=&3\cdot(8\cdot399+9).\end{aligned}$$

因此这个两千位数是 3 的倍数,当然是一个合数.

**9·24** 判断一个正整数能否被 7 整除,可采用"割尾法",如对 2527 割掉末位数码 7 得到 252,再从 252 中减去被割掉的末位数码 7 的

2 倍得到 238,这称为一次“割尾”,对 238 再进行一次“割尾”得到 7,显然 7 是 7 的倍数,从而 2527 可被 7 整除.

试证明一个正整数能被 7 整除的充分必要条件是对该数进行有限次“割尾”所得到的数能被 7 整除.

(中国河北省初中数学联赛,1993 年)

[**证 1**] 设正整数为

$$A = \overline{a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1a_0},$$

即 $A = 10^{n-1}a_{n-1} + 10^{n-2}a_{n-2} + \cdots + 10a_1 + a_0 = \sum_{i=0}^{n-1}a_i \cdot 10^i.$

经过一次“割尾”后,$A$ 变为

$$A' = \sum_{i=1}^{n-1}a_i \cdot 10^{i-1} - 2a_0,$$

显然有

$$10A' = A - 21a_0.$$

由$(7,10) = 1$ 知,若 $7 \mid A$ 必有

$$7 \mid A'.$$

反之,若 $7 \mid A'$,必有

$$7 \mid A.$$

从而本题得证.

[**证 2**] 设正整数为 $A = \overline{a_na_{n-1}\cdots a_2a_1}$.则

$$\begin{aligned}
5A &= 5 \cdot \overline{a_na_{n-1}\cdots a_2a_1} \\
&= 5 \cdot (\overline{a_na_{n-1}\cdots a_2} \cdot 10 + a_1) \\
&= 5 \cdot (9 \cdot \overline{a_na_{n-1}\cdots a_2} + 3a_1) + 5 \cdot (\overline{a_na_{n-1}\cdots a_2} - 2a_1) \\
&\equiv 5 \cdot (2 \cdot \overline{a_na_{n-1}\cdots a_2} - 4a_1) + 5 \cdot (\overline{a_na_{n-1}\cdots a_2} - 2a_1) \\
&\equiv 10 \cdot (\overline{a_na_{n-1}\cdots a_2} - 2a_1) + 5 \cdot (\overline{a_na_{n-1}\cdots a_2} - 2a_1) \\
&\equiv 15 \cdot (\overline{a_na_{n-1}\cdots a_2} - 2a_1) \\
&\equiv \overline{a_na_{n-1}\cdots a_2} - 2a_1 \pmod 7.
\end{aligned}$$

因此,当 $7 \mid A$ 时,有

$$5A \equiv 0 \pmod 7,$$

从而

$$\overline{a_na_{n-1}\cdots a_2} - 2a_1 \equiv 0 \pmod 7.$$

于是 $$7 \mid \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_2} - 2a_1.$$

反之,若 $7 \mid \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_2} - 2a_1$,则 $7 \mid 5A$,再由 $(5,7)=1$ 可得
$$7 \mid A.$$

于是本题得证.



9·25 试证对37的整除性的下述特征:为了判断一个整数能否被37整除,可以将它自右向左分为小节,每一小节三个数码,如果所得的这些三位数之和可被37整除,那么原来的数就可被37整除(这里所说的"三位数"是广义的,因为有些小节可能以0开头,因此在事实上是两位数或一位数,而当原来的数的位数不能被3整除时,最左边的小节也不是三位数).

(第28届莫斯科数学奥林匹克,1965年)

[证] 我们以九位数
$$A = \overline{abcdefghi}$$
为例,对于任意 $n$ 位数的证法完全相同.

本题等价于 $A$ 能被37整除的充要条件是 $\overline{abc} + \overline{def} + \overline{ghi}$ 能被37整除.

事实上,
$$\begin{aligned} A &= \overline{abcdefghi} \\ &= \overline{abc} \cdot 10^6 + \overline{def} \cdot 10^3 + \overline{ghi} \\ &= \overline{abc} \cdot 999999 + \overline{def} \cdot 999 + (\overline{abc} + \overline{def} + \overline{ghi}) \end{aligned}$$

由于999999和999能被37整除,所以,当且仅当
$$37 \mid \overline{abc} + \overline{def} + \overline{ghi}$$
时,
$$37 \mid A.$$

9·26 如果一个整数满足

(1) 它的各位数字都不为0,

(2) 它可以被它的各位数字和整除.

就称该整数可被其数字和整除(例如322可被其数字和整除).

证明有无限多个可被其数字和整除的整数.

(第16届加拿大数学竞赛,1984年)

[证] 事实上,对于任何自然数 $n$,数
$$\underbrace{11\cdots1}_{3^n\text{个}}$$

都是这样的整数,而这样的整数有无限多个.

下面用数学归纳法给予证明.

(1)$n=1$ 时,111 可被其数字和 $1+1+1=3$ 整除,结论成立;

(2)假设 $n=k$ 时,数$\underbrace{11\cdots1}_{3^k个}$可被其数字和 $3^k$ 整除.

那么当 $n=k+1$ 时,由于

$$\underbrace{11\cdots1}_{3^{k+1}个}=1\underbrace{00\cdots0}_{3^k位}1\underbrace{00\cdots1}_{3^k位}\cdot\underbrace{11\cdots1}_{3^k个}$$

它的第一个因数的数字和是 3,因而能被 3 整除,第二个因数由归纳假设能被 $3^k$ 整除,所以这两个因数的乘积可被 $3^{k+1}$ 整除.

从而 $n=k+1$ 时结论成立.

于是对所有的 $n\in N$,结论成立.

9·27　设一个整数被某个数 $M(M\neq1)$ 整除的判别法则不依赖于整数的各位数码的顺序,证明 $M$ 等于 3 或 9.

(基辅数学奥林匹克,1951 年)

[证]　设 $M$ 是 $n$ 位数.

研究一切形如$\overline{10a_1a_2\cdots a_n}$ 的 $n+2$ 位数.

因为数码 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的每一个都可以彼此无关地取自 0 到 9 这 10 个不同的数码,因此,所要研究的数有 $10^n$ 个连续的数.

由于 $10^n>M$,所以这些数中至少可找到一个数被 $M$ 整除.设这个数是$\overline{10b_1b_2\cdots b_n}$,即

$$M\mid\overline{10b_1b_2\cdots b_n}.$$

由题设,被 $M$ 整除的判别法则不依赖于数码的顺序,则

$$M\mid\overline{b_1b_2\cdots b_n01},$$

$$M\mid\overline{b_1b_2\cdots b_n10}.$$

从而 $M$ 也能整除它们的差,即

$$M\mid b_1b_2\cdots b_n10-b_1b_2\cdots b_n01,$$

即
$$M\mid9.$$

于是
$$M=3,9\quad(因为 M\neq1).$$

另一方面,被 3 和 9 整除的判别法则只需检验一个数的各位数码之和而与各位数码的顺序无关.

所以
$$M=3 或 9.$$

9·28 自然数 $A$ 的十进制表示为 $\overline{a_n a_{n-1}\cdots a_0}$,令

$$f(A)=2^n a_0+2^{n-1}a_1+\cdots+2a_{n-1}+a_n.$$

记 $A_1=f(A),\quad A_{i+1}=f(A_i)\quad(i=1,2,\cdots,n)$.

证明(1)必有自然数 $k$,使得 $A_{k+1}=A_k$.

(2)若 $A=19^{86}$,问上述的 $A_k$ 等于多少?并说明理由.

(中国国家集训队选拔试题,1986 年)

[证] (1)$n=0$ 时,对任意 $k$,有

$$A_k=A.$$

当 $n=1$ 时,显然有 $\quad A\geqslant f(A)$.

当 $n\geqslant 2$ 时,

$$\begin{aligned}f(A)&=2^n a_0+2^{n-1}a_1+\cdots+2a_{n-1}+a_0\\&\leqslant(2^n+2^{n-1}+\cdots+2+1)\cdot 9\\&=(2^{n+1}-1)\cdot 9.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A&\geqslant 10^n a_n\geqslant 10^n=10\cdot 10^{n-1}>9\cdot 10^{n-1}\\&>9\cdot 2^3\cdot 10^{n-2}\geqslant 9\cdot 2^3\cdot 2^{n-2}=9\cdot 2^{n+1}\\&>9(2^{n+1}-1)\geqslant f(A).\end{aligned}$$

从而 $n\geqslant 2$ 时有

$$A>f(A).$$

这就意味着对 $A$ 每进行一次操作,就变小一次,从而有

$$A_1>A_2>A_3>\cdots$$

因此必存在某个 $k\in N$,使得

$$A_k<100.$$

若 $A_k$ 为两位数,则可设 $A_k=\overline{ab}=10a+b$.

则
$$A_{k+1}=2b+a.$$
$$A_k-A_{k+1}=9a-b.$$

显然,当 $a=1,\quad b=9$ 时, $A_k=19$,而

$$A_k-A_{k+1}=0,$$
$$A_k=A_{k+1}.$$

此时问题已得证.

若 $a\neq 1$ 或 $b\neq 9$,则 $9a-b>0$,即

$$A_k>A_{k+1}.$$

此时对 $A_k$ 再进行一次操作. 得到 $A_{k+1}$. 若 $A_{k+1}=19$, 此时有 $A_{k+2}=A_{k+1}$, 否则必可再经过某次操作得到一位数, 记为 $A_k=a$. 于是有 $A_{k+1}=A_k$.

由以上, 必存在自然数 $k$, 使得 $A_{k+1}=A_k$.

(2) 首先证明, 若 $10x+y$($x$ 为正整数, $y$ 为非负整数) 能被 19 整除, 则 $x+2y$ 能被 19 整除.

这是因为

$$10x+y=10(x+2y)-19y.$$

而 $$(10,19)=1,$$

若 $19\mid 10x+y$, 则

$$19\mid x+2y,$$

反之, 若 $19\mid x+2y$, 则

$$19\mid 10x+y.$$

因此, 若 $19\mid A=\overline{a_na_{n-1}\cdots a_0}$, 则

$$19\mid \overline{a_na_{n-1}\cdots a_1}+2a_0,$$

$$19\mid \overline{a_na_{n-1}\cdots a_2}+2(a_1+2a_0).$$

如此下去

$$19\mid a_n+2a_{n-1}+\cdots+2^{n-1}a_1+2^na_0=f(A).$$

由于 $A=19^{86}$, 则

$$19\mid A,$$

于是 $$19\mid A_1=f(A),$$

进而 $A_1, A_2, \cdots$ 都能被 19 整除.

又由(1), $A_1>A_2>\cdots>A_k$, 则

$$A_k=19.$$

**9·29** 证明如果正整数 $k$ 能被 $\underbrace{99\cdots99}_{9个9}$ 整除, 那么在 $k$ 的十进制记法中必有 8 个以上的数码不为 0.

(第 33 届莫斯科数学奥林匹克, 1970 年)

[证] 由于

$$\underbrace{99\cdots9}_{9个9}=10^9-1,$$

则可把 $k$ 表示为

$$k = a_t \cdot 10^{9t} + a_{t-1} \cdot 10^{9(t-1)} + \cdots + a_1 \cdot 10^9 + a_0,$$

其中 $a_i(i = 0,1,\cdots,t-1)$ 均为 9 位数，而 $a_t$ 为不大于 9 位数，于是



$$k = a_t(10^{9t} - 1) + a_{t-1}(10^{9(t-1)} - 1) + \cdots + a_1(10^9 - 1)$$
$$+ (a_t + a_{t-1} + \cdots + a_1 + a_0).$$

由于 $\underbrace{99\cdots9}_{k个9} \mid 10^{9i} - 1, \quad i = 1,2,\cdots,t,$

并且 $\underbrace{99\cdots9}_{k个9} \mid k,$

于是 $9 \mid a_t + a_{t-1} + \cdots + a_1 + a_0.$

因此，若把数 $k$ 按从右向左每 9 位划分一个小节，则 $k$ 能被 $\underbrace{99\cdots9}_{9个9}$ 整除的充要条件是这些小节的和能被 $\underbrace{99\cdots9}_{9个9}$ 整除.

如果一个数 $k$ 的不为 0 的数码不多于 8 个，那么这些小节的和不可能被 $\underbrace{99\cdots9}_{9个9}$ 整除，因此，数 $k$ 必有 8 个以上的数码不为 0.

# 第十章　十进制记数法

10·1　将下面除法算式中的“※”号换成适当的数码：

```
           ※ 8※
      ┌──────────
  ※※ )※※※※※
      -)※※※
      ──────────
         ※※※
      -)  ※※
      ──────────
           ※※※
         -)※※※
         ────────
              0
```

（第 16 届全俄数学奥林匹克，1990 年）

[**解**]　由于除数乘以 8 得两位数，可知除数不大于 12，

又由除数乘以商的首位数与末位数均得三位数，可知除数不小于 12.

因此，除数是 12.

而由 12 乘以商的首位数与末位数均得三位数可知，其首位数与末位数均为 9.

因此商为 989.

被除数为　　　　　$12 \cdot 989 = 11868.$

具体算式是

$$
\begin{array}{r}
9\,8\,9 \\
12\,\overline{)\,1\,1\,8\,6\,8} \\
1\,0\,8\phantom{\,6\,8} \\
\hline
1\,0\,6\phantom{\,8} \\
9\,6\phantom{\,8} \\
\hline
1\,0\,8 \\
1\,0\,8 \\
\hline
0
\end{array}
$$

10·2　下面是一个八位数除以一个三位数的算式，试求商，并说明理由.

$$
\begin{array}{r}
7\text{※※※※} \\
\text{※※※}\,\overline{)\,\text{※※※※※※※}8} \\
\text{※※※}\phantom{\text{※※※※}8} \\
\hline
\text{※※※※}\phantom{\text{※※}8} \\
\text{※※※}\phantom{\text{※※}8} \\
\hline
\text{※※※※} \\
\text{※※※※} \\
\hline
0
\end{array}
$$

（中国上海市数学竞赛，1958年）

［解］　给原式的 ※ 号标以字母

$$
\begin{array}{r}
7\,y_2\,y_3\,y_4\,y_5 \\
x_1\,x_2\,x_3\,\overline{)\,a_1\,a_2\,a_3\,a_4\,a_5\,a_6\,a_7\,8} \\
b_1\,b_2\,b_3\phantom{\,a_4\,a_5\,a_6\,a_7\,8} \\
\hline
c_1\,c_2\,a_5\,a_6\phantom{\,a_7\,8} \\
d_1\,d_2\,d_3\phantom{\,a_7\,8} \\
\hline
e_1\,e_2\,a_7\,8 \\
e_1\,e_2\,a_7\,8 \\
\hline
0
\end{array}
$$

上式中所有字母都表示 0,1,2,…,9 这十个数码中的一个，且下标为 1 的字母都不为 0.

(1) 因为在第一次试商 7 后,同时移下二位数码 $a_5a_6$,说明$\overline{c_1c_2a_5} < \overline{x_1x_2x_3}$,所以 $y_2 = 0$,同理 $y_4 = 0$.

(2) 四位数$\overline{a_1a_2a_3a_4}$ 与三位数$\overline{b_1b_2b_3}$ 之差为二位数$\overline{c_1c_2}$,只有在 $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $b_1 = 9$,且$\overline{a_3a_4} < \overline{b_2b_3}$时才行,否则其差必为三位数.

同理,$c_1 = 1$, $c_2 = 0$, $d_1 = 9$, $\overline{a_5a_6} < \overline{d_2d_3}$.

(3) 因为 $c_2 = 0$,所以 $a_4 = b_3$,又因为 $c_1 = 1$,而$\overline{a_3a_4} < \overline{b_2b_3}$,所以有 $a_3 < b_2$.这样有$\overline{1a_3} - b_2 = 1$,所以 $a_3 = 0$, $b_2 = 9$.

(4) 因为 $7 \cdot \overline{x_1x_2x_3} = \overline{b_1b_2b_3} = \overline{99b_3}$,所以 $x_1 = 1$, $x_2 = 4$,否则若 $x_1 \geqslant 2$ 或者 $x_1 = 1$, $x_2 \geqslant 5$ 时, $7 \cdot \overline{x_1x_2x_3}$ 为四位数.又 $x_1 = 1$, $x_2 \leqslant 3$ 时,$7 \cdot \overline{x_1x_2x_3} < 980$.

由 $7 \cdot \overline{14x_3} = \overline{99b_3}$,即 $7 \cdot (140 + x_3) = 990 + b_3$,所以 $7 \cdot x_3 = 10 + b_3$,于是 $x_3 = 2$, $b_3 = 4$,从而 $a_4 = b_3 = 4$.

(5) 因为 $7 \cdot 142 = 994$,而 $y_5 \cdot 142$ 是四位数,所以 $y_5 \geqslant 8$,即 $y_5 = 8$ 或 9,而因为 $y_5 \cdot 142$ 的末位数必须是 8,所以 $y_5 = 9$.

(6) 因为$\overline{e_1e_2a_7} < \overline{x_1x_2x_3}$,所以 $e_1 = 1$.

由$\overline{1a_5} - d_2 = e_1 = 1$,不论 $a_5$ 为何数,$d_2$ 必须是 9.

由 $y_3 \cdot \overline{x_1x_2x_3} = \overline{d_1d_2d_3}$,即 $y_3 \cdot 142 = \overline{99d_3}$,所以 $y_3 = 7$, $d_3 = 4$.

(7) 由$\overline{e_1e_2a_78} = 9 \cdot 142 = 1278$,所以 $e_2 = 2$, $a_7 = 7$,从而 $\overline{c_1c_2a_5a_6} = \overline{d_1d_2d_3} + \overline{e_1e_2} = 994 + 12 = 1006$,所以 $a_5 = 0$, $a_6 = 6$.

所以商为 70709.

原式为

$$
\begin{array}{r}
70709 \\
142\overline{)10040678} \\
994\phantom{0000} \\
\hline
1006\phantom{00} \\
994\phantom{00} \\
\hline
1278 \\
1278 \\
\hline
0
\end{array}
$$

10·3　试求满足下列条件的六位整数$\overline{abcdef}$，　$\overline{abcdef}\cdot 3=\overline{efabcd}$.这里$a,b,c,d,e,f$表示不同的数码,且$a,e\neq 0$.

（中国湖北省武汉市数学夏令营,1987年）

［解］　设$\overline{abcd}=x$，　$\overline{ef}=y$.由题意

$$(100x+y)\cdot 3=10000y+x,$$

即

$$23x=769y.$$

因为

$$(23,769)=1,$$

所以可设　$x=769k$，　$y=23k$.

由于$y$是二位整数,所以$k$只能取1,2,3,4.

$k=1$时，　$x=769$不是四位数.

$k=2$时，　$y=46$，　$x=1538$,即153846;

$k=3$时，　$y=69$，　$x=2307$,即230769;

$k=4$时，　$y=92$，　$x=3076$,即307692.

所求六位数为153846,230769和307692.

10·4　求适合等式$\overline{x5}\cdot\overline{3yz}=7850$中的数码$x,y,z$.

（第13届全俄数学奥林匹克,1987年）

［解］　由于　$5\cdot 400=2000<7850$,则$x\neq 0$.

因为$3\nmid 7850$,则$x\neq 1$，　$x\neq 4$.

又因为$7\nmid 7850$,则$x\neq 3$.

当$x\geqslant 5$时,

$$\overline{x5}\cdot\overline{3yz}\geqslant 55\cdot 300>10000>7850.$$

所以

$$x\neq 5,6,7,8,9.$$

于是只有$x=2$,这时有等式

$$25\cdot 314=7850.$$

即

$$x=2,\quad y=1,\quad z=4.$$

10·5　若数码$M$、$X$和$Y$互不相同,且等式$\dfrac{\overline{M\underbrace{X\cdots X}_{n个}Y}}{\overline{MY}}=\dfrac{\overline{X\underbrace{M\cdots M}_{n个}Y}}{\overline{XY}}$对任意的$n\geqslant 1$(这里的$n$是$\overline{MX\cdots XY}$中$X$的个数,$\overline{XM\cdots MY}$中$M$的个数)都成立.求$M$、$X$、$Y$.

（基辅数学奥林匹克,1977年）

[解] 设 $A=10^{n+1}$, $B=\underbrace{11\cdots1}_{n个1}0$，则给定的等式可改写为

$$(MA+XB+Y)(10X+Y)=(XA+MB+Y)(10M+Y)$$

经整理得

$$AY(M-X)=B(10X+10M+Y)(M-X)+10Y(M-X).$$

因为 $M\neq X$，则可将上式两边约去 $M-X$，得

$$AY=B(10X+10M+Y)+10Y,$$

$$Y(A-B-10)=10B(X+M).$$

由于 $A=9B+10$，则上式又可化为

$$8BY=10B(X+M),$$

即

$$4Y=5(X+M).$$

由此可知， $Y$ 能被 5 整除，又显然 $Y\neq 0$.

于是 $\qquad Y=5.$

从而 $\qquad X+M=4.$

又 $\qquad X\neq M,$

所以 $\qquad X=3,\quad M=1,$

或 $\qquad X=1,\quad M=3,$

或 $\qquad X=0,\quad M=4,$

或 $\qquad X=4,\quad M=0.$

因此给定的等式为

$$\frac{311\cdots15}{35}=\frac{133\cdots35}{15},$$

或

$$\frac{400\cdots05}{45}=\frac{44\cdots45}{5}.$$

10·6 如果相同的字母代表相同的数字，试破译数字谜：

$$\overline{AA}\cdot\overline{AB}=\overline{CDEF},\quad \overline{CC}\cdot\overline{CEF}=\overline{CDEF}.$$

（基辅数学奥林匹克，1980 年）

[解] 由于 $\overline{CEF}\geqslant C\cdot10^2,\quad \overline{CDEF}<(C+1)\cdot10^3.$

所以有

$$(C+1)\cdot10^3>\overline{CC}\cdot\overline{CEF}\geqslant\overline{CC}\cdot C\cdot10^2=C^2\cdot11\cdot10^2.$$

$$(C+1)\cdot10>11C^2.$$

满足此不等式的解为

$$\frac{5-3\sqrt{15}}{11}<C<\frac{5+3\sqrt{15}}{11}$$

由 $C$ 是 $1,2,\cdots,9$ 中的一个数码，所以 $C$ 只能得 1. 此时第二个等式为

$$11\cdot\overline{1EF}=\overline{1DEF}.$$

即 $$11\cdot(100+10E+F)=1000+100D+10E+F$$

经整理得 $$10+10E+F=10D.$$

于是可得 $F$ 是 10 的倍数，因而 $F=0$.

则第一个等式为

$$\overline{AA}\cdot\overline{AB}=\overline{1DE0}.$$

因而 $A$ 和 $B$ 中一个是 5 而另一个是偶数，或 $A=0$ 或 $B=0$.

若 $A=5$，则

$$55\cdot\overline{5B}\geqslant 55\cdot 50=2750>\overline{1DE0}.$$

所以 $$A\neq 5.$$

若 $B=5$，$A$ 是偶数，这时有

$$11\cdot A\cdot\overline{A5}=\overline{AA}\cdot\overline{A5}=\overline{1DE0}=11\cdot\overline{1EF},$$

即 $$A\cdot\overline{A5}=\overline{1EF}=\overline{1E0}.$$

由于在 $A\leqslant 2$ 时，$A\cdot\overline{A5}<100$,

在 $A\geqslant 5$ 时，$\overline{A\cdot A5}>200$.

于是 $$2<A<5.$$

则偶数 $$A=4.$$

因而第一个等式为

$$44\cdot 45=\overline{1DE0}=1980.$$

从而 $$D=9,\quad E=8.$$

所以这个数谜的一组解为

$$44\cdot 45=1980,$$
$$11\cdot 180=1980.$$

显然 $A\neq 0$，若 $B=0$，则

$$11\cdot A\cdot\overline{A0}=\overline{1DE0}=11\cdot\overline{1E0},$$

即 $$A^2=\overline{1E},$$

故 $A=4,\quad E=6,\quad D=7.$

此时，这个数谜的另一组解是

$$44\cdot 40=1760,$$
$$11\cdot 160=1760.$$

综上,这个数谜有两组解.

10·7　设 $x$ 与 $y$ 是两个有两位数码的自然数,且 $x < y$. 乘积 $xy$ 是一个有四位数码的自然数. 首位数是2,如果把这个首位数2去掉,剩下的数正好是 $x+y$,例如 $x=30, y=70$,除此之外还有一组数具有上述性质,试求出这两个数.

(荷兰数学竞赛,1983年)

[解]　由题设有

$$xy = 2000 + x + y,$$

即

$$(x-1)(y-1) = 2001 = 3 \cdot 23 \cdot 29.$$

由于 $x$ 和 $y$ 都是两位数,则有

$$(x-1)(y-1) = 29 \cdot 69,$$

$$(x-1)(y-1) = 23 \cdot 87,$$

即

$$\begin{cases} x-1=29, \\ y-1=69, \end{cases} \quad \begin{cases} x-1=23, \\ y-1=87. \end{cases}$$

解得

$$x=30, \quad y=70, \text{或 } x=24, \quad y=88.$$

10·8　在一种游戏中,"魔术师"请一个人随意想一个三位数 $\overline{abc}$(其中 $a,b,c$ 依次是这个数的各个数位上的10进制数字),并请此人选出5个数 $\overline{acb}$, $\overline{bac}$, $\overline{bca}$, $\overline{cab}$ 和 $\overline{cba}$,求出这5个数的和 $N$,把和 $N$ 告诉"魔术师",于是,"魔术师"就可以说出这个人所想的数($abc$). 现在设 $N=3194$. 请你做"魔术师",求出数 $\overline{abc}$ 来.

(第4届美国数学邀请赛,1986年)

[解]　由于

$$\begin{aligned} & \overline{abc} + N \\ = & \overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{cba} \\ = & 222(a+b+c). \end{aligned}$$

所以应该寻找一个222的倍数 $222k$,使它大于 $N$(因为 $\overline{abc} \neq 0$),而小于 $N+1000$(因为 $\overline{abc}$ 是三位数),并且 $222k-N$ 的各位数字之和是 $k$,这样一来,$222k-N$ 就是所求的解($abc$).

即

$$N < 222k < N + 1000.$$

因为 $N=3194$,而

$$14 \cdot 222 < 3194 < 3194 + 1000 < 19 \cdot 222.$$

于是 $k$ 可能的取值为15,16,17,18.

下面逐一验算. 由于

$222 \cdot 15 - 3194 = 136$ 的各位数字之和为 $10 \neq 15$，

$222 \cdot 16 - 3194 = 358$ 的各位数字之和为 $16 = 16$，

$222 \cdot 17 - 3194 = 580$ 的各位数字之和为 $13 \neq 17$，

$222 \cdot 18 - 3194 = 802$ 的各位数字之和为 $10 \neq 18$.

于是 $$k = 16.$$

所求的 $(abc)$ 为

$$222 \cdot 16 - 3194 = 358.$$

10·9　一个两位数除以它的反序数所得的商恰等于余数，求这个两位数.

（中国北京市初中二年级数学竞赛，1991 年）

[解]　设这个两位数为 $a = 10x + y$，则其反序数为 $10y + x$，其中 $1 \leqslant x \leqslant 9,\quad 0 \leqslant y \leqslant 9,\quad x, y \in Z$.

由题意得

$$10x + y = (10y + x)q + q, \quad q \in N.$$

即
$$(10 - q)x - (10q - 1)y = q. \qquad ①$$

(1) 当 $q = 1$ 时，① 式化为 $9x - 9y = 1$.

不可能成立；

(2) 当 $q = 2$ 时，① 式化为 $8x - 19y = 2$.

于是 $y$ 是偶数.

当 $y = 2$ 时，$x = 5$，此时 $a = 52$.

当 $y = 4, 8$ 时，等式右边不能被 4 整除，而左边能被 4 整除，不可能有解.

当 $y = 6$ 时，易验证，不可能有解.

从而，当 $q = 2$ 时，　$a = 52$.

(3) 当 $q = 3$ 时，① 式化为

$$7x - 29y = 3.$$

当 $y \leqslant 2$ 时，$x$ 不是整数.

当 $y \geqslant 3$ 时，　$7x = 29y + 3 \geqslant 90, \quad x > 10.$

所以，$q = 3$ 时，无解.

(4) 当 $q = 4$ 时，① 式化为

$$6x - 39y = 4.$$

此式左边能被 3 整除，而右边不能被 3 整除，所以不可能有整数解.

(5) 当 $q \geqslant 5$ 时,有

$$\begin{aligned}5x &\geqslant (10-q)x \\ &=(10q-1)y+q \\ &\geqslant 49y+q.\end{aligned}$$

若 $y \geqslant 1$,则 $5x \geqslant 49y+q \geqslant 54$,从而 $x > 10$,这不可能.

若 $y=0$,则由 ① 得

$$q=(10-q)x \geqslant 10-q.$$

得 $x=1,\quad q=5$ 或 $x=4,\quad q=8$,此时也不可能.

综合以上,本题只有一解 $a=52$.

10·10　已知四位数满足下列条件:

(1) 若同时将其个位数字与百位数字,十位数字与千位数字的位置互换,则其数值增加 5940;

(2) 除以 9 余 8.

求这些四位数中的最小奇数.

(中国山东省数学竞赛,1979 年)

[解]　因为位置互换后增加的数为 5940,其个位是 0,所以这个四位数的个位数与百位数相同.

设这个四位数为　$\overline{abcb}=1000a+100b+10c+b$.

由题意有

$$(1000c+100b+10a+b)-(1000a+100b+10c+b)=5940.$$

即
$$990(c-a)=5940,$$
$$c-a=6.$$

因为要求最小奇数,则 $a$ 尽量取最小正整数,我们取 $a=1$,则 $c=7$.

此时 $a+c=8$,又该四位数被 9 除余 8,所以 $a+b+c+b$ 被 9 除余 8,从而 $2b$ 能被 9 整除.

于是
$$b=9 \text{ 或 } b=0.$$

又因为所求的数是奇数,所以 $b=9$.

即所求的四位数为 1979.

10·11　若 $a,b,c,d,e,f,p,q$ 是阿拉伯数字,且 $b>c>d>a$. 四位数 $\overline{cdab}$ 与 $\overline{abcd}$ 之差是一个形如 $\overline{pqef}$ 的四位数,若 $\overline{ef}$ 是一个完全平

方数，$\overline{pq}$ 不能被 5 整除. 试求四位数 $\overline{abcd}$，并简述理由.

（中国北京市初中三年级数学竞赛，1983 年）



［解］

$$\begin{aligned}&\overline{pqef}\\ =&\ \overline{cdab}-\overline{abcd}\\ =&\ (\overline{cd}\cdot 10^2+\overline{ab})-(\overline{ab}\cdot 10^2+\overline{cd})\\ =&\ 99(\overline{cd}-\overline{ab}),\end{aligned}$$

即

$$\overline{pq}\cdot 100+\overline{ef}=99(\overline{cd}-\overline{ab}).$$

$$99\cdot\overline{pq}+(\overline{pq}+\overline{ef})=99(\overline{cd}-\overline{ab}).$$

于是

$$99\mid(\overline{pq}+\overline{ef}).$$

但由 $\overline{ef}$ 是一个完全平方数知

$$\overline{ef}\leqslant 81,$$

则

$$0<\overline{pq}+\overline{ef}<181.$$

于是

$$\overline{pq}+\overline{ef}=99.$$

由于 $\overline{pq}$ 不是 5 的倍数，则 $q\neq 0$ 和 5，因此 $f\neq 9$ 和 4.

由

$$\overline{cdab}-\overline{abcd}=\overline{pqef},\quad b>c>d.$$

所以个位数

$$f=b-d\geqslant 2.$$

因此完全平方数 $\overline{ef}$ 的个位数只能取 5 或取 6.

注意减法的竖式

$$\begin{array}{rcccc} & c & d & a & b\\ -) & a & b & c & d\\ \hline & p & q & e & f\end{array}$$

中，因为 $b>c>d>a$，可知 $c\leqslant 8$，$a\geqslant 1$. 所以 $c-a\leqslant 7$.

但在百位上 $d<b$，作减法时要向千位借 1，所以

$$1\leqslant p=(c-1)-a\leqslant 7-1=6.$$

但由 $\overline{pq}+\overline{ef}=99$ 可知

$$e\geqslant 9-p\geqslant 9-6=3.$$

于是可知两位的平方数 $\overline{ef}=36$.

即

$$\overline{pqef}=6336.$$

这时，在 $\overline{cdab}-\overline{abcd}=6336$ 的竖式运算中，显然有

$$b-d=6,\quad c-a=7.$$

再由 $b>c>d>a$，只能有

$$c = 8, \quad a = 1, \quad b = 9, \quad d = 3.$$

所以所求的数为

$$\overline{abcd} = 1983.$$

10·12　一个自然数减去 45 后是一个完全平方数,这个自然数加上 44,仍是一个完全平方数.试求这个自然数.

（中国北京市初中三年级数学竞赛,1981 年）

[解]　设这个自然数为 $x$,依题意可得

$$\begin{cases} x - 45 = m^2, & ① \\ x + 44 = n^2. & ② \end{cases}$$

其中 $m$,$n$ 都是自然数.

由 ① 和 ② 消去 $x$ 得

$$n^2 - m^2 = 89,$$

即

$$(n - m)(n + m) = 89. \quad ③$$

由 ①,② 可知,$n > m$,又 89 是素数,因而由 ③ 可得

$$\begin{cases} n - m = 1, \\ n + m = 89. \end{cases}$$

解得

$$n = 45.$$

于是

$$x = 45^2 - 44 = 1981.$$

所求的自然数为 1981.

10·13　有形式为$\overline{a_1a_2a_3b_1b_2b_3a_1a_2a_3}$的九位数,等于 5 个素数积的平方,且$\overline{b_1b_2b_3} = 2\,\overline{a_1a_2a_3}$　$(a_1 \neq 0)$,求此九位数.

（中国陕西省数学竞赛,1979 年）

[解]　因为$\overline{b_1b_2b_3} = 2\,\overline{a_1a_2a_3}$,即

$$b_1 \cdot 10^2 + b_2 \cdot 10 + b_3 = 2a_1 \cdot 10^2 + 2a_2 \cdot 10 + 2a_3,$$

设 $n = \overline{a_1a_2a_3b_1b_2b_3a_1a_2a_3}$.则

$$\begin{aligned} n &= a_1 \cdot 10^8 + a_2 \cdot 10^7 + a_3 \cdot 10^6 + 2a_1 \cdot 10^5 + 2a_2 \cdot 10^4 \\ &\quad + 2a_3 \cdot 10^3 + a_1 \cdot 10^2 + a_2 \cdot 10 + a_3 \\ &= a_1 \cdot 10^2(10^6 + 2 \cdot 10^3 + 1) + a_2 \cdot 10(10^6 + 2 \cdot 10^3 + 1) \\ &\quad + a_3(10^6 + 2 \cdot 10^3 + 1) \\ &= (a_1 \cdot 10^2 + a_2 \cdot 10 + a_3)(10^6 + 2 \cdot 10^3 + 1) \end{aligned}$$

$= \overline{a_1a_2a_3} \cdot 1002001.$

又因为 $$1002001 = (1001)^2 = (7 \cdot 11 \cdot 13)^2$$

所以 $$n = \overline{a_1a_2a_3} \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2.$$



由已知条件知,$\overline{a_1a_2a_3}$一定是两个素数的积的平方.

因为 $$a_1 \neq 0, \quad \overline{b_1b_2b_3} < 1000,$$

所以 $$100 \leqslant \overline{a_1a_2a_3} < 500,$$

即 $$10 \leqslant \sqrt{\overline{a_1a_2a_3}} < 23.$$

在{10,11,12,13,…,21,22,23}中,仅有

$$10 = 2 \cdot 5, \quad 14 = 2 \cdot 7, \quad 15 = 3 \cdot 5,$$
$$21 = 3 \cdot 7, \quad 22 = 2 \cdot 11.$$

可以写成两个素数的积的形式.

显然,不能取 14,21,22,否则在 $n$ 中出现 $7^4$,$11^4$,不合题意.

所以 $$\sqrt{\overline{a_1a_2a_3}} = 10 \text{ 或 } 15.$$

$$\overline{a_1a_2a_3} = 100 \quad \text{或} \quad \overline{a_1a_2a_3} = 225.$$
$$\overline{b_1b_2b_3} = 200 \quad \text{或} \quad \overline{b_1b_2b_3} = 450.$$

于是所求九位数为 100200100 或 225450225.

10·14　求所有这样的四位数,在这样的四位数的左边写上400后是整数的平方.

(基辅数学奥林匹克,1954 年)

[解]　设$\overline{abcd}$是所求的四位数.

由于数$\overline{400abcd}$是七位数,并且是完全平方数,则可以表示为如下形式:

$$\overline{400abcd} = \left(\overline{20lm}\right)^2.$$

将此方程改写为

$$400 \cdot 10^4 + \overline{abcd} = (20 \cdot 10^2 + 10l + m)^2,$$
$$400 \cdot 10^4 + \overline{abcd} = 400 \cdot 10^4 + 4000(10l + m) + (10l + m)^2,$$

即 $$\overline{abcd} = 4000(10l + m) + (10l + m)^2. \qquad ①$$

由于 $l, m \in \{0,1,2,\cdots,9\}$.

若 $l \geqslant 1$,则

$$4000(10l + m) \geqslant 4 \cdot 10^4$$

此时 ① 式不可能成立.

于是 $$l = 0.$$

同理 $m \geqslant 3$,则有 $4000m \geqslant 12000$

也超过四位数,于是 $0 < m \leqslant 2$.

当 $l = 0,\quad m = 1$ 时,有

$$2001^2 = 4004001.$$

当 $l = 0,\quad m = 2$ 时,有

$$2002^2 = 4008004.$$

因而所求的四位数为 4001 和 8004.

10·15　求所有满足下述条件的两个自然数:它们的乘积是一个三位数,而和是一个两位数字相同的二位数.

(基辅数学奥林匹克,1977 年)

**[解]**　设满足条件的两个自然数为 $m,n$,依题设有

$$\begin{cases} 100 \leqslant m \cdot n \leqslant 999 & ① \\ m + n = 11k, \quad 2 \leqslant k \leqslant 9 & ② \end{cases}$$

② 代入 ① 可得

$$\frac{100}{n} \leqslant 11k - n \leqslant \frac{999}{n},$$

$$\frac{n}{11} + \frac{100}{11n} \leqslant k \leqslant \frac{n}{11} + \frac{999}{11n}.$$

于是在 $2 \leqslant n \leqslant 97$,以及 $\left[\frac{n}{11} + \frac{100}{11n}\right] + 1 \leqslant k \leqslant \left[\frac{n}{11} + \frac{999}{11n}\right]$ 且 $k \leqslant 9$ 时,数对 $(m,n) = (11k - n, n)$ 都满足题目的条件.

10·16　有一个五位正奇数 $x$,将 $x$ 中的所有 2 都换成 5,所有 5 都换成 2,其他数字不变,得到一个新的五位数,记作 $y$.若 $x$ 和 $y$ 满足等式 $y = 2(x + 1)$,那么 $x$ 等于多少?

(中国初中数学联赛,1987 年)

**[解 1]**　因为 $y > 2x$,所以 $y$ 的万位数大于 $x$ 的万位数,而同一数位上的不同数码只能是 2 和 5.

所以由 $x$ 和 $y$ 的万位数不同可知,$x$ 的万位数是 2,$y$ 的万位数是 5.

设 $x = \overline{2abcd} = 2 \cdot 10^4 + 10^3 \cdot a + 10^2 \cdot b + 10 \cdot c + d$,

$y = \overline{5a'b'c'd'} = 5 \cdot 10^4 + 10^3 \cdot a' + 10^2 \cdot b' + 10 \cdot c' + d'$.

这里 $a$ 和 $a'$,$b$ 和 $b'$,$c$ 和 $c'$,$d$ 和 $d'$ 分别是 2 与 5 或 5 与 2 或其他

相同的数码.

代入 $y=2(x+1)$,并整理得

$$9998=10^3(2a-a')+10^2(2b-b')+10(2c-c')+(2d-d')$$

当 $a=a'$ 时, $2a-a'=a$;

当 $a\neq a'$ 时,$2a-a'=2\cdot 5-2=8$ 或 $2\cdot 2-5=-1$.

因此,千位数只能是 $a=a'=9$.

同理可推出 $b=b'=9,\quad c=c'=9,\quad d=5,\quad d'=2$.

即 $x=29995,\quad y=59992$.

经检验 $2(x+1)=2(29995+1)=59992$.

所以 $x=29995$.

**[解 2]** 首先 $x$ 的万位数显然是 2,从而 $y$ 的万位数必然是 5.

其次,$x$ 的千位数必大于 5,但百位数乘 2 后至多进 1 到千位,这样千位数只能是 9,依此类推得到 $x$ 的前四位数依次是 2,9,9,9.

$x$ 的个位数只能是 1,3,5,7,9. 经检验,$x$ 的个位只能是 5,所以 $x$ 是 29995.

10·17 一张公共汽车票的号码是六位数,如果它的号码的前三位数之和等于末三位数之和. 就称这张车票是“幸运车票”. 试问:应当从车票预售处买出多少张连号的车票,才能确保其中至少有一张“幸运车票”?

(列宁格勒数学奥林匹克,1987 年)

**[解]** 买出 1001 张连号车票就能确保其中至少有一张“幸运车票”.

事实上,如果所买的连号车票不超过 1000 张,那么当所买车票的最小号码是 000001 时,其中不可能有“幸运车票”.

如果买了 1001 张连号车票,并设其中最小号码为 $\overline{xyzabc}$, $x,y,z,a,b,c\in\{0,1,\cdots,9\}$. 那么当 $z\neq 9$ 时,最大号码为 $\overline{xy(z+1)abc}$. 这样,当 $\overline{abc}\leqslant\overline{xyz}$ 时,$\overline{xyzxyz}$ 就在所买的票中,当 $\overline{abc}>\overline{xyz}$ 时,$\overline{xy(z+1)xy(z+1)}$ 就在所买的票中.

如果 $z=9,\quad y\neq 9$,那么当最小号码为 $\overline{xyzabc}$ 时,最大号码为 $\overline{x(y+1)0abc}$,此时可作同样的讨论.

如果 $\overline{xyz}=999$,那么 $\overline{999999}$ 一定在所买的票中.

由以上,对 1001 张连号票一定有一张“幸运车票”.

10·18　十进制的自然数 $a$ 由 $n$ 个相同的数码 $x$ 组成，而数 $b$ 由 $n$ 个相同的数码 $y$ 组成，数 $c$ 由 $2n$ 个相同的数码 $z$ 组成. 对于任何 $n \geqslant 2$，求出使得 $a^2 + b = c$ 成立的数字 $x, y, z$.

（第 20 届全苏数学奥林匹克，1986 年）

［解］　由题设得

$$(\overline{\underbrace{xx\cdots x}_{n个}})^2 + \overline{\underbrace{yy\cdots y}_{n个}} = \overline{\underbrace{zz\cdots z}_{2n个}}.$$

即
$$(x \cdot \underbrace{11\cdots1}_{n个})^2 + y \cdot \underbrace{11\cdots1}_{n个} = z \cdot \underbrace{11\cdots1}_{2n个}.$$

所以有

$$x^2(\underbrace{11\cdots1}_{n个})^2 + y(\underbrace{11\cdots1}_{n个}) = z \cdot (1\underbrace{00\cdots0}_{n-1个}1)(\underbrace{11\cdots1}_{n个}),$$

$$x^2 \cdot \underbrace{11\cdots1}_{n个} + y = z \cdot 1\underbrace{00\cdots0}_{n-1个}1 \qquad ①$$

令 $x^2 = \overline{uv} = 10u + v, \quad u, v \in \{0,1,2,\cdots,9\}$.

这时 ① 式化为

$$u \cdot \underbrace{11\cdots1}_{n个}0 + v \cdot \underbrace{11\cdots1}_{n个} + y = z \cdot 1\underbrace{00\cdots0}_{n-1个}1 \qquad ②$$

比较 ② 式中的十位数.

② 式的右边的十位数是 0，左边的十位数是 $u + v + 1 - 10$（当 $v + y \geqslant 10$ 时）或 $u + v - 10$（当 $v + y \leqslant 9$ 时）.

于是　　$u + v = 9$ 或 $u + v = 10$.

又因为　$10u + v = x^2$，于是 $x^2$ 只能是

09, 36, 81, 64.

即　　$x = 3, 6, 9, 8$.

当 $x = 3$ 时，可解得 $y = 2, \quad z = 1, (n \geqslant 2)$；

当 $x = 6$ 时，可解得 $y = 8, \quad z = 4, (n \geqslant 2)$；

当 $x = 8$ 时，可解得 $y = 3, \quad z = 7, (n = 2)$；

当 $x = 9$ 时，无解.

10·19　数字 $x(x \neq 0)$ 和 $y$ 是这样的数码：对于任意的 $n \geqslant 1$，数 $\overline{\underbrace{xx\cdots x}_{n}6\underbrace{yy\cdots y}_{n}4}$ 都是某个整数的平方. 求所有的 $x$ 和 $y$.

（第 18 届全苏数学奥林匹克，1984 年）

［解］　先看 $n = 1$ 的情形.

若　　$\overline{x6y4} = A^2$，

第十章　十进制记数法

数论卷

则 $A$ 是以 2 或 8 为个位数的两位数，且十位数不小于 3.

考察 $32^2,38^2,42^2,48^2,52^2,58^2,62^2,68^2,72^2,78^2,82^2,88^2,92^2,98^2$ 可知，只有

$$68^2 = 4624, \quad 98^2 = 9604$$

的百位数字是 6.

此时 $x = 4, \quad y = 2, \quad$ 或 $\quad x = 9, \quad y = 0.$

进而，由

$$(\underbrace{6\cdots6}_{n个}8)^2 = \underbrace{4\cdots4}_{n个}6\underbrace{2\cdots2}_{n个}4.$$

$$(\underbrace{9\cdots9}_{n个}8)^2 = \underbrace{9\cdots9}_{n个}6\underbrace{0\cdots0}_{n个}4.$$

可知，只有解

$$\begin{cases} x = 4, \\ y = 2, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 9, \\ y = 0. \end{cases}$$

**10·20** 试求两个不同的自然数，它们的算术平均数 $A$ 和几何平均数 $G$ 都是两位数，其中 $A$、$G$ 中一个可由另一个交换个位和十位数字得到.

（中国浙江省全国初中联赛选拔考试，1992 年）

［解］ 设所求的两个自然数为 $x_1, x_2$. 则

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2A, \\ x_1x_2 = G^2. \end{cases}$$

从而 $x_1$ 和 $x_2$ 是方程

$$x^2 - 2Ax + G^2 = 0$$

的两个根. 即

$$x = \frac{2A \pm \sqrt{4A^2 - 4G^2}}{2} = A \pm \sqrt{A^2 - G^2}.$$

于是 $\sqrt{A^2 - G^2}$ 应为自然数.

设 $A = 10a + b$，则 $G = 10b + a, \quad a, b \in \{1,2,\cdots,9\}$.

$$\begin{aligned} A^2 - G^2 &= (10a + b)^2 - (10b + a)^2 \\ &= 9 \cdot 11 \cdot (a + b)(a - b). \end{aligned}$$

为使 $\sqrt{A^2 - G^2}$ 为自然数，则 $A^2 - G^2$ 为平方数.

于是必有

$$11 \mid a+b \quad 或 \quad 11 \mid a-b.$$

由于 $1 \leqslant a-b \leqslant 8$,所以 $11 \nmid a-b$.于是 $11 \mid a+b$.

又 $$3 \leqslant a+b \leqslant 9+8=17.$$

于是 $$a+b=11. \quad ①$$

因此 $A^2-G^2=9 \cdot 11^2 \cdot (a-b)$ 是完全平方数.

从而 $a-b$ 应是完全平方数.

由 $$a-b=(a+b)-2b=11-2b,$$
则 $a-b$ 是奇平方数.

再由 $1 \leqslant a-b \leqslant 9<3^2$,则
$$a-b=1^2=1. \quad ②$$

解①,②得 $$a=6, \quad b=5.$$

于是 $$A=65, \quad G=56.$$

$x_1$ 和 $x_2$ 为 98 与 32.

10·21 求一个四位数,它的前两位数字及后两位数字分别相同,而该数本身等于一个整数的平方.

(波兰数学竞赛,1956 年)

[**解**] 设 $x$ 是所求的数,那么
$$x=1000a+100a+10b+b$$
其中 $a,b$ 是满足 $0<a \leqslant 9$, $0 \leqslant b \leqslant 9$ 的整数.

因为 $$x=1100a+11b=11(100a+b).$$

所以 $x$ 能被 11 整除.

由 $x$ 是一个完全平方数,则 $x$ 也能被 $11^2$ 整除.这样有
$$x=11(99a+a+b)=11^2 \cdot 9a+11(a+b).$$

于是 $a+b$ 能被 11 整除.

因为 $$0<a+b \leqslant 18,$$
所以 $$a+b=11.$$

因此 $$x=11^2(9a+1).$$

于是 $9a+1$ 是一个完全平方数.

设 $$9a+1=m^2.$$

由 $9a+1 \leqslant 82$, 则 $m \leqslant 9$.
$$9a=(m+1)(m-1).$$

由此乘积 $(m+1)(m-1)$ 能被 9 整除,但因为数 $m+1$ 和 $m-1$

中至多有一个能被 3 整除,所以它们中至多有一个能被 9 整除,又由 $m \leqslant 9$,所以只能有 $m+1=9$,从而



$$9a=(m+1)(m-1)=63.$$

于是 $a=7,\quad b=11-a=4.$

从而满足题意的数为

$$7744=88^2.$$

10·22　试求出具有下述性质的最大的 5 位数 $A$:它的第 4 位数大于第 5 位数,第 3 位数大于第 4 位和第 5 位数之和,第 2 位数大于第 3、4 和 5 位数之和,而首位数大于其他各位数之和.

(第 43 届莫斯科数学奥林匹克,1980 年)

[解]　设所求的五位数为$\overline{abcde}$,其中 $a \in \{1,2,3,\cdots,9\},\quad b,c,d,e \in \{0,1,2,\cdots,9\}$.

由题意有

$$\begin{cases} d>e, \\ c>d+e, \\ b>c+d+e, \\ a>b+c+d+e. \end{cases}$$

于是 $a>2(c+d+e)>4(d+e)>8e.$

因此 $e$ 只能为 0 或 1.

若 $e=1$,则 $d \geqslant 2,\quad c \geqslant 4,\quad b \geqslant 8,\quad a \geqslant 16$,与 $a \in \{1,2,\cdots,9\}$ 矛盾.

于是 $e=0.$

则 $d \geqslant 1,\quad c \geqslant 2,\quad b \geqslant 4,\quad a \geqslant 8.$

为求最大的五位数,取 $a=9$,由于 $b<6$,则可取

$$b=5,\quad c=2,\quad d=1,\quad e=0.$$

即所求的符合要求的最大的五位数为

$$95210.$$

10·23　有一个千位数字,百位数字,十位数字,个位数字分别为 $a,b,c,d$ 的四位数,数字之和为 26,$b,d$ 之积的十位数字等于$(a+c)$,又$(bd-c^2)$是 2 的整数幂,求此四位数(说明理由).

(中国黑龙江省数学竞赛,1979 年)

[解]　由题意,有

$$\begin{cases} a+b+c+d=26, \\ bd=10(a+c)+e, (e\text{ 为 }bd\text{ 的个位数}) \\ bd-c^2=2^m \quad (m\in Z). \end{cases}$$

因为 $0\leqslant b\leqslant 9,\quad 0\leqslant d\leqslant 9,\quad 0\leqslant bd\leqslant 81,$

所以 $1\leqslant a+c\leqslant 8,$

$$26=(a+c)+(b+d)\leqslant 8+(b+d),$$

于是 $b+d\geqslant 26-8=18.$

又 $b+d\leqslant 18,$

因此 $b+d=18,\quad b=d=9.$

而 $a+c=8.$

再由 $bd-c^2=2^m,$

得 $(9+c)(9-c)=2^m.$

此式仅当 $c=7$ 时成立.于是 $a=1.$

所以,所求的四位数为 1979.

10·24 试求出一切这样的自然数 $n$,它们使得分数 $\frac{1}{n}$ 和 $\frac{1}{n+1}$ 都可以表示成有限的十进小数.

(第 45 届莫斯科数学奥林匹克,1982 年)

**[解]** 若分数 $\frac{1}{n}$ 和 $\frac{1}{n+1}$ 可以表示成有限的十进小数,则必须

$$\begin{cases} n=2^a\cdot 5^b, \\ n+1=2^c\cdot 5^d. \end{cases}$$

其中 $a,b,c,d$ 为非负整数.

从而有 $2^c\cdot 5^d-2^a\cdot 5^b=1.$

当 $a\leqslant c,\quad b\leqslant d$ 时,有

$$2^a\cdot 5^b(2^{c-a}\cdot 5^{d-b}-1)=1.$$

即

$$\begin{cases} 2^a\cdot 5^b=1, \\ 2^{c-a}\cdot 5^{d-b}-1=1. \end{cases}$$

由此解得 $a=0,\quad b=0,\quad c=1,\quad d=0.$

即 $n=1,\quad n+1=2.$

当 $c\leqslant a,\quad b\leqslant d$ 时,有

$$2^c\cdot 5^b(5^{d-b}-2^{a-c})=1.$$

即
$$\begin{cases}2^c \cdot 5^b = 1,\\ 5^{d-b} - 2^{a-c} = 1.\end{cases}$$

由此解得 $c = 0$, $b = 0$,于是
$$5^d - 2^a = 1. \qquad ①$$

下面我们求 ① 的所有非负整数解.

考虑 mod 3,有
$$2^{2k} \equiv 1 \pmod 3,$$
$$2^{2k+1} \equiv 2 \pmod 3.$$
其中 $k$ 为非负整数.

从而由
$$1 = 5^d - 2^a \equiv 2^d - 2^a \pmod 3,$$
可知 $d$ 为奇数,$a$ 为偶数,于是
$$\begin{aligned}2^a &= 5^d - 1\\ &= (5-1)(5^{d-1} + 5^{d-2} + \cdots + 1).\end{aligned}$$
注意到
$$5^{d-1} + 5^{d-2} + \cdots + 1$$
是 $d$ 个奇数之和,且是 $2^a$ 的因子,因此它只能为 1,于是 $d = 1$,从而 $a = 2$.

即 ① 的非负整数解仅有 $a = 2$, $d = 1$.

此时 $$n = 2^a \cdot 5^b = 4.$$

因此只有 $$n = 1 \text{ 及 } n = 4.$$

10·25　求最小的自然数,当它的最后一个数码排列到第一位时,它的值增加到原来的 5 倍.

（第 13 届全俄数学奥林匹克,1987 年）

[解]　设所求的数为 $10y + x$,其中 $0 \leqslant x \leqslant 9$.

由题意
$$5(10y + x) = 10^n x + y,$$
$$49y = (10^n - 5)x.$$

因为 $0 \leqslant x \leqslant 9$,所以 $x$ 不能被 49 整除.于是 $10^n - 5$ 能被 7 整除.

于是
$$10^n - 5 = 99995,$$
$$49y = 99995x,$$
$$7y = 14285x.$$

由于 $7 \nmid 14285$, 所以 $x = 7$, $y = 14285$.

所求的最小数为 142857.

10·26　求最大的完全平方数,使得这个完全平方数在减去它的最后两位数字后仍然是一个完全平方数(假设所减的数字不全为0).

(第4届全俄数学奥林匹克,1964年)

**[解]**　设此数为 $x^2$，$x$ 为正整数.最后两位数字为 $y$，$y$ 为正整数,且 $0 < y < 100$，$x^2$ 减去 $y$ 之后剩下的数为 $100z^2$，$z$ 为正整数.

由题意有
$$x^2 = 100z^2 + y,$$
$$(x - 10z)(x + 10z) = y.$$
设
$$x - 10z = a,$$
$$x + 10z = b.$$
得
$$x = \frac{a+b}{2},\quad z = \frac{b-a}{20}.$$
为使 $z$ 最大,必须 $b - a$ 最大.

因为 $y = ab$ 最多是两位数,所以 $a$ 和 $b$ 最大也是两位数,从而
$$b - a < 99.$$
于是 $z$ 最大为4.

此时
$$b - a = 80,\quad b = 80 + a,$$
从而于
$$y = ab = a(80 + a).$$
由 $y < 100$ 可知 $a(80 + a) < 100$,

因而
$$a = 1.$$
于是
$$b = 81,\quad y = 81,\quad x = 41,\quad z^2 = 16.$$
所求的数为1681,它是 $41^2$.

若 $x > 41$,则由 $z \leqslant 4$ 知
$$x^2 - 100z^2 \geqslant 42^2 - 1600 > 100.$$
于是所求的最大的完全平方数是 $41^2 = 1681$.

10·27　求具有下列性质的最小自然数 $n$:

(1) $n$ 的个位数是6;

(2) 如果将 $n$ 的个位数字6移到其余各位数字之前,所得的新数是 $n$ 的4倍.

(第4届国际数学奥林匹克,1962年)

**[解1]**　设所求的自然数为 $n = 10x + 6$,

其中 $x$ 为自然数.

又设 $n$ 的位数为 $m$. 由题意有

$$6\cdot 10^{m-1}+x=4(10x+6),$$
$$13x=2\cdot 10^{m-1}-8,$$
$$2\cdot 10^{m-1}=13x+8.$$

于是用数 200…0 除以 13,直到出现第一个余数是 8 为止,就可以得到最小的自然数 $x$.

此时可得 $x=15384.$

因此,所求的最小自然数是 153846.

[**解 2**] 设所求的最小自然数为

$$n=\overline{a_m a_{m-1}\cdots a_2 6},$$

由题意有 $4n=\overline{6a_m a_{m-1}\cdots a_2}.$

由于 $n$ 的个位数是 6,则 $4n$ 的个位数是 4,即 $a_2=4$. 此时

$$n=\overline{a_m a_{m-1}\cdots a_3 46},$$

由于 $46\cdot 4=184$,于是 $4n$ 的十位数是 8,即 $a_3=8$. 此时

$$n=\overline{a_m a_{m-1}\cdots a_4 846},$$

由于 $846\cdot 4=3384$,于是 $4n$ 的百位数是 3,即 $a_4=3$. 此时

$$n=\overline{a_m a_{m-1}\cdots a_5 3846},$$

由于 $3846\cdot 4=15384$,于是 $4n$ 的千位数是 5,即 $a_5=5$. 此时

$$n=\overline{a_m a_{m-1}\cdots a_6 53846},$$

由于 $53846\cdot 4=215384$,于是 $4n$ 的万位数是 1,即 $a_6=1$,此时

$$n=\overline{a_m a_{m-1}\cdots a_7 153846},$$

由于 $153846\cdot 4=615384$,这时 $4n$ 的首位已出现 6,于是

$$4n=615384,$$
$$n=153846.$$

这就是所求的最小自然数 $n$.

10·28 (1) 求一切正整数,它的首位数字是6,去掉这个6,所成的整数是原整数的$\frac{1}{25}$.

(2) 证明没有这样的整数,去掉它的首位数字 6,所成的整数是原整数的$\frac{1}{35}$.

（第 2 届加拿大数学竞赛，1970 年）

［解］ (1) 设首位数字是 6 的正整数为

$$6\cdot 10^n+m,\quad 0\leqslant m\leqslant 10^n-1.$$

由题设可得 $m=\frac{1}{25}(6\cdot 10^n+m)$,

$$24m=6\cdot 10^n,$$

$$m=2^{n-2}\cdot 5^n.$$

因此，所求的数具有形式

$$6\cdot 10^n+2^{n-2}\cdot 5^n=625\cdot 10^{n-2},\quad (n\geqslant 2,\quad n\in N).$$

即所求的正整数为

$$625,6250,62500,\cdots.$$

(2) 所求的整数应满足条件:

$$m=\frac{1}{35}(6\cdot 10^n+m)$$

$$34m=6\cdot 10^n$$

$$17m=3\cdot 2^n\cdot 5^n.$$

因为 17 是素数，而 17 又必须是 $3\cdot 2^n\cdot 5^n$ 的因数，这是不可能的. 所以符合题设要求的整数不存在.

10·29　试找出满足如下性质的最小自然数：它的首位数码是 4，但将首位数码挪到末尾之后，它的值为原来的$\frac{1}{4}$.

（第 46 届莫斯科数学奥林匹克，1983 年）

［解］ 设所求之数为

$$x=\overline{4ab\cdots c}=4\cdot 10^n+A.$$

其中 $A=\overline{ab\cdots c}$ 是一个 $n$ 位数.

将首位数移至末位后得到数

$$y=\overline{ab\cdots c4}=10A+4.$$

根据题意有　$4\cdot 10^n+A=4(10A+4)$,

即　$39A=4\cdot 99\cdots 96$,

或　$13A=4\cdot 33\cdots 32$.

由于 $(13,4)=1$，则 $33\cdots 32$ 能被 13 整除.

形如 $33\cdots 32$ 能被 13 整除的最小值为 33332.

因此　$A=4\cdot\frac{33332}{13}=10256.$

于是所求数 $x$ 的最小值为 410256.

10·30　证明不存在这样的整数,把它的首位数字移到末位之后,得到的数是原数的两倍.

(第 17 届加拿大数学竞赛,1985 年)

[证]　假设存在这样的整数,设它的首位数字为 $A$,其余各个数字组成的数为 $x$,　$x$ 有 $k$ 位数字,则原数为 $A\cdot 10^k+x$.其中 $A\in\{1,2,\cdots,9\}$.

将 $A$ 移到最末一位,所得的数为 $10x+A$.

依题意可得
$$10x+A=2(A\cdot 10^k+x),$$
$$8x=(2\cdot 10^k-1)A,$$
$$8x=1\underbrace{99\cdots 9}_{k\text{个}}\cdot A.$$

因为
$$(8,\ 2\cdot 10^k-1)=1,$$
所以 8 能整除 $A$.

又因为
$$A\in\{1,2,\cdots,9\},$$
所以
$$A=8.$$

于是得
$$x=1\underbrace{99\cdots 9}_{k\text{个}}.$$

因而所求的数为
$$8\cdot 10^k+1\underbrace{99\cdots 9}_{k\text{个}}=\underbrace{99\cdots 9}_{k+1\text{个}}.$$

此数显然不合题目要求.

因此符合题目要求的数不存在.

10·31　设 $n$ 是五位数(首位数字不是零),$m$ 是由 $n$ 取消它的中间一位数字后所成的四位数.试确定一切 $n$,使得 $\frac{n}{m}$ 是整数.

(第 3 届加拿大数学竞赛,1971 年)

[解]　设
$$n=\overline{xyzuv}=x\cdot 10^4+y\cdot 10^3+z\cdot 10^2+u\cdot 10+v.$$
其中 $x,y,z,u,v\in\{0,1,2,\cdots,9\}$,且 $x\neq 0$.

由题意
$$m=\overline{xyuv}=x\cdot 10^3+y\cdot 10^2+u\cdot 10+v.$$

设
$$k=\frac{n}{m}.$$

我们求 $n$,使 $k$ 是整数.

考察 $n$ 与 $9m$ 的差.

$$\begin{aligned} n - 9m &= (x \cdot 10^4 + y \cdot 10^3 + z \cdot 10^2 + u \cdot 10 + v) \\ &\quad - (9 \cdot 10^3 x + 9 \cdot 10^2 y + 90u + 9v) \\ &= 10^3 x + 10^2 y + 10^2 z - 80u - 8v > 0 \end{aligned}$$

从而有 $$9m < n. \qquad ①$$

再考察 $11m$ 与 $n$ 的差.

$$\begin{aligned} 11m - n &= 11(x \cdot 10^3 + y \cdot 10^2 + u \cdot 10 + v) \\ &\quad - (x \cdot 10^4 + y \cdot 10^3 + z \cdot 10^2 + u \cdot 10 + v) \\ &= 10^3 x + 10^2 y + 10^2 u + 10v - 10^2 z > 0. \end{aligned}$$

从而有 $$11m > n. \qquad ②$$

由 ①,② 得 $$9m < n < 11m.$$

于是 $$n = 10m, \quad k = 10.$$

即 $$\begin{aligned} &x \cdot 10^4 + y \cdot 10^3 + z \cdot 10^2 + u \cdot 10 + v \\ &= 10(x \cdot 10^3 + y \cdot 10^2 + u \cdot 10 + v). \\ &10^2 z = 90u + 9v = 9(10u + v). \end{aligned}$$

由于 9 是 $10^2 z$ 的约数,且 9 与 $10^2$ 互素,所以 9 是 $z$ 的约数.

令 $z = 9t$,则有

$$t \cdot 10^2 = 10u + v.$$

由 $t, u, v \in \{0,1,2,\cdots,9\}$ 可知

$$u = v = t = 0.$$

因而 $$z = 9t = 0.$$

于是 $$n = \overline{xy000}.$$

或记为 $n = a \cdot 10^3$, 其中 $10 \leqslant a \leqslant 99$.

10·32 在数 3000003 中,应把它的百位数码 0 和万位数码 0 换成什么数码,才能使所得的数能被 13 整除?

(波兰数学竞赛,1950 年)

[解] 设所求的数码为 $x$ 和 $y$,其中 $x, y$ 满足 $0 \leqslant x \leqslant 9$, $0 \leqslant y \leqslant 9$, $x, y \in Z$.

并记 $m = \overline{30x0y03}$,则

$$m = 3 \cdot 10^6 + x \cdot 10^4 + y \cdot 10^2 + 3.$$

注意到 $$10^6 \equiv 1 \pmod{13},$$

$$10^4 \equiv 3 \pmod{13},$$
$$10^2 \equiv 9 \pmod{13},$$

因而 $$m = 3 \cdot 10^6 + x \cdot 10^4 + y \cdot 10^2 + 3$$
$$\equiv 3x + 9y + 6 \pmod{13}$$
$$\equiv 3(x + 3y + 2) \pmod{13}.$$

因为$(3,13) = 1$,所以为使
$$13 \mid m,$$
当且仅当
$$13 \mid x + 3y + 2.$$

由 $0 \leqslant x \leqslant 9$, $0 \leqslant y \leqslant 9$ 可得
$$2 \leqslant x + 3y + 2 \leqslant 38.$$

于是 $x + 3y + 2 = 13$ 或 $x + 3y + 2 = 26$.

(1) 当 $x + 3y + 2 = 13$ 时,
$$x = 11 - 3y \geqslant 0,$$
从而 $$y \leqslant \frac{11}{3}, \quad y \in \{0,1,2,3\}.$$

显然 $y \neq 0$,于是有三组整数解:
$$\begin{cases} x = 2, \\ y = 3, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 5, \\ y = 2, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 8, \\ y = 1. \end{cases}$$

(2) 当 $x + 3y + 2 = 26$ 时,
$$0 \leqslant x = 3(8 - y) \leqslant 9,$$
从而 $$5 \leqslant y \leqslant 8.$$

于是有四组整数解:
$$\begin{cases} x = 9, \\ y = 5, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 6, \\ y = 6, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3, \\ y = 7, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0, \\ y = 8. \end{cases}$$

由(1),(2) 可得到 7 组整数解:

3080103, 3050203, 3020303, 3090503,

3060603, 3030703, 3000803.

10·33 求使 $n^n$ 有 $k$ 个数字,$k^k$ 有 $n$ 个数字的所有自然数 $n,k$.

(第 8 届全苏数学奥林匹克,1974 年)

**[解]** 为确定起见,设 $n \geqslant k$.

如果 $n^n$ 有 $k$ 个数字,则

$$10^{k-1} \leqslant n^n < 10^k. \quad ①$$

如果 $k^k$ 有 $n$ 个数字,则

$$10^{n-1} \leqslant k^k < 10^n. \quad ②$$

由 $n \geqslant k$ 及 ① 可得

$$n^n < 10^k \leqslant 10^n.$$

于是 $n < 10$. 从而 $k < 10$.

对于 $k = 1,2,3,4,5,6,7,8,9$ 逐一验证有

$$10^0 \leqslant 1 < 10^1, \quad 2^2 < 10^1, \quad 3^3 < 10^2,$$
$$4^4 < 10^3, \quad 5^5 < 10^4, \quad 6^6 < 10^5, \quad 7^7 < 10^6,$$
$$10^7 < 8^8 < 10^8, \quad 10^8 < 9^9 < 10^9,$$

由 ①,② 及以上验算可得

$$n = k = 1,8 \text{或} 9.$$

**10·34** 设 $n$ 是一个正整数,$d$ 是十进位数中的一个数码,若 $\frac{n}{810} = \overline{0.d25d25d25\cdots}$,试求 $n$.

(第 7 届美国数学邀请赛,1989 年)

**[解]** 因为 $\frac{n}{810} = \overline{0.d25d25d25\cdots}$,

所以 $1000 \cdot \frac{n}{810} = \overline{d25.d25d25\cdots}$,

于是 $1000 \cdot \frac{n}{810} - \frac{n}{810} = \overline{d25}$,

$$\frac{999n}{810} = \overline{d25},$$
$$\frac{999n}{810} = 100d + 25,$$
$$999n = 810(100d + 25),$$
$$37n = 750(4d + 1).$$

由于$(37,750) = 1$,则

$$37 \mid 4d + 1.$$

又因为 $d \in \{0,1,2,\cdots,9\}$,则 $d = 9$,

从而 $n = 750$.

**10·35** 在十进位制的表示中,自然数

$$n = \underbrace{99\cdots9}_{100\text{个}}.$$

问 $n^3$ 的表示中共有多少个 9.

（荷兰数学竞赛，1983 年）



**[解]** $$n = \underbrace{99\cdots9}_{100个} = 10^{100} - 1.$$

$$n^3 = (10^{100} - 1)^3$$
$$= (10^{300} - 1) - 3 \cdot 10^{200} + 3 \cdot 10^{100}.$$

由于 $10^{300} - 1$ 有 300 个 9，当减去 $3 \cdot 10^{200}$ 时，前 99 个 9 没动，后 200 个 9 没动.

当再加上 $3 \cdot 10^{100}$ 时，后 100 个 9 没动，前 99 个 9 没动，而中间的数都不是 9.

于是 $n^3$ 的表示中共有 199 个 9.

10·36　证明对任何自然数 $n$，和数 $1 + 2 + \cdots + n$ 的个位数码不可能是 2,4,7,9.

（波兰数学竞赛，1951 年）

**[证 1]**　如果自然数 $a$ 和 $b$ 的个位数分别是 $c$ 和 $d$，那么由

$$ab = (10k + c)(10l + d) = 10(10kl + kd + cl) + cd.$$

其中 $k$ 和 $l$ 是非负整数.

可得，乘积 $ab$ 的个位数与乘积 $cd$ 的个位数相等.

由于 $$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

若 $n$ 的个位数依次为 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9，则 $n + 1$ 的个位数相应为 1,2,3,4,5,6,7,8,9,0.

因而求 $n(n+1)$ 的个位数，只要求 $n$ 和 $n+1$ 的个位数的乘积即可.

因此 $n(n+1)$ 的个位数是 0,2,6,2,0,0,2,6,2,0.

如果数 $\frac{n(n+1)}{2}$ 的个位数字是 2,4,7,9，那么 $n(n+1)$ 的个位数是 4,8,4,8，即不是 0,2,6. 这是不可能的.

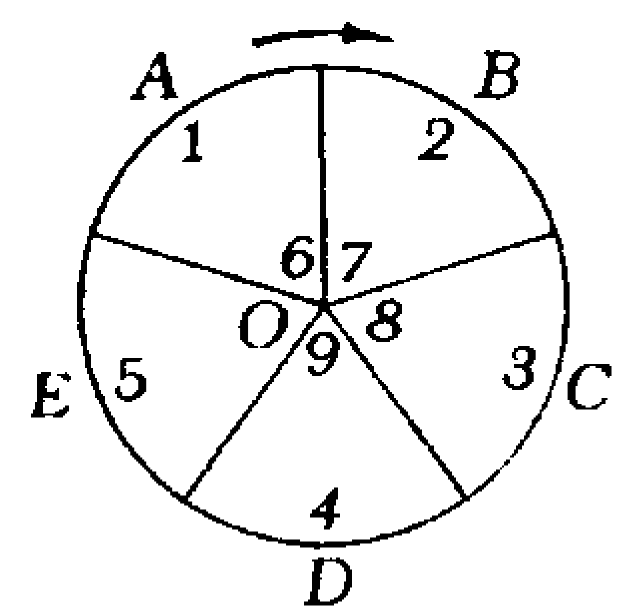
因此，数 $\frac{n(n+1)}{2}$ 的个位数不可能是 2,4,7,9.

**[证 2]**　设 $S_n = 1 + 2 + \cdots + n$，由于

$$S_k - S_l = \frac{k(k+1)}{2} - \frac{l(l+1)}{2} = \frac{(k-l)(k+l+1)}{2}.$$

因此，若 $5 \mid k - l$，则 $5 \mid S_k - S_l$. 我们将圆分成如图的五个扇形 $A$，

$B,C,D,E$.




沿着箭头的指示的方向,依次在各扇形中写上数字1,2,3,4,5,6,7,8,9,0.

如果$m$是任意自然数,那么从$A$开始,按箭头方向把扇形依次编号1,2,3,…,这样自然数$m$就落在第$m$个扇形之中.

如果两个自然数相差5的一个整数倍数,那么它们的个位数字落在同一个扇形中,这是因为对一个数增加$5k$.相当于在我们的"数字盘"上转了$k$圈.和数$S_1=1$, $S_2=1+2$, $S_3=1+2+3$, $S_4=1+2+3+4$, $S_5=1+2+3+4+5$的个位数分别落在$A,C,A,E,E$中,五个和数$S_6,S_7,S_8,S_9,S_{10}$的个位数字也落在同样的扇形(顺序不变)之中,这是因为这些和数与和数$S_1,S_2,S_3,S_4,S_5$分别相差5的整数倍数.类似的结论对五个和数$S_{11},S_{12},S_{13},S_{14},S_{15}$的个位数字也成立,如此等等.因此,任何一个和数$S_n$的个位数也应当落在扇形$A,C,E$中的一个.

因此,和数$S_n$的个位数只能是1,6,3,8,0,5中的一个.

于是$S_n$的个位数不可能是2,4,7,9.

10·37　给定一个数$N$,它的各位数码都不为0.如果在该数中有两个相邻的相同数码,或有两个相邻的相同二位数,则可将它们都删去.此外,也可以在任何位置上嵌入两个相同的数码或两个相同的二位数.证明:综合运用上述步骤,可以由数$N$得到一个各位数码都不相同的小于$10^9$的数.

(第39届莫斯科数学奥林匹克,1976年)

[证]　我们证明,可以通过题目所述的步骤来交换数$N$中任何两个相邻数码的位置.

设$N$中的两个相邻数码为$\overline{ab}$.

在$\overline{ab}$的左边嵌入数$\overline{bb}$,在$\overline{ab}$的右边嵌入数$\overline{aa}$,这样就得到了数

$$\cdots\overline{bbabaa}\cdots.$$

再在上面的数删去两个相邻的相同的二位数$\overline{baba}$,这样就得到了数

$$\cdots\overline{ba}\cdots.$$

按照以上方法可以得到所求的交换:

$$\cdots\overline{ab}\cdots\to\cdots\overline{ba}\cdots.$$

由此,我们可以通过交换相邻数码的位置,产生两个相邻的相同数码,并且可以删去这两个相邻的相同数码.

这样一来,就可以删去 $N$ 中任何两个相同的数码,而不论它是否相邻.

于是,当我们删去了相同的数码之后,就得到一个各位数码都不相同的数,由于 $N$ 的各位数码都不为 0,所以这个数不会超过 9 位,因此它显然小于 $10^9$.

10·38　设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为 $n$ 个不同的正整数,其十进制表示中没有数码 9. 证明 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\leqslant 30$.

(第 30 届国际数学奥林匹克候选题;1989 年)

[解]　首位为 $j(1\leqslant j\leqslant 8)$ 的 $l+1$ 位数 $k$ 满足　$j\cdot 10^l\leqslant k$,

从而
$$\frac{1}{k}\leqslant\frac{1}{j}\cdot 10^{-l}.$$

设各位数字不为 9 的 $l+1$ 位数的集合为 $N_l$,

又设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中位数最多为 $p+1$ 位,则

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}&\leqslant\sum_{l=0}^{p}\sum_{k\in N_l}\frac{1}{k}\\&\leqslant\sum_{l=0}^{p}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{8}\right)\left(\frac{9}{10}\right)^l\\&\leqslant\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{8}\right)\sum_{l=0}^{p}\left(\frac{9}{10}\right)^l\\&\leqslant\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{8}\right)\cdot 10\leqslant 30.\end{aligned}$$

10·39　求具有以下性质的一切三位数 $A$:用 $A$ 的数码的各种重排所得到的一切数的算术平均值仍等于 $A$.

(第 8 届全苏数学奥林匹克,1974 年)

[解]　设所求的三位数为 $A=\overline{abc}$.

由题设,有

$$\overline{abc}+\overline{acb}+\overline{bac}+\overline{bca}+\overline{cab}+\overline{cba}=6\,\overline{abc}.$$

由 $\overline{abc}=100a+10b+c$ 等可得

$$222(a+b+c)=6(100a+10b+c).$$

即
$$7a=3b+4c.$$

于是 $$7(a-b)=4(c-b).$$

由于 $|a-b| \in \{0,1,2,\cdots,9\}$， $|c-b| \in \{0,1,\cdots,9\}$ 以及 7 与 4 互素可得如下方程组

$$\begin{cases} a-b=0, \\ b-c=0. \end{cases} \quad \begin{cases} |a-b|=4, \\ |c-b|=7. \end{cases}$$

对于第一个方程组有 $a=b=c$，于是可得 9 个数

$$111,\ 222,\ 333,\ \cdots,\ 999.$$

对于第二个方程又可化为

$$\begin{cases} a-b=4, \\ c-b=7, \end{cases} \quad \begin{cases} b-a=4, \\ c-b=7, \end{cases} \quad \begin{cases} a-b=4, \\ b-c=7, \end{cases} \quad \begin{cases} b-a=4, \\ b-c=7. \end{cases}$$

由于 $a-b$ 与 $c-b$ 同号，所以上面四个方程组中的第二个，第三个不成立.

对于 $$\begin{cases} a-b=4, \\ c-b=7, \end{cases}$$

可得 $$b=0,1,2.$$

此时可得三个三位数 407，518，629.

对于 $$\begin{cases} b-a=4, \\ b-c=7, \end{cases}$$

可得 $$b=7,8,9.$$

此时可得三个三位数 370，481，592.

由以上，共得到 15 个符合条件的三位数：

$$111,222,333,\cdots,999,407,518,629,370,481,592.$$

10·40　求一切这样的三位数，如果它本身增加 3，那么它的各位数码之和就减少到原来的 $\frac{1}{3}$.

（基辅数学奥林匹克，1963 年）

［解］　设这样的三位数为 $\overline{abc}$. 其中 $a,b,c \in \{0,1,2,\cdots,9\}$， $a \neq 0$.

显然 $c \geqslant 7$，否则，若 $c \leqslant 6$，则 $\overline{abc}+3$ 的各位数码之和比原来的数码和多 3(因为没有进位)，与题意不符.

同时不能有 $a=9$ 且 $b=9$，因为这时当 $c \geqslant 7$，把 $\overline{abc}$ 加 3 之后出现进位，其数码和为 $(c+3-10)+1=c-6$，由题意有

$$\frac{1}{3}(18+c)=c-6,$$

解得 $$c=18,$$

这是不可能的.

若 $a<9$, $b=9$, $c\geqslant 7$,这时有

$$\frac{1}{3}(a+9+c)=(a+1)+0+(c+3-10).$$

$$2a+2c=27.$$

此时左边为偶数,右边为奇数,不可能.

若 $b<9$, $c\geqslant 7$,则

$$\frac{1}{3}(a+b+c)=a+(b+1)+(c+3-10).$$

$$a+b+c=9.$$

考虑到 $a\geqslant 1$,则所求的三位数只能是

117,207,108.

10·41 求这样的三位数,它是它的各位数码之和的 12 倍.

(基辅数学奥林匹克,1964 年)

[解] 设所求的三位数为

$$\overline{abc},\quad a,b,c\in\{0,1,2,\cdots,9\},\quad a\neq 0.$$

根据题意得 $$100a+10b+c=12(a+b+c).$$

$$2b=88a-11c=11(8a-c).$$

于是有 $$11\mid b.$$

又因为 $0\leqslant b\leqslant 9$, 则 $b=0$.

此时可得 $$c=8a.$$

再由 $1\leqslant a\leqslant 9$, $0\leqslant c\leqslant 9$,则

$$a=1,\quad c=8.$$

所以满足题目要求的三位数为 108.

10·42 求满足 $\overline{abc}=(a+b+c)^3$ 的所有三位数 $\overline{abc}$.

(中国上海市高二数学竞赛,1988 年)

[解] 由于 $100\leqslant\overline{abc}\leqslant 999$,则

$$100\leqslant(a+b+c)^3\leqslant 999,$$

从而 $$5\leqslant a+b+c\leqslant 9.$$

当 $a+b+c=5$ 时,

$$5^3=125\neq(1+2+5)^3.$$

当 $a+b+c=6$ 时,

$$6^3=216\neq(2+1+6)^3.$$

当 $a+b+c=7$ 时,

$$7^3=343\neq(3+4+3)^3.$$

当 $a+b+c=8$ 时,

$$8^3=512=(5+1+2)^3.$$

当 $a+b+c=9$ 时,

$$9^3=729\neq(7+2+9)^3.$$

于是,所求三位数只有 512.

10·43　试求三位数与它的各位数码之和的比值的最大值.

(第 17 届莫斯科数学奥林匹克,1954 年)

**[解]**　对于数 100,200,300,…,900,与它的各位数码之和的比值是 100.

我们证明 100 是比值的最大值.

设$\overline{abc}$是不同于 100,200,…,900 中的任何一个的三位数,

$a,b,c\in\{0,1,2,\cdots,9\}$,　$a\neq0$,　$b$ 和 $c$ 中至少有一个不等于 0.

于是$\overline{abc}$的数码之和 $a+b+c\geqslant a+1$.

而　　$\overline{abc}<(a+1)\cdot100.$

于是,$\overline{abc}$ 与它的数码和之比为

$$\frac{\overline{abc}}{a+b+c}<\frac{(a+1)\cdot100}{a+1}=100.$$

因此,三位数与其各位数码之和的比的最大值是 100,且当该数为 100,200,…,900 时达到.

10·44　三位数与它的各位数码的立方和之差的最大值是多少?怎样的三位数才能达到上述的最大值?这个差的最小正值又是多少?

(第 10 届全俄数学奥林匹克,1984 年)

**[解]**　设$\overline{abc}$为任意的三位数,其中 $a\in\{1,2,\cdots,9\}$,　$b,c\in\{0,1,2,\cdots,9\}$.

记 $f(\overline{abc})=\overline{abc}-(a^3+b^3+c^3)$,则

$$f(\overline{abc})=100a+10b+c-(a^3+b^3+c^3)$$

$$= (100a - a^3) + (10b - b^3) + (c - c^3).$$
$$= f_1(a) + f_2(b) + f_3(c).$$



其中 $f_1(a) = 100a - a^3$, $f_2(b) = 10b - b^3$, $f_3(c) = c - c^3$.

当且仅当 $f_1(a), f_2(b), f_3(c)$ 取最大值时, $f(\overline{abc})$ 取得最大值.

下面计算 $f_1(a)$.

$$f_1(1) = 99,\quad f_1(2) = 192,\quad f_1(3) = 273,$$
$$f_1(4) = 336,\quad f_1(5) = 375,\quad f_1(6) = 384,$$
$$f_1(7) = 357,\quad f_1(8) = 288,\quad f_1(9) = 171.$$

由以上可知, $a = 6$ 时, $f_1(a) = 384$ 最大.

$$f_2(0) = 0,\quad f_2(1) = 9,\quad f_2(2) = 12,\quad f_2(3) = 3,$$
$$f_2(4) = -24 < 0,\quad f_2(b) < 0\quad (b = 4, 5, \cdots, 9)$$

由以上可知, $b = 2$ 时, $f_2(b) = 12$ 最大.

显然 $c \geqslant 2$ 时, $f_3(c) < 0$. 而

$$f_3(0) = 0, f_3(1) = 0.$$

因此, 当 $\overline{abc} = 620$ 或 621 时, $f(\overline{abc})$ 取得最大值, 最大值为

$$384 + 12 + 0 = 396.$$

下面考虑 $f(\overline{abc})$ 的最小正值. 由于

$$\begin{aligned} f_1(a) &= 100a - a^3 \\ &= 99a + (a - a^3) \\ &= 99a - (a-1)a(a+1), \\ f_2(b) &= 10b - b^3 \\ &= 9b + (b - b^3) \\ &= 9b - (b-1)b(b+1), \\ f_3(c) &= c - c^3 \\ &= -(c-1)c(c+1). \end{aligned}$$

因为三个连续整数之积能够被 3 整除, 所以 $f_1(a)$, $f_2(b)$, $f_3(c)$ 都能被 3 整除, 从而 $f(\overline{abc})$ 也能被 3 整除.

因此, $f(\overline{abc})$ 的最小正值 $\geqslant 3$.

可以验证:

$$f(437) = f(474) = f(856) = 3.$$

所以 $f(\overline{abc})$ 的最小正值是 3.

10·45　用 $S(n)$ 表示自然数 $n$ 的所有数码之和.

(1) 是否存在自然数 $n$,使 $n+S(n)=1980$?

(2) 证明:任何两个连续自然数中能有一个表示成 $n+S(n)$ 的形式,其中 $n$ 是某一个自然数.

(第 14 届全苏数学奥林匹克,1980 年)

[解] (1) 由 $n+S(n)=1980$ 可知,$n$ 是一个四位数,

因而 $$S(n)\leqslant 36.$$

于是 $n$ 为 $\overline{19xy}$ 的形式.

由题设有 $1900+10x+y+(1+9+x+y)=1980.$

$$11x+2y=70.$$

于是 $$5\leqslant x\leqslant 6.$$

又 $x$ 是偶数,所以 $x=6,\quad y=2.$

即 $$n=1962.$$

有 $$1962+S(1962)=1980.$$

(2) 设 $$S_n=S(n)+n.$$

如果 $n$ 的个位数字是 9,则 $S_{n+1}<S_n$.

如果 $n$ 的个位数字不是 9,则 $S_{n+1}=S_n+2$.

由此,对于任意自然数 $m>2$,选取最大的 $N$,使 $S_N<m$,且 $N$ 的末位数字不是 9,则 $$S_{N+1}\geqslant m.$$

这样就有 $S_{N+1}=m$ 或 $S_{N+1}=m+1$. 于是在 $m$ 和 $m+1$ 中有一个能表示成 $S_n=n+S(n)$ 的形式.

10·46　求数 $1,2,3,\cdots,10^n-2,10^n-1$ 的所有数码之和.

(基辅数学奥林匹克,1970 年)

[解] 把数 $m$ 与 $10^n-1-m$ 对应,由于

$$m+(10^n-1-m)=10^n-1=\underbrace{99\cdots9}_{n\text{个}},$$

所以每一对数 $m,\ 10^n-1-m$ 的各位数码之和为 $9n$.

取 $m=1,2,\cdots,10^n-2$,则有 $\frac{10^n-2}{2}$ 对各位数码之和为 $9n$ 的数.

又 $m=10^n-1$ 时,只有一个数,它的各位数码之和为 $9n$.

于是,$1,2,\cdots,10^n-2,10^n-1$ 的所有数码之和为

$$9n\cdot\frac{10^n-2}{2}+9n=\frac{1}{2}\cdot 10^n\cdot 9n.$$



10·47　$A=\underbrace{999\cdots9}_{81个}$.求 $A^2$ 的各位数码之和.

（日本数学奥林匹克,1991 年）

[解]
$$\begin{aligned}A^2&=(10^{81}-1)^2\\&=10^{162}-2\cdot10^{81}+1\\&=\underbrace{99\cdots9}_{80个}800\cdots01.\end{aligned}$$

所以 $A^2$ 的各位数码之和为

$$9\cdot80+8+1=729.$$

10·48　求所有的自然数,它是它的各位数码之和的 11 倍.

（基辅数学奥林匹克,1977 年）

[解]　设所求的自然数为 $N$,$N$ 是 $n$ 位数,则

$$N\geqslant10^{n-1}.$$

又设 $N$ 的各位数码之和为 $S$,则

$$S\leqslant9n.$$

由题意
$$N=11S,$$

即
$$11\cdot9n\geqslant10^{n-1}.$$

可以证明,在 $n\geqslant4$ 时,

$$10^{n-1}>99n.$$

因此,数 $N$ 至多为三位数,即 $n\leqslant3$.

设 $N=\overline{abc}$,其中 $a,b,c\in\{0,1,2,\cdots,9\}$.

于是有方程

$$100a+10b+c=11(a+b+c),$$
$$89a=b+10c.$$

因为 $b\leqslant9$,　$c\leqslant9$,则

$$89a\leqslant99,\quad a\leqslant1.$$

若 $a=0$,则有 $b=0$,　$c=0$,从而 $N=0$,不是自然数,不合题意.

若 $a=1$,则有

$$b+10c=89.$$

由此可得
$$c=8,\quad b=9.$$

于是本题有惟一解：

$$N = 198.$$

10·49　求使得十进制数 $2^n$ 的各位数码之和等于5的所有自然数 $n$.

（第10届全俄数学奥林匹克，1984年）

[解]　不难验证，满足题目要求的 $n$ 的最小值是5. 这是因为

$$2^5 = 32, \quad 3 + 2 = 5.$$

下面我们证明，当 $n \geqslant 6$ 时，任何 $n$ 都不满足题目的要求.

因为 $2^n$ 的个位数是2,4,6,8，而 $2^n$ 的各位数码之和是5，所以，个位数是6和8的情况应当排除.

(1) 若 $2^n$ 的个位数是4，且各位数码之和是5，即

$$2^n = 1\underbrace{00\cdots0}_{k个}4 = 4(25\underbrace{00\cdots0}_{k-1个} + 1) \quad (k \geqslant 1).$$

由于 $$8 \nmid 25\underbrace{00\cdots0}_{k-1个} + 1,$$

则 $$32 \nmid 2^n.$$

而 $n \geqslant 6$ 时， $$32 \mid 2^n.$$

出现矛盾.

(2) 若 $2^n$ 的个位数是2，且各位数码之和是5，则它的末几位数码为

$$02, 22, 012, 112.$$

因为末几位是02,22,012时，$8 \nmid 2^n$ 与 $n \geqslant 6$ 时，$8 \mid 2^n$ 矛盾.

当末几位是112时，

若为 $$1112 = 2^3 \cdot 139,$$
$$10112 = 2^7 \cdot 79,$$

均不是2的幂的形式.

若为 $$1\underbrace{00\cdots0}_{m个}112 = 10^{m+3} + 112,$$

显然 $32 \nmid 100\cdots0112$，而 $32 \mid 2^n$.

综合以上，只有 $n = 5$.

10·50　给定

(1) 自然数系数的多项式 $P(x)$，

(2) 整数系数的多项式 $P(x)$.

用 $a_n$ 表示 $P(n)$ 在十进制记数法中的数码和.

证明存在一个数,这个数在数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 中出现无数次.

(第 9 届全苏数学奥林匹克,1975 年)

[证] (1) 我们取多项式 $P(x)$ 的所有系数的数码之和为 $S$.

这个 $S$ 就是在数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 中出现无数次的数.

这是因为,若 $n_0$ 是使 $10^{n_0}$ 大于 $P(x)$ 的所有系数的数.

那么当 $n \geqslant n_0$ 时,

总有
$$a_{10^n} = S.$$

因而 $S$ 在 $a_{10^{n_0}}, a_{10^{n_0}+1},\cdots$ 中出现.

(2) 首先可以证明,当 $d > 0$ 足够大时,多项式 $Q(x) = P(x+d)$ 的所有系数的符号与
$$P(x) = p_0x^n + p_1x^{n-1} + \cdots + p_n$$
的首项系数 $p_0$ 的符号相同.

这是因为
$$\begin{aligned}Q(x) &= P(x+d)\\ &= p_0(x+d)^n + p_1(x+d)^{n-1} + \cdots + p_n\\ &= p_0(x^n + C_n^1x^{n-1}d + \cdots + C_n^{n-1}xd^{n-1} + d^n)\\ &\quad + p_1(x^{n-1} + C_{n-1}^1x^{n-2}d + \cdots + d^{n-1}) + \cdots + p_n\\ &= q_0x^n + q_1(d)x^{n-1} + \cdots + q_n(d).\end{aligned}$$
其中 $q_k(d)$ 是 $d$ 的多项式,$k = 0,1,\cdots,n$,并且 $q_k(d)$ 的次数为 $k$,且首项为 $p_0C_n^kd^k$, $q_0 = p_0$.

因此当 $d > 0$ 足够大的时候,$p_0C_n^kd^k$ 就足够大,使得每一个 $q_k(d)$ 的符号与 $p_0$ 的符号相同.

于是当 $d$ 足够大时,$P(x+d) = Q(x)$ 可以变成自然数系数多项式,这样就可以用(1) 的结果.

仍然设 $n_0$ 是使 $10^{n_0}$ 大于 $Q(x) = P(x+d)$ 的所有系数的数.

对于任意 $n \geqslant n_0$,数 $Q(10^n) = P(10^n+d)$ 的所有数码之和相同.

10·51 证明对于任意自然数 $k$,存在无穷多个不含数码 0 的自然数 $t$(十进制记数法),使得 $t$ 与 $kt$ 的数码和相同.

(第 4 届全苏数学奥林匹克,1970 年)

[证]　记数 $k=\overline{a_na_{n-1}\cdots a_0}$. 取 $t=\underbrace{99\cdots9}_{m个}$,($m>n$). 于是

$$kt=k(10^m-1)$$
$$=\overline{a_na_{n-1}\cdots(a_0-1)\underbrace{99\cdots9(9-a_n)(9-a_{n-1})\cdots(9-a_1)(10-a_0)}_{m个数字}}$$

这时,$kt$ 的各位数码之和为 $9m$,与 $t$ 的各位数码之和相同.

10·52　证明从任意39个连续的自然数中,总能找到一个数,它的各位数码之和能被 11 整除.

(第 24 届莫斯科数学奥林匹克,1961 年
第 1 届全俄数学奥林匹克,1961 年)

[证 1]　假设 $m$ 是一个各位数码之和能被11整除的一个自然数. 本题等价于证明,在紧接连 $m$ 的 39 个整数中,一定存在一个各位数码之和能被 11 整除的整数.

(1) 若 $m=\overline{ab\cdots cd}$,且 $d\neq0$,　$c\neq9$. 则由

$$\overline{cd}+9=10c+d+9=10(c+1)+(d-1)$$

于是 $\overline{cd}+9$ 的数码之和为 $c+d$ 与 $\overline{cd}$ 的数码之和相同.

因而 $m$ 与 $m+9$ 的各位数码之和相同,即 $m+9$ 即为各位数码之和能被 11 整除的整数.

(2) 若 $m=\overline{ab\cdots cd}$,且 $d=0$,　$c\leqslant7$.

则由　$\overline{cd}+29=10c+29=10(c+2)+9=\overline{(c+2)9}$.

于是 $\overline{cd}+29$ 的各位数码之和为 $11+c$,而 $\overline{cd}$ 的数码之和为 $c+0=c$.

因此 $m+29$ 的各位数码之和比 $m$ 的各位数码之和大 11,　$m+29$ 即为所求.

(3) 若 $m=\overline{ab\cdots cd}$,且 $c=9$.

这时,给 $m$ 加上一个不超过 10 的正整数,可以得到一个末两位都是 0 的数 $m'$.

这时 $m'+1$,　$m'+2$,　$m'+3$,　$\cdots$,　$m'+19$,这 19 个数的各位数字的和中,得到被 11 除的一切可能的余数,其中必有一个余数为 0,从而它的各位数码之和能被 11 整除. 这个数与 $m$ 之差不超过 $10+19=29$,即 $m$ 之后不超过 29 个数中就存在一个数满足要求.

(4) 若 $m=\overline{ab\cdots cd}$,且 $c=8$,　$d=0$.

这时可以仿照(3) 的方法,先加 20 得到一个末两位是 0 的整数

$m'$,再考虑 $m'+1$, $m'+2$ ,…, $m'+19$,可得各位数码之和能被 11 整除的数,这个数与 $m$ 的差不超过 $20+19=39$.

由(1),(2),(3),(4) 可得在 $m$ 之后的 39 个数中一定有一个数,它的各位数码之和能被 11 整除.

**[证 2]** 设这 39 个连续自然数的集合为

$$\{a_1, a_2, \cdots, a_{19}, a_{20}, \cdots, a_{39}\}.$$

且 $a_{i+1}=a_i+1$, $i=1,2,\cdots,38$.

考察这个集合的前 20 个数:

$$a_1, a_2, \cdots, a_{19}, a_{20}.$$

它们当中一定有两个数的个位是 0. 并且在这两个数中一定有一个数的十位数不是 9. 设这个个位数是 0,十位数不是 9 的数为 $a_j$, $1 \leqslant j \leqslant 20$,于是

$$a_j, a_{j+1}, a_{j+2}, \cdots, a_{j+10}$$

这 11 个连续自然数一定在给定的集合内.

考察这 11 个数的各位数字之和,记 $a_j$ 的各位数字之和为 $S(a_j)$,则显然

$$S(a_{j+1}) = S(a_j)+1,$$
$$S(a_{j+2}) = S(a_j)+2,$$
$$\cdots\cdots$$
$$S(a_{j+10}) = S(a_j)+10.$$

由于 $S(a_j)$, $S(a_j)+1$, $S(a_j)+2$, …, $S(a_j)+10$ 是 11 个连续自然数,其中必有一个能被 11 整除.

10·53 $S$ 为十进制中至多有 $n$ 个数码的非负整数所成的集. $S_k$ 由 $S$ 中那些数码之和小于 $k$ 的元素组成. 对什么样的 $n$,有 $k$ 存在,使得 $|S| = 2|S_k|$?

(中国国家集训队训练题,1990 年)

**[解]** 对任一 $n$ 位数

$$A = \overline{a_1 a_2 \cdots a_n}, \quad a_i \in \{0,1,2,\cdots,9\}.$$

设 $n$ 位数 $B = \overline{b_1 b_2 \cdots b_n}$, $b_i = 9 - a_i$, $i = 1,2,\cdots,n$,

则可建立数 $A$ 与数 $B$ 的一一对应

$$f:\ A \longleftrightarrow B.$$

若 $A$ 的数字和记为 $d(A)$，$B$ 的数字和记为 $d(B)$.则有

$$d(A)+d(B)=9n.$$

对于任意 $0<k\leqslant 9n$，$d(A)<k$ 的充分必要条件是

$$d(B)>9n-k.$$

于是

$$\left|\left\{A,d(A)<\frac{9n}{2}\right\}\right|=\left|\left\{A,d(A)>\frac{9n}{2}\right\}\right|.$$

若 $n$ 为奇数,则

$$\left\{A,\ d(A)=\frac{9n}{2}\right\}=\varnothing.$$

从而仅对 $k=\left[\frac{9n}{2}\right]+1$,

$$|S|=2|S_k|.$$

若 $n$ 为偶数,对任意整数 $k$,

$$|S|\neq 2|S_k|.$$

**10·54** 证明数 $k$ 的所有数码之和不大于数 $8k$ 的所有数码之和的 8 倍.

数 $N$ 的各位数码之和不超过数 $5^5N$ 的数码之和的 5 倍.

(第 34 届莫斯科数学奥林匹克,1971 年)

[证] 记数 $x$ 的数码之和为 $S(x)$.

不难证明,对任何自然数 $A$ 和 $B$ 都有

$$S(A+B)\leqslant S(A)+S(B). \qquad ①$$

下面我们证明:

$$S(AB)\leqslant S(A)S(B). \qquad ②$$

设 $A=\overline{a_1a_2\cdots a_n}$,则

$$AB=\sum_{i=1}^{n}a_iB10^{n-i}.$$

因此就有

$$S(AB)\leqslant S\left(\sum_{i=1}^{n}a_iB\right)$$

$$\leqslant S(\underbrace{B+B+\cdots+B}_{\sum_{i=1}^{n}a_i\text{个}}).$$

于是由 ① 式有

$$S(B+B+\cdots+B)\leqslant\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot S(B)$$
$$=S(A)\cdot S(B).$$

数论卷

因此 $$S(AB)\leqslant S(A)\cdot S(B).$$

由 ② 得

$$S(k)=S(1000k)=S(125\cdot 8k)$$
$$\leqslant S(125)\cdot S(8k)$$
$$=8S(8k).$$
$$S(N)=S(10^5N)=S(2^5\cdot 5^5N)$$
$$\leqslant S(32)S(5^5N)=5S(5^5N).$$

$k=125$, $N=32$ 时,上述二式的等号成立.

10·55 求下面乘积的数码和(关于 $n$ 的函数)

$$9\cdot 99\cdot 9999\cdot\cdots\cdot(10^{2^n}-1).$$

其中每个因子的数码个数等于它前面的因子的数码个数的两倍.

(第 21 届美国数学奥林匹克,1992 年)

[解] 记 $A_n=9\cdot 99\cdot 9999\cdot\cdots\cdot(10^{2^n}-1)$.

先用数学归纳法证明:$A_n$ 是 $2^{n+1}-1$ 位数.

(1)$n=0$ 时,$A_0=9$ 是一位数,又 $2^{0+1}-1=1$,所以 $n=0$ 时,结论成立.

(2) 设 $A_k$ 是 $2^{k+1}-1$ 位数.

那么 $n=k+1$ 时,

$$A_{k+1}=A_k\cdot(10^{2^{k+1}}-1)=A_k\cdot 10^{2^{k+1}}-A_k.$$

由于 $A_k$ 是 $2^{k+1}-1$ 位数,所以由上式 $A_{k+1}$ 是$(2^{k+1}-1)+2^{k+1}=2^{(k+1)+1}-1$ 位数.

从而 $n=k+1$ 时,结论成立.

即对所有的自然数 $n$,总有 $A_n$ 是 $2^{n+1}-1$ 位数.

设 $A_n$ 的各位数码之和为 $S_n$,由于

$$A_n=A_{n-1}(10^{2^n}-1)$$
$$=(A_{n-1}-1)\cdot 10^{2^n}+10^{2^n}-A_{n-1}.$$

由于 $A_{n-1}$ 是 $2^n-1$ 位数,故可设

$$A_{n-1}=\overline{a_1a_2\cdots a_m},\quad m=2^n-1,\quad a_m\neq 0.$$

于是有

$$S_n=(a_1+a_2+\cdots+a_m-1)+[9+(9-a_1)+(9-a_2)+\cdots+(9-a_{m-1})+(10-a_m)]$$
$$=9\cdot 2^n.$$

10·56　证明当 $n$ 趋向于无穷时,数 $1972^n$ 的数码之和无限增长.

（波兰数学竞赛,1972 年）

[证]　我们证明更一般的结论:

若 $a$ 是偶数,而且不是 5 的倍数,$S_n$ 表示 $a^n$ 的各位数码之和($n=1,2,\cdots$) 则数列 $\{S_n\}$ 无限增大.

设 $a^n$ 的各位数码,从右向左依次为 $a_1,a_2,\cdots$,在这数列中,下标足够大的项都是零,因此

$$a^n=\overline{\cdots a_3a_2a_1}.$$

因为已知 $a$ 不是 5 的倍数,所以 $a_1\neq 0$,因而 $a^n$ 也不是 5 的倍数.

先证明下面一个引理:

如果　$$1\leqslant j\leqslant\frac{1}{4}n \quad ①$$

那么数 $a^n$ 的数字 $a_{j+1},a_{j+2},\cdots,a_{4j}$ 中至少有一个不为零.

事实上,如果对某个满足条件 ① 的自然数 $j$,有关系式

$$a_{j+1}=a_{j+2}=\cdots=a_{4j}=0.$$

若令　$$c=\overline{a_ja_{j-1}\cdots a_2a_1},$$

则有　$$a^n-c=\overline{\cdots a_{4j+2}a_{4j+1}00\cdots 0}.$$

因此有　$$10^{4j}\mid a^n-c.$$

因而又有　$$2^{4j}\mid a^n-c. \quad ②$$

因为 $a$ 是偶数,所以 $2^n\mid a^n$,(因为 $4j\leqslant n$).

由此得　$$2^{4j}\mid a^n. \quad ③$$

由关系式 ②,③ 可知 $2^{4j}\mid c$.

但 $2^{4j}=16^j>10^j>c$,所以 $c=0$.

由所设 $c$ 的末位数字 $a_1\neq 0$,所以引出矛盾,引理得证.

根据这个引理,在下列各组数字中,每一组至少各有一个数字不为零:

$$a_2,a_3,a_4,$$
$$a_5,a_6,a_7,\cdots,a_{16},$$

$$a_{17}, a_{18}, a_{19}, \cdots, a_{64},$$

$$a_{4^k+1}, a_{4^k+2}, \cdots, a_{4^{k+1}}.$$



这里 $j = 4^k$ 满足条件 ①,即

$$4^k \leqslant \frac{1}{4}n,$$

$$k + 1 \leqslant \log_4 n.$$

因此令 $k = [\log_4 n] - 1$,于是,上面的 $k + 1$ 个数列含有 $a^n$ 的不同数字,而且每个数列都含有非零项.因此数 $a^n$ 的数字和$S_n$ 不小于$k + 1 = [\log_4 n]$.

因为 $$[\log_4 n] > \log_4 n - 1,$$

且 $$\lim_{n\to\infty}\log_4 n = \infty.$$

又因为 $$S_n \geqslant [\log_4 n],$$

所以 $$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty.$$

10·57　给定一个29位数 $x = \overline{a_1a_2\cdots a_{28}a_{29}}(0 \leqslant a_k \leqslant 9,\quad a_1 \neq 0, k = 1,2,\cdots,29)$.已知对于每个 $k$,数码 $a_k$ 都在该数的表示式中出现 $a_{30-k}$ 次(例如 $a_{10} = 7$,则数码 $a_{20}$ 就出现了7次).试求 $x$ 的数码之和.

(第34届莫斯科数学奥林匹克,1971年)

[解]　以 $k(A)$ 表示其中数码 $A$ 的个数.

则由已知条件可得,如果数码 $B, C$ 处于对称的位置上,则有 $k(B) = C, k(C) = B$,例如若 $a_{14} = 5$,则 $a_{16}$ 出现5次,即 $k(a_{16}) = a_{14} = 5$,若 $a_{16} = 7$,则 $a_{14}$ 出现7次,即 $k(a_{14}) = a_{16} = 7$.这样一来,便知这些数码处处都应处于对称的位置上.因而若有 $k(B) = k(C)$ 及 $B = C$,可立即推知恒有 $k(A) = A$,并且位于中间位置(即第15位)上的数码应出现奇数次,而其余的数码都应出现偶数次.

于是便知 $x$ 中的数码个数不超过

$$\begin{aligned}&k(2) + k(4) + k(6) + k(8) + k(9)\\&= 2 + 4 + 6 + 8 + 9\\&= 29.\end{aligned}$$

再根据条件便知,数码恰有29个.

这就意味着,这些数码恰好有2个2,　4个4,　6个6,　8个8和

9个9.

于是 $x$ 的数码之和等于

$$2^2+4^2+6^2+8^2+9^2=201.$$

10·58　求出所有的自然数 $n$，使得其个位数是4，而且它的各位数码的平方和不小于 $n$.

（列宁格勒数学奥林匹克，1980年）

［解］　设 $n=\overline{a_ka_{k-1}\cdots a_2a_14}$，其中 $a_i\in\{0,1,2,\cdots,9\}$，　$a_k\neq0$. 由题设可知

$$a_k^2+a_{k-1}^2+\cdots+a_1^2+16\geqslant n>a_k\cdot10^k.$$

由此可得

$$k\cdot9^2+16>a_k\cdot10^k\geqslant10^k,$$

即

$$81k+16>10^k.$$

当 $k\geqslant3$ 时，

$$10^k=(9+1)^k>9^k+k\cdot9^{k-1}$$
$$>16+k\cdot9^2.$$

于是

$$k\leqslant2.$$

当 $k=0$ 时，$n=4$，这时 $4^2=16>4=n$，符合题目要求.

当 $k=1$ 时，设 $n=10x+4$，则由题意有

$$x^2+16>10x+4$$
$$(x-5)^2\geqslant13.$$

显然，仅当 $x=1$ 及 $x=9$ 时满足要求，此时，$n=14$ 和 $n=94$.

当 $k=2$ 时，设 $n=100x+10y+4$，则由题意有

$$x^2+y^2+16\geqslant100x+10y+4,$$
$$(50-x)^2+(y-5)^2\geqslant50^2+5^2-12.$$

由于

$$49^2\geqslant(50-x)^2,\quad 5^2\geqslant(y-5)^2,$$

则

$$49^2+5^2\geqslant(50-x)^2+(y-5)^2\geqslant50^2+5^2-12,$$
$$12\geqslant50^2-49^2=99.$$

出现矛盾.

所以，所求的 $n$ 只有 $n=4,14,94$ 三个解.

10·59　试求出所有这样的三位数，它们都等于自己的各位数码的阶乘的和.

（第6届莫斯科数学奥林匹克，1940年）

[解]　设$\overline{abc} = a! + b! + c!$.

由于 $7! = 5040$ 是四位数，所以 $a,b,c$ 中没有大于 6 的数.

此外，若 $a,b,c$ 中有一个为6，则由于 $6! = 720$，此时导致 $\overline{abc} > 6! = 720$，　$a,b,c$ 中至少有一个大于 6，这是不可能的.

此外，不可能有

$$555 = 5! + 5! + 5!,$$

于是 $a,b,c$ 中不可能都等于 5.

又　$4! + 4! + 4! < 100$ 不是三位数，所以 $a,b,c$ 中至少有一个为 5.

由 $3 \cdot 5! = 360$，则 $a \leqslant 3$.

如果 $a = 1$，则有

$$145 = 1! + 4! + 5!.$$

如果 $a = 2$，则必须 $b = c = 5$，此时

$$255 \neq 2! + 5! + 5!.$$

如果 $a = 3$，则必须 $b = c = 5$，此时

$$355 \neq 3! + 5! + 5!$$

因此仅有一个三位数具备所述性质，即

$$145 = 1! + 4! + 5!.$$

10·60　对于自然数 $x$，用 $Q(x)$ 表示 $x$ 的各位数码(十进制)的和，用 $P(x)$ 表示 $x$ 的各位数码的积. 证明对每一个自然数 $n$，存在着无穷多个自然数 $x$，满足

$$Q(Q(x)) + P(Q(x)) + Q(P(x)) + P(P(x)) = n.$$

(澳大利亚数学竞赛，1983 年)

[证]　令　$x = 11\cdots100\cdots0.$

其中 1 的个数为 $\underbrace{11\cdots1}_{n个}0$ 个，0 的个数为任意自然数.

显然，这样的 $x$ 有无穷多个.

于是
$$Q(x) = \underbrace{11\cdots1}_{n个}0,$$
$$P(x) = 0.$$

从而有
$$P(Q(x)) = 0,$$
$$P(P(x) = 0,$$
$$Q(Q(x)) = n,$$
$$Q(P(x)) = 0.$$

于是有

$$Q(Q(x)) + P(Q(x)) + Q(P(x)) + P(P(x)) = n.$$

10·61　求一个两位数,它等于它的各位数码之积的两倍.

（基辅数学奥林匹克,1952 年）

[解]　设所求的两位数为 $10x+y$,其中 $x,y\in\{0,1,2,\cdots,9\}$,$x\neq 0$.

$$10x+y=2xy,$$

$$y=2x(y-5). \quad ①$$

由 ① 可知,$y$ 是偶数,且 $5\leqslant y\leqslant 9$,则只有

$$y=6 \text{ 或 } 8.$$

$y=8$ 时,① 式化为 $8=6x$. $x$ 不是整数.

$y=6$ 时,由 ① 得　$x=3$.

因此,所求的两位数为 36.

10·62　求能被各位数码之积整除的一切两位数.

（基辅数学奥林匹克,1957 年）

[解]　设所求的两位数为

$$\overline{ab}=10a+b,$$

其中 $a,b\in\{0,1,2,\cdots,9\}$,$a\neq 0$.

由题意有　$10a+b=kab$　($k$ 为自然数).

由此式可得　$b=a(kb-10)$.

于是　$a\mid b$.

若 $a=b$,则有

$$11a=ka^2,\quad ka=11.$$

于是　$a=1,\quad k=11$.

求得惟一的两位数 11.

若 $a\neq b$,　且 $a\mid b$,　则 $a\leqslant 4$.

若 $a=4$,则只有 $b=8$. 然而

$$48\neq k\cdot 4\cdot 8.$$

所以 $a=4$ 时无解.

若 $a=3$,则　$30=(3k-1)b$,

由 $a\mid b$ 及 $b\in\{0,1,\cdots,9\}$ 可知　$b=6$.

显然　$36=2\cdot 3\cdot 6$.

数论卷

若 $a=2$，则 $$20=(2k-1)b,$$
由 $a\mid b$ 及 $b\in\{0,1,\cdots,9\}$ 可知 $b=4$.

显然 $$24=3\cdot 2\cdot 4.$$

若 $a=1$，由 $$10=(k-1)b$$
可求出 $$b=2,\quad b=5.$$

显然 $$12=6\cdot 1\cdot 2,\quad 15=3\cdot 1\cdot 5.$$

于是所求的两位数共有5个：
$$11,\ 12,\ 15,\ 24,\ 36.$$

10·63 设 $p(x)$ 是十进制整数 $x$ 的所有数码的乘积，试求使 $p(x)=x^2-10x-22$ 成立的一切正整数 $x$.

（第10届国际数学奥林匹克，1968年）

**[解1]** 设十进制自然数 $x$ 由 $n$ 个数码组成．则 $p(x)$ 和 $x$ 应满足
$$p(x)\leqslant 9^n,\quad x\geqslant 10^{n-1}.$$

(1) 当 $n=1$ 时，则 $p(x)=x$，于是
$$x^2-10x-22=x,$$
$$x^2-11x-22=0.$$
此方程没有整数解.

(2) 当 $n=2$ 时，则有
$$x^2-10x-22=p(x)\leqslant 81,$$
从而有
$$x^2-10x+25=p(x)+47\leqslant 128,$$
$$(x-5)^2=p(x)+47\leqslant 128,$$
$$|x-5|\leqslant\sqrt{128}<12,$$
$$-7<x<17.$$

又因为 $x\geqslant 10$，所以 $$10\leqslant x\leqslant 16.$$

又由 $$p(x)+47=(x-5)^2\leqslant 128,$$
可以知道，$p(x)+47$ 是一个正整数的平方，且是一个不大于128的平方数，下面就 $x=10,11,\cdots,16$ 这7种情况逐一检验：

| $x$ | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p(x)$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $p(x)+47$ | 47 | 48 | 49 | 50 | 51 | 52 | 53 |

由表中可以发现,仅当 $x=12$ 时,$p(x)+47=49$ 是一个平方数.

可以验证,$x=12$ 符合题意.

(3) 当 $n>2$ 时,由 $x\geqslant 10^{n-1}$ 得

$$0<10^{n-1}-5\leqslant x-5,$$
$$(10^{n-1}-5)^2\leqslant (x-5)^2,$$
$$p(x)=(x-5)^2-47\geqslant 10^{2n-2}-10^n-22.$$

另一方面,由 $n>2$ 可知

$$10^n\geqslant 1000,\quad 10^{n-2}-2\geqslant 8.$$

因此有 $$10^n(10^{n-2}-2)\geqslant 8000,$$

从而有
$$\begin{aligned}p(x)&\geqslant 10^{2n-2}-10^n-22\\&=10^n(10^{n-2}-2)+10^n-22\\&\geqslant 8000+10^n-22\\&>10^n,\end{aligned}$$

与 $p(x)\leqslant 9^n$ 矛盾.

所以 $n>2$ 时无解.

由(1),(2),(3) 可知,只有正整数解 $x=12$.

**[解 2]** 设十进制的自然数 $x$ 由 $n$ 个数码组成.则 $p(x)\leqslant 9^n$.

(1) 当 $n=1$ 时,同解法一,无解.

(2) 当 $n\geqslant 2$ 时,则

$$x\geqslant 10^{n-1}a_n>9^{n-1}a_n\geqslant p(x),$$

其中 $a_n$ 是 $x$ 的第 $n$ 位数字.

所以有 $$p(x)=x^2-10x-22<x,$$
$$x^2-11x-22<0,$$

由 $x>0$ 可得 $$0<x<\frac{11+\sqrt{209}}{2}<13.$$

因为 $x$ 为自然数,且 $x\geqslant 10$,则有

$$x=10,11,12.$$

若 $x=10$,则 $p(x)=0$,

$$x^2-10x-22=-22\neq p(x).$$

若 $x=11$,则 $p(x)=1$,

$$x^2-10x-22=-11\neq p(x).$$

若 $x=12$,则 $p(x)=2$,

$$x^2 - 10x - 22 = 2 = p(x).$$

所以符合本题要求的自然数只有 $x = 12$.



10·64 对自然数 $A$,定义其(在十进制中的)数码的积为 $p(A)$,求满足 $A = 1.5p(A)$ 的所有 $A$.

(中国国家集训队训练题,1990 年)

[解] 设 $A$ 为 $n$ 位数($n \geqslant 2$),其首位为 $a$,则有

$$A \geqslant a \cdot 10^{n-1}. \quad ①$$

若 $A$ 的其他数码均为 9,则 $9 \mid p(A)$,而由

$$A = 1.5p(A) \quad ②$$

可得 $$9 \mid A.$$

从而 $$9 \mid a.$$

此时 $$1.5p(A) = \frac{3}{2} \cdot 9^n$$

不是整数,因此 $A$ 的首位数码后面的数码不全为 9,从而

$$p(A) \leqslant 8a \cdot 9^{n-2}.$$

由 ①,② 可得

$$1.5 \cdot 8a \cdot 9^{n-2} \geqslant a \cdot 10^{n-1}$$

从而 $$12 \cdot 9^{n-2} \geqslant 10^{n-1}, \quad n \leqslant 3.$$

若 $n = 2$,设 $A = 10a + b$,则

$$20a + 2b = 3ab,$$

解得 $$a = 4, \quad b = 8.$$

即 $$A = 48.$$

若 $n = 3$,设 $A = 100a + 10b + c$,则

$$200a + 20b + 2c = 3abc.$$

于是 $$bc > \frac{200}{3} > 66.$$

$b$ 和 $c$ 只能取(9,9)或(9,8).此时 $a$ 均不是整数.

所以本题只有一解:$A = 48$.

10·65 试求满足如下条件的一切自然数 $x$,$x$ 的各位数码之积等于 $44x - 86868$,而各位数码之和是完全立方数.

(第 52 届莫斯科数学奥林匹克,1989 年)

[解] 首先证明 $x$ 是一个四位数.事实上

由 $$44x - 86868 > 0,$$

知 $$x \geqslant \left[\frac{86868}{44}\right] + 1 = 1975.$$

所以 $x$ 至少是一个四位数.

若 $x$ 的位数 $k \geqslant 5$,则

$P(x) = 44x - 86868 > 4 \cdot 10^k - 10^5 > 3 \cdot 10^k > 9^k \geqslant P(x)$.

其中,$P(x)$ 表示 $x$ 的各位数码之积.

上式的矛盾表明,$x$ 恰为一个四位数.

设 $x$ 的各位之和为 $S(x)$,则

$$1 \leqslant S(x) \leqslant 36.$$

由于 $S(x)$ 是完全立方数,则 $S(x) = 1, 8$ 或 $27$.

显然,$S(x) = 1$ 不合要求.

又由于 $0 < P(x) \leqslant 9^4 = 6561$,

$$44x - 86868 \leqslant 6561,$$

$$x \leqslant \left[\frac{86868 + 6561}{44}\right] = 2123.$$

从而可知

$$1975 \leqslant x \leqslant 2123.$$

且 $$S(x) = 8 \text{ 或 } 27,$$

$$P(x) \neq 0.$$

不难发现,这样的 $x$ 只有 1989,1998,2114,2123 这四个.

逐个计算 $P(x)$ 及 $44x - 86868$ 可知,只有 $x = 1989$ 满足要求.

10·66 设 $n$ 是自然数,$f(n) = n^2 + 1$(十进制)的各位数码之和,$f^{(1)}(n) = f(n)$, $f^{(2)}(n) = f(f(n))$, …, $f^{(k+1)}(n) = f(f^{(k)}(n))$, $k \geqslant 1$,求 $f^{(100)}(1990)$.

(中国上海市高三数学竞赛,1990 年)

[解] 设 $\mu(n)$ 表示 $n$ 的各位数码之和.则

$$f(1990) = \mu(1990^2 + 1) = \mu(3960101) = 20.$$

$$f^{(2)}(1990) = f(20) = \mu(20^2 + 1) = \mu(401) = 5,$$

$$f^{(3)}(1990) = f(5) = \mu(5^2 + 1) = \mu(26) = 8,$$

$$f^{(4)}(1990) = f(8) = \mu(8^2 + 1) = \mu(65) = 11,$$

$$f^{(5)}(1990) = f(11) = \mu(11^2 + 1) = \mu(122) = 5.$$

从而当 $k \geqslant 1$ 时,

$$f^{(3k)}(1990)=8,$$
$$f^{(3k+1)}(1990)=11,$$
$$f^{(3k+2)}(1990)=5.$$

因为 $$100\equiv 1\pmod 3,$$
所以 $$f^{(100)}(1990)=11.$$

10·67　证明数列 $1\cdot 2\cdot 3,\ 2\cdot 3\cdot 4,\ 3\cdot 4\cdot 5,\ \cdots,\ n(n+1)(n+2),\ \cdots$ 的个位数周期性地重复出现.

（基辅数学奥林匹克,1982 年）

［证］　设 $b_k$ 是 $k(k+1)(k+2)$ 的个位数.

我们现在研究 $b_{k+10}$ 与 $b_k$ 的关系,即 $k(k+1)(k+2)$ 与 $(k+10)(k+11)(k+12)$ 的个位数的关系.由于

$$\begin{aligned}&(k+10)(k+11)(k+12)-k(k+1)(k+2)\\=&10(k+11)(k+12)+k(k+11)(k+12)-k(k+1)(k+2)\\=&10(k+11)(k+12)+k[10+(k+1)][10+(k+2)]-k(k+1)(k+2)\\=&10(k+11)(k+12)+100k+10k(k+1)+10k(k+2)+k(k+1)(k+2)-k(k+1)(k+2)\\=&10M.\end{aligned}$$

其中 $M$ 是整数.从而 $(k+10)(k+11)(k+12)$ 与 $k(k+1)(k+2)$ 的个位数相同.

即 $$b_{k+10}=b_k.$$

于是所给数列中的数的个位数以 10 为周期重复出现.

10·68　对于给定的正整数 $k$,定义 $f_1(k)$ 为 $k$ 的各位数码之和的平方,并令 $f_{n+1}(k)=f_1(f_n(k))$.求 $f_{1991}(2^{1990})$ 的值.

（第 31 届国际数学奥林匹克预选题,1990 年）

［解］　因为 $$2^{1990}<8^{700}<10^{700},$$
所以 $$f_1(2^{1990})\leqslant(700\cdot 9)^2=6300^2<5\cdot 10^7,$$
$$f_2(2^{1990})\leqslant(4+7\cdot 9)^2=67^2<70^2=4900,$$
$$f_3(2^{1990})\leqslant(4+8+9\cdot 2)^2=30^2.\qquad ①$$

由于一个正整数与它的各位数码之和对模 9 同余,我们考虑 $2^{1990}$ 对模 9 的余数.

$$\alpha^{2^2}+\alpha^{-2^2}=\alpha^4+\alpha^{-4}=(\alpha^2+\alpha^{-2})^2-2,$$

$$\alpha^{2^3}+\alpha^{-2^3}=\alpha^8+\alpha^{-8}=(\alpha^4+\alpha^{-4})^2-2,$$



一般地有 $\qquad \alpha^{2^n}+\alpha^{-2^n}=(\alpha^{2^{n-1}}+\alpha^{-2^{n-1}})^2-2.$

若 $k$ 为偶数,则 $\alpha^2+\alpha^{-2}$, $\alpha^{2^2}+\alpha^{-2^2}$, $\cdots$, $\alpha^{2^n}+\alpha^{-2^n}$ 都是偶数,所以它们的个位数字不可能为 7.

若 $k$ 的个位数字是 1,则 $\alpha^2+\alpha^{-2}$ 的个位数字为 9, $(\alpha^2+\alpha^{-2})^2$ 的个位数字为 1,于是 $\alpha^{2^2}+\alpha^{-2^2}$ 的个位数字又为 9,进而 $\alpha^{2^n}+\alpha^{-2^n}$ 的个位数字都为 9,所以 $k$ 的个位数字不是 1.

若 $k$ 的个位数字为 3,5,7 时,则易知当 $n>1$ 时,$\alpha^{2^n}+\alpha^{-2^n}$ 的个位数字总是 7.

所以,$k$ 的个位数字是 3,5,7.

10·70 设 $a_n$ 是 $1^2+2^2+\cdots+n^2$ 的个位数字, $n=1,2,3,\cdots$. 试证 $0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$ 是有理数.

(中国高中数学联赛,1984 年)

**[证 1]** 由于 $k^2$, $(k+10)^2$, $(k+20)^2$, $\cdots$, $(k+90)^2$ 具有相同的个位数字,所以这 10 个数字的和

$$k^2+(k+10)^2+(k+20)^2+\cdots+(k+90)^2$$

的个位数字为 0. 从而

$$\begin{aligned}a_{n+100}&=1^2+2^2+\cdots+(n+100)^2 \text{ 的个位数字}\\&=(1^2+2^2+\cdots+n^2)+[(n+1)^2+(n+11)^2+\cdots+(n+91)^2]+[(n+2)^2+(n+12)^2+\cdots+(n+92)^2]+\cdots+[(n+10)^2+(n+20)^2+\cdots+(n+100)^2] \text{ 的个位数字}\\&=(1^2+2^2+\cdots+n^2) \text{ 的个位数字}\\&=a_n.\end{aligned}$$

因此,$0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$ 是循环小数,即为有理数.

**[证 2]** 设 $b_n$ 是 $n^2$ 的个位数字,则数列 $\{b_n\}$ 为

1,4,9,6,5,6,9,4,1,0,1,4,9,6,5,6,9,4,1,0,$\cdots$

由于 $n^2$ 与 $(n+10)^2$ 的个位数字相同,即

$$b_n=b_{n+10}.$$

因为　$a_n=(b_1+b_2+\cdots+b_n)$的个位数字.

所以数列$\{a_n\}$的前20项为

$$1,5,4,0,5,1,0,4,5,5,6,0,9,5,0,6,5,9,0,0.$$

其中$a_{20}=0$,即$b_1+b_2+\cdots+b_{20}$的个位数字为0.

我们猜测$a_n=a_{n+20}$.事实上

$a_{n+20}=(b_1+b_2+\cdots+b_{n+20})$的个位数字

$=[(b_1+b_2+\cdots+b_{20})+(b_{21}+b_{22}+\cdots+b_{n+20})]$的个位数字

$=(b_{21}+b_{22}+\cdots+b_{n+20})$的个位数字

$=(b_{11}+b_{12}+\cdots+b_{n+10})$的个位数字

$=(b_1+b_2+\cdots+b_n)$的个位数字

$=a_n$.

因此,$0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$是循环节长为20的循环小数,从而它是有理数.

[证3]　由于数列$\{a_n\}$的前10项依次为

$$1,5,4,0,5,1,0,4,5,5.$$

而$(10+k)^2$的个位数字与$k^2$的个位数字相同,故从$a_{11}$至$a_{20}$就是把上述各项分别加5所得数的个位数字,由$a_{10}=5$得$a_{20}=0$,从而

$$a_{21}=a_1=1,\cdots,a_{30}=a_{10}=5.$$

接着$a_{31}=a_{21}+5$的个位数字,$\cdots$,$a_{40}=a_{30}+5$的个位数字.

依此类推,有　$a_{n+20}=a_n$.

即$0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$是循环节长为20的循环小数,从而它是有理数.

[证4]　数列$\{a_n\}$为

$$1,5,4,0,5,1,0,4,5,5,6,0,$$
$$9,5,0,6,5,9,0,0,1,5,4,0,\cdots$$

因此　$a_1=a_{21}$,　$a_2=a_{22}$.

我们用数学归纳法证明$a_n=a_{n+20}$.

$n=1$有　$a_1=a_{21}$.

假设$a_k=a_{k+20}$成立.因为

$$a_{k+1}=[a_k+(k+1)^2]\text{的个位数字},$$

$$a_{k+21}=[a_{k+20}+(k+21)^2]\text{的个位数字}.$$

而$(k+21)^2=(k+1+20)^2$与$(k+1)^2$的个位数字相同,所以

$$a_{k+21} = [a_{k+20} + (k+21)^2] \text{ 的个位数字}$$
$$= [a_k + (k+1)^2] \text{ 的个位数字}.$$



即 $$a_{k+21} = a_{k+1}.$$

于是 $n = k+1$ 时 $a_n = a_{n+20}$ 成立.

从而对一切自然数 $n$,有

$$a_{n+20} = a_n.$$

即 $0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$ 是循环小数,从而它是有理数.

10·71 已知 $k$ 和 $l$ 都是自然数.在形式 $36^k - 5^l$ 的数中求绝对值最小的数,并证明所求的数确实最小.

(第 8 届全苏数学奥林匹克,1974 年)

[解] 由于 $36^k$ 的个位数永远是 6,而 $5^l$ 的个位数永远是 5,则当 $36^k > 5^l$ 时,$|36^k - 5^l|$ 的个位数是 1,当 $36^k < 5^l$ 时,$|36^k - 5^l|$ 的个位数是 9.

先考虑 $|36^k - 5^l|$ 个位数是 1 的情形.

若 $36^k - 5^l = 1$,则

$$5^l = 36^k - 1 = (6^k+1)(6^k-1).$$

显然 $$5 \nmid 6^k + 1.$$

所以 $36^k - 5^l = 1$ 不成立.

若 $36^k - 5^l = 11$,这是可能的,此时 $k = 1$, $l = 2$.

再考虑 $|36^k - 5^l|$ 的个位数是 9 的情形.

若 $5^l - 36^k = 9$,则由 $3 \mid 9$, $3 \mid 36^k$, $3 \nmid 5$ 可知,这是不可能的.

因此,形如 $36^k - 5^l$ 的绝对值最小的数是

$$36 - 5^2 = 11.$$

10·72 证明在数 $2^n + 1974^n$ 和数 $1974^n$ 的 10 进制记法中,具有相同个数的数码(即它们有相同的位数).

(第 37 届莫斯科数学奥林匹克,1974 年)

[证] 因为 $$1974^n > 1000^n = 10^{3n},$$

所以在数 $1974^n$ 中,其数码的数目不小于 $3n$.

设 $1974^n$ 是 $k$ 位数,则 $k \geqslant 3n$.

假设 $1974^n + 2^n$ 的位数多于 $1974^n$ 中的位数,因此就有

$$1974^n + 2^n \geqslant 10^k > 1974^n.$$

不等式两边同除以 $2^n$ 得

$$987^n < 2^{k-n} \cdot 5^k \leqslant 987^n + 1.$$

因为区间$(987^n, 987^n + 1]$的长为 1，且 $2^{k-n} \cdot 5^k$ 为整数，则必有

$$2^{k-n} \cdot 5^k = 987^n + 1. \qquad ①$$

由 $k \geqslant 3n$ 知 $\qquad k - n \geqslant 2n.$

如果 $n \geqslant 2$，则 $\qquad k - n \geqslant 4.$

从而 $2^{k-n} \cdot 5^k$ 是 8 的倍数.

又 $\qquad 987^n + 1 \equiv 3^n + 1 \pmod 8.$

$$\equiv 2, 4 \pmod 8.$$

即 $987^n + 1$ 不是 8 的倍数.

所以等式 ① 不成立.

因此 $1974^n + 2^n$ 与 $1974^n$ 的位数相同.

10·73　对任意的正整数 $k$，令 $f_1(k)$ 定义为 $k$ 的各位数字的和的平方. 对于 $n \geqslant 2$，令 $f_n(k) = f_1(f_{n-1}(k))$. 求 $f_{1988}(11)$.

（第 6 届美国数学邀请赛，1988 年）

**[解]**　由定义可得

$$f_1(11) = (1+1)^2 = 2^2 = 4,$$
$$f_2(11) = f_1(4) = 4^2 = 16,$$
$$f_3(11) = f_1(f_2(11)) = f_1(16) = (1+6)^2 = 49,$$
$$f_4(11) = f_1(f_3(11)) = f_1(49) = (4+9)^2 = 169,$$
$$f_5(11) = f_1(f_4(11)) = f_1(169) = (1+6+9)^2 = 256,$$
$$f_6(11) = f_1(f_5(11)) = f_1(256) = (2+5+6)^2 = 169,$$
$$f_7(11) = f_1(f_6(11)) = f_1(169) = (1+6+9)^2 = 256.$$

由以上可以看出，对 $n \geqslant 4$，$f_n(11)$ 的值为 169 和 256 交替出现.

即 $n \geqslant 4$ 时，

$$f_n(11) = \begin{cases} 169, & n \text{ 为偶数时}, \\ 256, & n \text{ 为奇数时}. \end{cases}$$

于是 $f_{1988}(11) = 169$.

10·74　证明 $3^{1980} + 4^{1981}$ 能被 5 整除.

（中国北京市高中数学竞赛，1980 年）

**[证]**　因为$3^{1980} = 81^{495}$ 的个位数为 1，

$4^{1980}=16^{990}$ 的个位数是 6，

$4^{1981}=4\cdot 4^{1980}$ 的个位数是 4.

所以 $3^{1980}+4^{1981}$ 的个位数为 $1+4=5$.

因而 $3^{1980}+4^{1981}$ 能被 5 整除.

10·75 若 $n$ 为自然数，和数 $1981^n+1982^n+1983^n+1984^n$ 不能被 10 整除，那么，$n$ 必须满足什么条件?试说明理由.

（中国北京市初中二年级数学竞赛，1983 年）

**[解]** 由于 $a^n$ 的个位数循环出现的周期是 4，则可对 $n=4k+1$, $4k+2$, $4k+3$, $4k$ 分别讨论.

令 $$M=1981^n+1982^n+1983^n+1984^n.$$

当 $n=4k+1$（$k$ 为非负整数）时，$M$ 的个位数与 $1+2+3+4=10$ 的个位数相同，即 $M$ 的个位数是 0，因此 $10\mid M$.

当 $n=4k+2$（$k$ 为非负整数）时，$M$ 的个位数与 $1+4+9+6=20$ 的个位数相同，即 $M$ 的个位数是 0，因此 $10\mid M$.

当 $n=4k+3$（$k$ 为非负整数）时，$M$ 的个位数与 $1+8+7+4=20$ 的个位数相同，即 $M$ 的个位数是 0，因此 $10\mid M$.

当 $n=4k$（$k$ 为正整数）时，$M$ 的个位数与 $1+6+1+6=14$ 的个位数相同，即 $M$ 的个位数是 4，因此 $10\nmid M$.

因此，当且仅当 $n$ 是 4 的倍数时，$M$ 不能被 10 整除.

10·76 证明数 $43^{43}-17^{17}$ 能被 10 整除.

（基辅数学奥林匹克，1952 年）

**[证]** 我们求 $43^{43}$ 与 $17^{17}$ 的个位数.

$$43^{43}=(43^4)^{10}\cdot 43^3,$$
$$17^{17}=(17^4)^4\cdot 17.$$

于是 $43^{43}$ 与 $17^{17}$ 的个位数均为 7. 即

$$10\mid 43^{43}-17^{17}.$$

10·77 $1^2,2^2,3^2,\cdots,123456789^2$ 的和的个位数的数字是几?

（中国初中数学联赛，1990 年）

**[解]** 由于 $123456789=10\cdot 12345678+9$,

所以

$1^2+2^2+3^2+\cdots+123456789^2$ 的个位数

$=(1+4+9+6+5+6+9+4+1+0)\cdot 12345678+(1+4+$

$9+6+5+6+9+4+1)$ 的个位数

$= 5 \cdot 8 + 5$ 的个位数

$= 5.$

即所求的个位数是 5.

10·78　求具有以下性质的所有两位数 $M$:数 $M$ 的任意次幂的末两位数码与数 $M$ 的末两位数码相同.

（基辅数学奥林匹克,1961 年）

[解]　由于两数之积的末两位数码只与各因子的最后两位数码有关,所以,如果 $M^2$ 的末两位数码与 $M$ 的末两位数码相同,那么 $M$ 的任意次幂的末两位数码与 $M$ 的末两位数码相同.

于是,我们只要求出 $M^2$ 与 $M$ 的末两位数码相同的数 $M$ 即可.这等价于

$$100 \mid M^2 - M,$$

$$100 \mid M(M-1).$$

则有 $\begin{cases} 25 \mid M, \\ 4 \mid M-1. \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 25 \mid M-1, \\ 4 \mid M. \end{cases}$

于是只有两个数符合要求 $M = 25$ 或 $M = 76$.

10·79　若整数 $A$ 与整数 $B$ 的最后 $k$ 个数码是相同的.证明数 $A^n$ 与 $B^n$($n$ 为自然数)的最后 $k$ 个数码也是相同的.

（基辅数学奥林匹克,1940 年）

[证]　因为 $A$ 与 $B$ 的最后 $k$ 个数码相同,则有　$10^k \mid A - B$.

又
$$A^n - B^n = (A-B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + \cdots + B^{n-1}),$$

则
$$A - B \mid A^n - B^n.$$

于是
$$10^k \mid A^n - B^n.$$

即 $A^n$ 和 $B^n$ 的最后 $k$ 个数码是相同的.

10·80　欧拉的一个猜想在 1960 年被美国的数学家所推翻,他们证实了存在正整数 $n$,使得 $133^5 + 110^5 + 84^5 + 27^5 = n^5$.求 $n$ 的值.

（第 7 届美国数学邀请赛,1989 年）

[解]　显然,由

$$n^5 = 133^5 + 110^5 + 84^5 + 27^5 > 133^5,$$

得
$$n \geqslant 134.$$

下面求 $n$ 的上界.

$$\begin{aligned} n^5 &= 133^5 + 110^5 + 84^5 + 27^5 \\ &< 133^5 + 110^5 + (27 + 84)^5 \\ &< 3 \cdot 133^5 \\ &< \frac{3125}{1024} \cdot 133^5 \\ &= (\frac{5 \cdot 133}{4})^5 \\ &= (166\frac{1}{4})^5. \end{aligned}$$

所以 $$n \leqslant 166.$$

于是 $$134 \leqslant n \leqslant 166.$$

由于 $$10 \mid a^5 - a,$$

所以 $a^5$ 与 $a$ 的个位数相同.

于是 $n$ 的个位数与 $133 + 110 + 84 + 27$ 的个位数相同.

即 $n$ 的个位数是 4.

这就可以从 134,144,154,164 中寻找.

由于

$$\begin{aligned} 133 &\equiv 1 \pmod 3, \\ 110 &\equiv 2 \pmod 3, \\ 84 &\equiv 0 \pmod 3, \\ 27 &\equiv 0 \pmod 3, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} n^5 &= 133^5 + 110^5 + 84^5 + 27^5 \\ &\equiv 1^5 + 2^5 \equiv 0 \pmod 3. \end{aligned}$$

在 134,144,154,164 中,只有

$$144 \equiv 0 \pmod 3.$$

所以 $$n = 144.$$

10·81　求$[(\sqrt{29} + \sqrt{21})^{1984}]$的末两位数码.

（第 25 届国际数学奥林匹克候选题,1984 年）

**[解]**　令 $x = \sqrt{29} + \sqrt{21}$,　$y = \sqrt{29} - \sqrt{21}$,则

$$x^2 = 50 + 2\sqrt{609},$$
$$y^2 = 50 - 2\sqrt{609}.$$

设 $a = x^2$,　$b = y^2$,则有

$$a + b = 100,$$

$$ab = 64.$$

令 $S_0 = a^0 + b^0$, $S_n = a^n + b^n$,则有

$$S_n = (a+b)S_{n-1} - abS_{n-2}$$
$$= 100S_{n-1} - 64S_{n-2}.$$

因为 $S_n$ 是正整数,

所以 $S_n \equiv 36S_{n-2} \equiv 6^2 S_{n-2} \equiv 6^4 S_{n-4} \equiv \cdots$

$$\equiv 6^{992} S_{n-992} \pmod{100}.$$

即 $S_{992} \equiv 6^{992} S_0 = 2 \cdot 6^{992} \pmod{100}.$

因为 $6^4 \equiv 1296 \equiv -4 \pmod{100}$,

则 $S_{992} \equiv 2(-4)^{248} \equiv 2^{497} \equiv (2^{22})^{22} \cdot 2^{13}.$

由于 $2^{22} \equiv 2^2 \pmod{100}$,

则 $S_{992} \equiv (2^2)^{22} \cdot 2^{13} = 2^{44} \cdot 2^{13} \equiv (2^2)^2 \cdot 2^{13}$

$$\equiv 2^{17} \equiv 4096 \times 32 \equiv 72 \pmod{100}.$$

即 $S_{992}$ 的末两位数是 72.

由于 $0 < \sqrt{29} - \sqrt{21} < 1$,

所以 $0 < (\sqrt{29} - \sqrt{21})^{1984} < 1.$

$$[(\sqrt{29} + \sqrt{21})^{1984}] = S_{992} - 1.$$

其末两位数是 71.

**10·82** 数 $1978^n$ 与 $1978^m$ 的最后三位数相等.试求出正整数 $m$ 和 $n$,使得 $m+n$ 取最小值(这里 $n > m \geqslant 1$).

(第 20 届国际数学奥林匹克,1978 年)

**[解]** 因为 $1978^n$ 与 $1978^m (n > m \geqslant 1)$ 的最后三位数相同,所以

$$1978^n - 1978^m = 1978^m(1978^{n-m} - 1) \quad ①$$

是 $1000 = 2^3 \cdot 5^3$ 的倍数.

由于 $1978^{n-m} - 1$ 是奇数,它没有因子 2,所以由 ① 式,$1978^m$ 需能被 $2^3$ 整除.又由于 $1978^m = 2^m \cdot 989^m$,而 989 是奇数,所以 $m \geqslant 3$.

由于 $1978^m$ 没有因子 5,所以由 ① 式,$1978^{n-m} - 1$ 需能被 $5^3$ 整除.

注意到 $1978^t$,当 $t = 1,2,3,\cdots$ 时,它的个位数按 8,4,2,6,8,4,2,6,… 循环,于是只有 $n - m = 4k$ 时,$1978^{n-m} - 1$ 才可能被 $5^3$ 整除.

因为 $1978^{4k} = (2000 - 22)^{4k}$,

所以要使 $1978^{4k} - 1$ 能被 $5^3$ 整除,只需 $22^{4k} - 1$ 能被 $5^3$ 整除.而

$$22^{4k}=484^{2k}=(500-16)^{2k}.$$
$$16^{2k}=256^{k}=(250+6)^{k}.$$

于是,只需 $6^k-1$ 能被 $5^3$ 整除.

$$6^k-1=(6-1)(6^{k-1}+6^{k-2}+\cdots+6+1)$$
$$=5(6^{k-1}+6^{k-2}+\cdots+6+1).\qquad ②$$

因此,由 ② 式,$6^{k-1}+\cdots+6+1$ 需被 $5^2=25$ 整除.

由于 $6^t$ 被 5 除余 1,而 $6^{k-1}+\cdots+6+1$ 共有 $k$ 项,因此,$k$ 应是 5 的倍数,设 $k=5p$.

$$6^k-1=6^{5p}-1$$
$$=7776^p-1$$
$$=(7776-1)(7776^{p-1}+7776^{p-2}+\cdots+7776+1).$$

因为 $7776-1=7775=311\cdot 25$ 是 25 的倍数,而 7776 被 5 除余 1,因此,要使 $7776^{p-1}+\cdots+7776+1$ 能被 5 整除,$p$ 的最小值是 5,$4k$ 的最小值为 100,即 $n-m$ 的最小值是 100.

因为 $$n+m=(n-m)+2m,$$

所以当 $m$ 取最小值 3, $n-m$ 取最小值 100,此时 $n=103$ 时,$n+m$ 有最小值 106.

10·83　对于某些自然数 $n$,数 $2^n$ 和 $5^n$ 的首位数是相同的.试问,这样的首位数都有哪些?

(第 14 届全俄数学奥林匹克,1988 年)

[解]　由于 $2^5=32$, $5^5=3125$,因此,$2^n$ 和 $5^n$ 的首位数可以是 3.

下面我们证明,$2^n$ 和 $5^n$ 的首位数只能是 3.

假定 $2^n$ 和 $5^n$ 的首位数是 $a$.

并设 $2^n$ 为 $s+1$ 位数, $5^n$ 为 $t+1$ 位数,则

当 $n>3$ 时,

$$a\cdot 10^s<2^n<(a+1)\cdot 10^s,\qquad ①$$
$$a\cdot 10^t<5^n<(a+1)\cdot 10^t.\qquad ②$$

① × ② 得

$$a^2\cdot 10^{s+t}<10^n<(a+1)^2\cdot 10^{s+t},$$
$$a^2<10^{n-s-t}<(a+1)^2.\qquad ③$$

由于 $a\geqslant 1$, $a+1\leqslant 10$,则 ③ 式化为

$$1 \leqslant a^2 < 10^{n-s-t} < (a+1)^2 \leqslant 100.$$

于是仅有 $n-s-t=1$.

从而 $\begin{cases} a^2 < 10 \\ (a+1)^2 > 10. \end{cases}$

由此解得 $a=3$.

10·84　对每一个正整数 $n$,证明五个数 $17^n,17^{n+1},17^{n+2},17^{n+3}$ 与 $17^{n+4}$ 中至少有一个在十进制中首位数码为 1.

（加拿大数学奥林匹克训练题,1990 年）

[证]　注意到

$$17^2=289,\quad 17^3=4913,\quad 17^4=83521.$$

若 $17^n$, $17^{n+1}$, $17^{n+2}$, $17^{n+3}$,$17^{n+4}$ 中有一个的首位数码为 1,则本题得证.

若 $17^{n+4}$ 的首位数码为 2,则除以 17 后,首位数码为 1,即 $17^{n+3}$ 的首位数码为 1;

若 $17^{n+4}$ 的首位数码为 3,4,则除以 $17^2$ 后,首位数码为 1,即 $17^{n+2}$ 的首位数码为 1;

若 $17^{n+4}$ 的首位数码为 5,6,7,8,则除以 $17^3$ 后,首位数码为 1,即 $17^{n+1}$ 的首位数码为 1;

若 $17^{n+4}$ 的首位数码为 9,则除以 $17^4$ 后,首位数码为 1,即 $17^n$ 的首位数码为 1.

由以上,五个数 $17^n,17^{n+1},17^{n+2},17^{n+3},17^{n+4}$ 中至少有一个的首位数码为 1.

10·85　令 $T=\{9^k \mid k$ 为整数, $0 \leqslant k \leqslant 4000\}$,已知 $9^{4000}$ 有 3817 位数字,它的最左边的数字是 9,问 $T$ 中有多少个元素以 9 为最左边的数字?

（第 8 届美国数学邀请赛,1990 年）

[解]　首先证明,若 $9^t$ 的最左边数字是 9,则 $9^{t-1}$ 的最左边数字必定是 1.

否则,若 $9^{t-1}$ 的最左边数字是 2,3,4,5,6,7,8 时,显然 $9^{t-1}\cdot 9=9^t$ 的最左边数字是 1,2,3,4,5,6,7,8,而不可能是 9.

若 $9^{t-1}$ 的最左边数字是 9 时,则

$$9^{t-1} \leqslant \overline{999\cdots},$$

$$9^t = 9^{t-1} \cdot 9 \leqslant \overline{8991\cdots}.$$

其最左边的数字也不可能是 9.



同时,我们注意到,若 $9^{t-1}$ 的最左边数字是 2,3,4,5,6,7,8,9 时,把 $9^{t-1}$ 再乘以 9,最左边会出现进位,即 $9^t$ 比 $9^{t-1}$ 增加位数.

而 $9^{t-1}$ 的最左边数字是 1,$9^t$ 的最左边数字是 9 时,从 $9^{t-1}$ 到 $9^t$ 没有增加位数.

这就是说,从 $9^{t-1}$ 到 $9^t$,若 $9^t$ 最左边的数字是 9 时,就没有增加位数.

由于 $10^{4000}$ 有 4001 位,$9^{4000}$ 有 3817 位,所以在连续求 9 的幂时,有

$$4001 - 3817 = 184$$

次没有进位.

即 $T$ 有 184 个元素以 9 为最左边的数字.

**10·86**　试将 3,4,5,6,7,8,9 七个数字分成两组,分别排成一个三位数和一个四位数,并且使这两个数的乘积最大,问应如何分组排列,并证明你的结论.

(中国北京市初中三年级数学竞赛,1981 年)

**[解]**　在组成每一个数时,数值大的数码应排在最高位上.于是 9 与 8 应分别作为两个数的首位数码.

现由剩余数码中各选一数码分别添在 9 与 8 后面组成两个两位数,且使其乘积最大,显然应选 7 与 6.

由于 $96 \cdot 87 > 97 \cdot 86$,所以由两位数码组成的两位数中,96 与 87 的乘积最大.

由此,我们考虑一般情形:

设 $A$、$B$ 为自然数,$A > B$,现将数码 $c, d(c > d)$ 分别添在 $A, B$ 的后面组成新数,只有两组可能:

第一组:　$\overline{Ac} = 10A + c$,　$\overline{Bd} = 10B + d$.

第二组:　$\overline{Ad} = 10A + d$,　$\overline{Bc} = 10B + c$.

现在比较这两组新数乘积的大小:

$$\begin{aligned}&\overline{Ac} \cdot \overline{Bd} - \overline{Ad} \cdot \overline{Bc} \\ =\ &(10A + c)(10B + d) - (10A + d)(10B + c) \\ =\ &10(Ad + Bc - Ac - Bd) \\ =\ &10(A - B)(d - c) < 0.\end{aligned}$$

所以 $\overline{Ac}\cdot\overline{Bd}<\overline{Ad}\cdot\overline{Bc}$.

由此可知,把9,8,7,6四个数字分成两组,构成两个二位数时,第一组先取9,然后第二组取8,再使第一组取7与6中较小的数码6,第二组取7,这样所得的两个二位数的乘积96・87最大.

同样考虑9,8,7,6,5,4六个数码,把它们分成两组,构成两个三位数,则在第一组取96,第二组取87之后,接下去第一组取5与4中较小的数码4,第二组取5,这样所得的两个三位数的乘积964・875最大.

最后还剩一个数码3,不妨再添一个数码0,将3,0分别添在964与875的后面,根据上述结论,两数乘积最大的应是9640・8753.把末位数0去掉后,组成一个三位数和一个四位数,它们的乘积最大的是964・8753.

因此,将3,4,5,6,7,8,9七个数码分成两组,排成一个三位数964及一个四位数8753,乘积964・8753最大.

10・87 四个首位数字相同的三位数互不相等,且具有性质:它们的和能被它们中的三个数整除.求这四个数.

(第3届全苏数学奥林匹克,1969年)

[解] 设所求的四个数为 $x_1,x_2,x_3,x_4$,且

$$S=x_1+x_2+x_3+x_4.$$

并设 $a$ 为 $x_1,x_2,x_3,x_4$ 的首位数字,则

$$100a\leqslant x_i<100(a+1),\quad (i=1,2,3,4).$$

于是有

$$300a\leqslant S-x_i<300(a+1),$$

$$x_i+300a\leqslant S<x_i+300(a+1),$$

$$1+\frac{300a}{x_i}\leqslant\frac{S}{x_i}<1+\frac{300(a+1)}{x_i},$$

从而有

$$1+\frac{3a}{a+1}<\frac{S}{x_i}<4+\frac{3}{a}.$$

其中 $i\in\{1,2,3,4\}$.

当 $a=1$ 时, $2.5<\frac{S}{x_i}<7$.

当 $a\geqslant2$ 时, $3<\frac{S}{x_i}<5.5$.

因为在四个商 $\frac{S}{x_1},\frac{S}{x_2},\frac{S}{x_3},\frac{S}{x_4}$ 中有三个是整数,且不相同,则 $a\geqslant2$

时不可能,这是因为在区间(3,5.5)中只有两个整数.

于是
$$a=1.$$

此时$\frac{S}{x_i}$的整数值可能为3,4,5,6.

由于100至199的任何两个三位数之比小于2,因此$\frac{S}{x_i}$等于3和6不可能同时出现.

又因为$\frac{S}{x_i}$中有三个整数,所以$\frac{S}{x_i}$为整数的可能性只有
$$\{3,4,5\}\text{ 或 }\{4,5,6\}.$$

若 $\frac{S}{x_i}\in\{3,4,5\}$,则有
$$S=3x_i,\quad S=4x_j,\quad S=5x_k,$$
且 $x_i,x_j,x_k$ 两两不等, $i,j,k\in\{1,2,3,4\}$,因而
$$S=60k.$$

这时所求的四个数应为 $12k,\ 15k,\ 20k,\ 13k$.

为使 $12k,15k,20k,13k$ 成为首位数字为1的三位数,则 $k=9$,此时四个数为 108, 135, 180, 117.

若$\frac{S}{x_i}\in\{4,5,6\}$,则有
$$S=4x_i,\quad S=5x_j,\quad S=6x_k.$$
且 $x_i,x_j,x_k$ 两两不等, $i,j,k\in\{1,2,3,4\}$,因而
$$S=60k.$$

这时所求的四个数为
$$15k,12k,10k,23k.$$

由于 $\frac{23k}{10k}>2$,所以这样的四个数不可能.

于是所求的四个数为108,135,180,117.

10·88 是否有某个自然数的平方数是以1983个9开头的?

(第46届莫斯科数学奥林匹克,1983年)

[解] 设 $N=\underbrace{999\cdots9}_{1983个}5$,则
$$N^2=\underbrace{999\cdots9}_{1983个}5^2=(10^{1984}-5)^2$$

$$= 10^{2\cdot 1984} - 10\cdot 10^{1984} + 25$$

$$= \underbrace{99\cdots9}_{1983个}\underbrace{00\cdots0}_{1983个}25.$$

因此 $N$ 就是符合题设要求的数.

10·89　证明存在着自然数 $k$,使得 $k!$ 以 1966 开头.

（第 29 届莫斯科数学奥林匹克,1966 年）

［证］　设 $k = 100001\cdot 10^r + x$,

$$(k-1)! = y\cdot 10^s + z,$$

其中 $x < 10^r$,　$z < 10^s$,　$y$ 为 6 位数,则

$$\begin{aligned} k! &= (100001\cdot 10^r + x)(y\cdot 10^s + z)\\ &< (100001\cdot 10^r + 10^r)(y\cdot 10^s + 10^s)\\ &< (10^{r+5} + 10^{r+1})\cdot(y+1)\cdot 10^s\\ &= (y+1)\cdot 10^{r+s+5} + (y+1)\cdot 10^{r+s+1}\\ &\leqslant (y+1)\cdot 10^{r+s+5} + 10^6\cdot 10^{r+s+1}\\ &= (y+100)\cdot 10^{r+s+5} + 10^{r+s+5}. \end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned} k! &= (100001\cdot 10^r + x)(y\cdot 10^s + z)\\ &\geqslant (10^{r+5} + 10^r)(y\cdot 10^s)\\ &= y\cdot 10^{r+s+5} + y\cdot 10^{r+s}\\ &\geqslant y\cdot 10^{r+s+5} + 10^5\cdot 10^{r+s}\\ &= (y+1)\cdot 10^{r+s+5}. \end{aligned}$$

即有

$$(y+1)\cdot 10^{r+s+5} \leqslant k! \leqslant (y+100)\cdot 10^{r+s+5} + 10^{r+s+5}.$$

因此,$k!$ 是 $r+s+11$ 位数或 $r+s+22$ 位数.

若 $k!$ 是 $r+s+12$ 位数,则其前 4 位数必为 1000,若 $k!$ 是 $r+s+11$ 位数,则其前 6 位数介于 $y+1$ 与 $y+100$ 之间,前 4 位数与 $y$ 的前 4 位数相同或比 $y$ 的前 4 位数大 1.

取 $r\geqslant 6$,　$x = 0,1,2,\cdots,10^6-1$,则相应的 $10^6$ 个 $k!$ 的前 4 位数遍历所有 4 位数,因此存在某一 $k$,使 $k!$ 的前 4 位数是 1966.

10·90　证明如果正整数 $k$ 能被数 10101010101 整除,则它在十进制记数法中至少有 6 个非零数码.

（第 33 届莫斯科数学奥林匹克,1970 年）

［证］　设 $A = 10101010101$,且 $k = AB$.

则 $A$ 有 6 个非零数码.

若 $k \leqslant 10^{12}$,则 $$B \leqslant 99.$$

此时 $k$ 为 $A$ 与一个一位数或两位数的乘积,显然至少有 6 个非零数码.

若 $k > 10^{12}$. 设 $k$ 是 $m+12$ 位数,且首位数码是 $a$,则考虑数

$$k' = k - (a \cdot 10^{12} - a) \cdot 10^m.$$

由于 $$10^{12} - 1 = 10101010101 \cdot 99 = 99A,$$

所以 $k'$ 也是 $A$ 的倍数,而且 $k'$ 中的非零数码的个数不多于 $k$ 中的非零数码的个数.

重复上述过程,必可得到某一个数不大于 $10^{12}$,其非零数码的个数不少于 6 个.

因此,$k$ 的非零数码的个数至少有 6 个.

10·91　两个人做如下游戏:第一个人先报一个数字,第二个人根据自己的判断用这个数字去代替下式中的某个小星星:

$$\begin{array}{r} ※※※※ \\ -\ ※※※※ \\ \hline \end{array}$$

然后第一个人再报一个数字,依此类推,共进行 8 次,直到上式中所有的小星星变成数为止.报数字的那个人力求得到的差尽可能地大,而第二个人则希望差尽可能地小.

证明(1) 不管第一个人报什么数字,第二个人总能安排数使得到的差不超过 4000.

(2) 不管第二个人把数字放在什么位置上,第一个人总可以这么报数字,使得到的差不小于 4000.

(第 6 届全苏数学奥林匹克,1972 年)

[证]　我们用 $r_1, r_2, r_3, r_4$ 来表示从左到右的四个数位.

游戏分为两个阶段:"开局" 和"残局".

当第二个人把某一数字放入第一数位 $r_1$ 时,则"残局" 开始.

显然,在开局中第一个人不应说出小数(0,1,2,3) 或大数(6,7,8,9),因为这时第二个人在把这样的数字放入第一数位 $r_1$ 时(小数放在第一数位上面,大数放在下面),便转入显然对第二个人有利的"残局":这时,若第一数位上的两数之差不大于 3,则该差不大于 3999. 但是,若

第一个人说出第一个数 4(或 5)，则第二个人以 $r_1=\begin{pmatrix}4\\ ※\end{pmatrix}$或 $r_1=\begin{pmatrix}※\\ 5\end{pmatrix}$立即转入“残局”时，第一个要想得到不小于 4000 的差，就只能报 0(对应的是 9) 使之放在 $r_2,r_3,r_4$ 数位上，直到填满为止，自然地，第二个人要把使得到的差不超过 3999 的数字放到 $r_1$ 的星号中，因此，第一个人不会得到比 $\begin{array}{r}4000\\ -0000\\ \hline\end{array}$ $\left(\begin{array}{r}9999\\ -5999\\ \hline\end{array}\right)$更好的结果.

这就证明了(1) 中第二个人的策略，他总能按排数不超过 4000.

但是，当第二个人在开局中将某些数字 4 和 5 放入数位 $r_2,r_3,r_4$，并且要在对自己有利的情况下转入“残局”时，第二个人能否得到更好的结果呢?为了阻止第二个人成功，第一个人应该注意有最小 $i$ 的数位 $r_i$.

如果 $r_i$ 等于$\begin{pmatrix}※\\ 4\end{pmatrix}$或$\begin{pmatrix}※\\ 5\end{pmatrix}$，第一个人应该报数字 5，如果 $r_i$ 等于$\begin{pmatrix}4\\ ※\end{pmatrix}$或$\begin{pmatrix}5\\ ※\end{pmatrix}$，第一个人应该报数字 4(如果所有数位都相同或者 $r_i=\begin{pmatrix}5\\ 4\end{pmatrix}$，则可以报任何数字，比如报 5，而当第一个人采取这种策略时不可能出现 $r_i=\begin{pmatrix}4\\ 5\end{pmatrix}$这种危险的情形). 在这种开局转入“残局”之后，如果第二个人把数字放在 $r_1$ 中上面那个位置，那么第一个人可能报 0;如果相反，则第一个人可能报 9，这时就会使得到的差不小于 4000，即证明了(2) 中第一个人的策略.

10·92　证明如果 $n$ 是正奇数，那么数 $2^{2n}(2^{2n+1}-1)$ 在十进制中的最后两位数是 28.

(荷兰数学竞赛，1983 年)

[证]　设 $n=2m+1,\quad m=0,1,2,\cdots$，则

$$\begin{aligned}&2^{2n}(2^{2n+1}-1)-28\\ =&2^{4m+2}(2^{4m+3}-1)-28\\ =&4(2^{8m+3}-2^{4m}-7).\\ =&4(2^{4m}-1)(8\cdot 2^{4m}+7)\end{aligned}$$

$= 4(16^m - 1)[8(16^m - 1) + 15]$

由于 $15 \mid 16^m - 1$,

则 $15 \mid 8(16^m - 1) + 15.$

$4 \cdot 15 \cdot 15 = 900 \mid 2^{2n}(2^{2n+1} - 1) - 28.$

从而 $100 \mid 2^{2n}(2^{2n+1} - 1) - 28.$

于是 $2^{2n}(2^{2n+1} - 1)$ 的最后两位数是 28.

10·93 把一个17位数的所有数码按相反次序写出而得到一个新数,再把这个数与原数相加.证明所得和中至少有一个数码是偶数.

(第4届全苏数学奥林匹克,1970年)

[证] 假设结论不成立,即这两个数相加所得的和中每一位数码都是奇数.

我们把两个数中的一个写在另一个下面,并把数位对齐,再把它们相应的数位上的数码加起来.

因为和的最后一位数码是奇数,所以,把首位数码相加时也得到奇数.因此,在相加时,不能向这一位进1,这说明在第二位上的数字之和小于10,因此在倒数第二位上的数码之和也小于10.

同样从倒数第二位也不能向倒数第三位进1,否则仅当倒数第二位数码和是9时,才有这种可能,这时又必须倒数第一位的数码和大于10,当向倒数第二位进1时,第二位是0,而0是偶数.

现在将已知数的前面两个数码和最后两个数码去掉,得到一个13位数,再做类似的推理,得到9位数、5位数,由于以上推理,不能从和的中间一位的前一位向这一位进1,又因为中间一位的两个加数的数码是相同的;所以这两个数的和的中间数码必定是偶数.

10·94 是否存在能被 $\underbrace{11\cdots1}_{m个1}$ 整除且数码之和小于 $m$ 的自然数?

(第16届全苏数学奥林匹克,1982年)

[解] 不存在.

假设存在这样的自然数,且设

$$p = a_0 10^r + a_1 10^{r-1} + \cdots + a_r$$

是能被 $M = \underbrace{11\cdots1}_{m个1}$ 整除的,且所有数码之和小于 $m$ 的最小的数.则 $r \geqslant m$.

显然 $M \mid 10^r - 10^{r-m}.$

因而 $$M \mid p-(10^r-10^{r-m}).$$

然而 $p_1=p-(10^r-10^{r-m})$ 小于 $p$，并且它的数码之和不超过 $p$ 的数码之和，与 $p$ 最小矛盾.

因此，题目要求的自然数不存在.

10·95　迈克斯用正整数 $q$ 去除正整数 $p$，其中 $q\leqslant 100$，在商数 $\frac{p}{q}$ 的十进制小数展开中，迈克斯发现在小数点之后的某个地方有 1982 这一串数码. 请证明迈克斯的除法做错了.

（前联邦德国数学竞赛，1982 年）

［证］　问题等价于

$$\frac{p}{q}=A+0.a_1a_2\cdots a_n1982\cdots \qquad ①$$

不可能成立. 其中 $A$ 是非负整数，$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 $0,1,2,\cdots,9$ 中的某个数.

假定 ① 式能够成立，在 ① 式两端同乘以 $10^n$ 得

$$10^n\frac{p}{q}=10^nA+\overline{a_1a_2\cdots a_n}+0.1982\cdots$$

设 $r$ 表示 $q$ 除 $10^np$ 所得的余数，于是

$$\frac{r}{q}=0.1982\cdots.$$

从而 $$\frac{1}{6}<\frac{r}{q}<\frac{1}{5}.$$

$$6r>q>5r.$$

因此 $q=5r+s$，其中 $s=1,2,\cdots,r-1$.

考察 $\frac{s}{5q}$.

$$\frac{s}{5q}=\frac{q-5r}{5q}=\frac{1}{5}-\frac{r}{q}=0.2-0.1982\cdots\leqslant 0.0018.$$

另一方面 $$\frac{s}{5q}\geqslant\frac{1}{5\cdot 100}=0.002.$$

出现矛盾.

所以 ① 式不可能成立.

10·96　(1) 任一重排某一自然数的所有数码. 证明所得的数与原数之和不等于 $\underbrace{999\cdots9}_{1967个}$.

(2) 重排某一数的所有数码，并把所得的数与原数相加．证明如果这个和等于 $10^{10}$，那么原数能被 10 整除．



（第 1 届全苏数学奥林匹克，1967 年）

**[证]** (1) 考虑数 $a$ 以及对 $a$ 重排的数 $b$ 的各位数码之和，并记数 $x$ 的各位数字之和为 $S(x)$．

如果 $a$ 与 $b$ 之和等于 $\underbrace{999\cdots9}_{1967个}$，则说明这两个数相加时，没有发生进位现象．因此必有

$$S(a+b)=S(a)+S(b).$$

由于 $a$ 和 $b$ 这两个数是其中一个数的各位数码重排而得到另一个数，这样又必有

$$S(a)=S(b).$$

于是 $\quad S(a+b)=2S(a)$ 是偶数．

而 $S(\underbrace{999\cdots9}_{1967个})=9\cdot1967$ 是奇数．

出现矛盾．因此 $a$ 与 $b$ 的和不等于 $\underbrace{999\cdots9}_{1967个}$．

(2) 仍然考虑各位数字的和．

设把 $a$ 的各位数字重新排列得到数 $b$，由(1) 知 $\quad S(a)=S(b)$．

假设原数不能被 10 整除，则这个数的个位不是 0，由于 $a$ 和 $b$ 的和等于 $10^{10}$，则 $a$ 与 $b$ 的个位数之和等于 10，而其余各位(9 个数位)上的数码之和都等于 9，由此得

$$2S(a)=9\cdot9+10=91.$$

这是不可能的．

因此原数的个位一定是 0，即原数能被 10 整除．

10·97 根据给定的自然数 $a_0$，可按照如下法则依次构造出数 $a_n, n=1,2,\cdots$：如果 $a_{n-1}$ 的最末一位数不超过 5，则将其划去，由此得到 $a_n$(这时可能什么也没剩下，那么造数过程即告结束)，否则，则令

$$a_n=9a_{n-1}.$$

试问由此所构造的数列 $\{a_n\}$ 可否为无穷数列？

（第 25 届全苏数学奥林匹克，1991 年）

**[解]** 我们证明：由此所构造的数列 $\{a_n\}$ 不可能是无穷数列．

如果整数 $a_{n-1}$ 的最末一位数字 $\alpha$ 不超过 5，那么就有

$$10a_n = a_{n-1} - \alpha \leqslant a_{n-1}.$$

如果 $a_{n-1}$ 的最末一位数字 $\alpha$ 超过 5，那么由于

$$a_n = 10a_{n-1} - a_{n-1}$$

可知，$a_n$ 的最末一位数字不超过 5，从而就有

$$10a_{n+1} \leqslant a_n = 9a_{n-1} < 10a_{n-1}.$$

$$a_{n+1} < a_{n-1}.$$

于是，不论怎样，或有 $a_n < a_{n-1}$，或有 $a_{n+1} < a_{n-1}$.

因此，如果数列 $\{a_n\}$ 是无穷数列，那么就可以从中挑出一个无穷的递减的无穷自然数数列，但这显然是不可能的，所以 $\{a_n\}$ 不可能是无穷数列.

**10·98** 如果一个正整数的十进表示是由一个不从 0 开始的数字块及紧接在它后面的一个完全相同的块组成，则称这个数为"复式数". 例如，360360 是"复式数"，36036 不是"复式数". 证明有无穷多个"复式数"是完全平方数.

（第 29 届国际数学奥林匹克预选题，1988 年）

**［证］** 由于 $10^3 + 1 = 1001$ 能被 7 整除，

$$10^3 = -1 + 7 \cdot 143,$$

所以
$$10^{21} = (-1 + 7 \cdot 143)^7 \equiv -1 \pmod{49}.$$

因此，当 $n$ 为奇数时，

$$10^{21n} \equiv -1 \pmod{49}.$$

则 $N = \dfrac{9(10^{21n} + 1)}{49}$（$n$ 为奇数）是一个有 $21n$ 位数字的整数.

又 $N(10^{21n} + 1)$ 是"复式数"，则

$$\begin{aligned} N(10^{21n} + 1) &= \frac{9(10^{21n} + 1)}{49}(10^{21n} + 1) \\ &= \left[\frac{3(10^{21n} + 1)}{7}\right]^2 \end{aligned}$$

是一个完全平方数.

由于奇数 $n = 1,3,5,\cdots$ 有无穷多个，所以有无穷多个"复式数"是完全平方数.

**10·99** 考虑由数码 1,2,3,4,5 所组成的所有没有重复数码的五位数. 证明可以把所有这些数分为两组，使得两组数的平方和相等.

(第 23 届全苏数学奥林匹克,1989 年)

[证] 由 1,2,3,4,5 组成没有重复数码的五位数共有 $P_5^5 = 5! = 120$ 个.



首先把 120 个五位数分成 24 组,每组有五个数,并且同一组的五个数是形如下面的"循环"数:

$$\{\overline{abcde},\quad \overline{bcdea},\quad \overline{cdeab},\quad \overline{deabc},\quad \overline{eabcd}\}.$$

每一组这样的"循环"数又对应一组"反序"数

$$\{\overline{edcba},\quad \overline{aedcb},\quad \overline{baedc},\quad \overline{cbaed},\quad \overline{dcbae}\}.$$

可以验证,互为反序的这五个数的平方和相等.

于是,只要把互为"反序"的两组数分归到不同的两组就可以得到所要求的分法.

10·100 把至多 $n$ 个($n > 2$)数码(十进制记数法)的一切自然数分为两组:数码和为奇数的是第一组,数码和为偶数的为第二组.

证明如果 $1 \leqslant k < n$,那么第一组中所有数的 $k$ 次幂之和等于第二组中所有数的 $k$ 次幂之和.

(第 4 届全苏数学奥林匹克,1970 年)

[证] 设 $D_1$ 为 10 个数码构成的集合,$A_1$ 为偶数码的集合,$B_1$ 为奇数码的集合,即

$$D_1 = \{0,1,2,\cdots,9\},$$
$$A_1 = \{0,2,4,6,8\},$$
$$B_1 = \{1,3,5,7,9\}.$$

一般地,对于任意的 $n$,用 $D_n$ 表示不多于 $n$ 位的所有数的集合. $A_n$ 和 $B_n$ 分别表示由 $D_n$ 中数码和为偶数与数码和为奇数的数所构成的子集($D_n = A_n \cup B_n$).

如果把 0 也计算在内,$A_n$ 和 $B_n$ 各含有 $5 \cdot 10^{n-1}$ 个元素.

我们把集合 $X$ 的所有元素 $x$ 之和记为 $\sum\limits_{x \in X} x$.

我们的问题是证明

$$\sum_{a \in A_n} a^k = \sum_{b \in B_n} b^k,$$

并把这个和记为 $S_n^{(k)}$.

当 $n=2$, $k=1$ 时,问题归结为显然的等式

$$\sum(10a+p)+\sum(10b+q)=\sum(10a+q)+\sum(10b+p).$$

其中 $a\in A_1$, $p\in A_1$, $b\in B_1$, $q\in B_1$.

当 $d\in D_1$, $r\in D_1$ 时,上面等式的两边都等于

$$5\left(\sum 10d+\sum r\right), S_2^{(1)}=5(10+1)(1+2+\cdots+9).$$

这是因为每个数字 $a,b,p,q$ 进入两边的和各5次.

对于 $n=3$,对于一切 $a\in A_2$, $p\in A_1$, $b\in B_2$, $q\in B_1$, $d\in D_2$, $r\in D_1$,有

$$\begin{aligned}&\sum(10a+p)^2+\sum(10b+q)^2\\&=50\cdot10^2\left(\sum a^2+\sum b^2\right)+2\cdot10\left(\sum ap+\sum bq\right)+50\sum p^2\\&\quad+50\sum q^2\\&=50\cdot10^2\sum d^2+2\cdot10\left(\sum a\cdot\sum p+\sum b\sum q\right)+50\sum r^2\\&=5\cdot10^3\sum d^2+20\sum rS_2^{(1)}+50\sum r^2\end{aligned}$$

同样也能求出 $\sum(10a+q)^2+\sum(10b+p)^2$ 为相同的结果.

下面用对 $n$ 的数学归纳法来证明一般的结论.这里将利用公式

$$\begin{aligned}(x+y)^k&=x^k+C_k^1x^{k-1}y+C_k^2x^{k-2}y^2+\cdots+C_k^{k-1}xy^{k-1}+y^k\\&=x^k+\sum C_k^jx^{k-j}y^j+y^k.\end{aligned}$$

(二项式系数 $C_k^j$, $1\leqslant j\leqslant k-1$,在我们的推理中不起作用)以及公式

$$\sum uv=\sum u\cdot\sum v(\text{关于一切 } u\in U, v\in V \text{ 的和}).$$

假设对于 $n$ 位数和任意的 $k$, $1\leqslant k<n$,所需等式已得证,即

$$\sum_{a\in A_n}a^j=\sum_{b\in B_n}q^j=S_n^{(j)}.$$

下面求 $A_{n+1}$ 中数的 $k$ 次幂之和, $k<n+1$.

其中 $a\in A_n$, $p\in A_1$, $b\in B_n$, $q\in B_1$, $d\in D_n$, $r\in D_1$, $1\leqslant j\leqslant k-1$.

$$\sum(10a+p)^k+\sum(10b+q)^k$$

$$= 5\cdot 10^k\left(\sum a^k+\sum b^k\right)+\sum C_k^j 10^{k-j}\left(\sum a^{k-j}p^j+\sum b^{k-j}q^j\right)$$
$$+5\cdot 10^{n-1}\left(\sum p^k+\sum q^k\right)$$



$$= 5\cdot 10^{n-1}\sum d^k+\sum_j C_k^j 10^{k-j}S_k^{(k-j)}\sum d^j+5\cdot 10^{n-1}\sum r^k.$$

显然,改变 $p$ 和 $q$ 的位置即得 $B_{n+1}$ 中数的 $k$ 次幂之和,也等于同一个表达式.

因而对 $n+1$,结论成立.

10·101　求证对于每一个大于1的整数 $k$,必存在一个小于 $k^4$ 的倍数,在十进制中,它最多含有4个不同的数码(每个数码可以重复使用).

(第31届国际数学奥林匹克预选题,1990年)

[证]　对每一个大于1的整数 $k$,设正整数 $n$ 满足 $2^{n-1}\leqslant k<2^n$.

设 $A_n$ 是由数码0,1组成的至多为 $n$ 位数的整数集合.

记 $|A_n|$ 为集合 $A_n$ 中元素的个数,则

$$|A_n|=2^n.$$

$$\max A_n=\frac{1}{9}(10^n-1).$$

因为 $2^n>k$,所以,在 $A_n$ 中必定有两个不同的元素 $x,y$ 除以 $k$ 时余数相同,从而

$$k\mid p=|x-y|.$$

由于 $x$ 和 $y$ 都是由0和1组成,则 $p$ 的数码只能出现0,1,8,9这四种可能($1-0=1$,　$1-1=0$,　$0-0=0$,　$|0-0|=9$,　$100-11=89$ 等等).

于是 $p$ 至多含有4个不同的数码,下面只需证明 $p$ 是小于 $k^4$ 的数即可.

$$\begin{aligned} p\leqslant \max A_n &=\frac{1}{9}(10^n-1)\\ &<\frac{10}{9}\cdot 10^{\log_2 k}=\frac{10}{9}\cdot k^{\log_2 10}\\ &<\frac{16}{10}k^{\log_2 10}=2^{4-\log_2 10}\cdot k^{\log_2 10}\\ &\leqslant k^{4-\log_2 10}\cdot k^{\log_2 10}=k^4.\end{aligned}$$

于是 $p$ 是$k$ 的倍数，且小于 $k^4$，它至多有4个不同的数码0,1,8,9.

10·102　自然数 $k$ 具有性质：如果 $n$ 能被$k$ 整除，那么，由 $n$ 的数字按相反次序写成的数也能被 $k$ 整除. 证明 $k$ 是99的因数.

（第1届全苏数学奥林匹克，1967年
第30届莫斯科数学奥林匹克，1967年）

**［证］**　首先可以证明 $k$ 与10互素.

这是因为，存在能被 $k$ 整除且首位数码为1的数，由题设，把这个数的数码按相反次序写成的数也能被 $k$ 整除，此时它的个位是1，显然不能被2和5整除.

于是
$$(k,10)=1.$$

现在我们取从500开始的，并且能被 $k$ 整除的数
$$n=\overline{500abc\cdots z}.$$
$$a,b,c,\cdots,z\in\{0,1,2,\cdots,9\}.$$

由题设，把 $n$ 的数字按相反次序写成的数
$$n_1=\overline{z\cdots cba005}$$
也能被 $k$ 整除.

于是
$$n_2=\overline{z\cdots cba00500000\cdots0}$$
也定能被 $k$ 整除.

作和 $n_2+n$，则有
$$\begin{array}{rr} & \overline{z\cdots cba005000000\cdots0}\\ +) & \overline{500abc\cdots z}\\ \hline n_3= & \overline{z\cdots cba01000abc\cdots z}\end{array}$$

这个数也能被 $k$ 整除，

把 $n_3$ 的数字按相反次序写成
$$n_4=\overline{z\cdots cba00010abc\cdots z}.$$
$n_4$ 能被 $k$ 整除.

作差
$$\begin{array}{rr} & n_3-n_4\\ & \overline{z\cdots cba01000abc\cdots z}\\ -) & \overline{z\cdots cba00010abc\cdots z}\\ \hline & 990000\cdots0.\end{array}$$

于是
$$k\mid 9900\cdots0.$$

即 $$k \mid 99 \cdot 10^t.$$

又因为 $$(k,10)=1,$$

所以 $$k \mid 99.$$



10·103　考察各位数码都不为零的可被 101 整除的 64 位数的全体,试问,它们的总个数是否为偶数个?

(第 47 届莫斯科数学奥林匹克,1984 年)

[解]　记 $A=\underbrace{111\cdots110}_{64位}$,则

$$A=101\cdot10^{61}+101\cdot10^{58}+\cdots+101\cdot10.$$

于是 $A$ 能被 101 整除.

引入一个"数码" ※(※ = 10).

设 $\alpha=\overline{a_1a_2\cdots a_{64}}$ 是满足条件的 64 位数,即 $a_i\neq0(i=1,2,\cdots,64)$,且 $\alpha$ 能被 101 整除.

我们考虑 $\alpha$ 的"对偶数"$\beta$.

$$\beta=\overline{(※-a_1)(※-a_2)\cdots(※-a_{64})}.$$

则 $$\alpha+\beta=\underbrace{11\cdots110}_{65位}=10A.$$

由于 $10A$ 与 $\alpha$ 都能被 101 整除,则 $\beta$ 也能被 101 整除,且 $\beta$ 的各位数字不为 0.

因而 $\beta$ 也是符合条件的 64 位数.

于是 $\alpha$ 与 $\beta$ 是成对出现的.

当 $\alpha=\beta$ 时,有 $$a_i=※-a_i\quad(i=1,2,\cdots,64).$$

则 $$a_i=5\qquad(i=1,2,\cdots,64).$$

于是 $$\alpha=\beta=\underbrace{555\cdots55}_{64位}.$$

这样一来,符合条件的64位数,除555…55之外其余都是成对出现的,因此它们的总数目是奇数而不是偶数.

10·104　证明对任何奇数都可找到它的一个倍数,使这个倍数的十进制表示中的各位数码都是奇数.

(第 53 届莫斯科数学奥林匹克,1990 年)

[证]　设 $m$ 为任意奇数.

下面对 $m$ 分三种情况讨论：

(1) 若 $5 \nmid m$，则在数列 $1,11,111,\cdots,\underbrace{11\cdots1}_{n个1},\cdots$ 中，一定有两项对 $m$ 同余，从而这两项的差

$$\underbrace{11\cdots1}_{n_1个1}\underbrace{00\cdots0}_{n_2个0}=\underbrace{11\cdots1}_{n_1个1}\cdot 10^{n_2}$$

是 $m$ 的倍数.

由于 $m$ 是奇数，且 $5 \nmid m$，则 $(m,10^{n_2})=1$，

于是 $\underbrace{11\cdots1}_{n_1个1}$ 是 $m$ 的倍数，它的各位数码都是奇数 1.

(2) 若 $m=5^n$， $n\in N$.

我们用数学归纳法证明：存在一个 $n$ 位数，是 $5^n$ 的倍数，且它的各位数码都是奇数.

当 $n=1$ 时，$m=5$，结论成立.

假设当 $n=k$ 时，$\overline{a_ka_{k-1}\cdots a_2a_1}$ 是满足条件的 $k$ 位数

我们证明：存在某个 $a_{k+1}\in\{1,3,5,7,9\}$，使得 $k+1$ 位数

$$\overline{a_{k+1}a_k\cdots a_1}=a_{k+1}\cdot 10^k+\overline{a_k\cdots a_1}$$

为 $5^{k+1}$ 的倍数.

由于 $\overline{a_ka_{k-1}\cdots a_1}$ 是 $5^k$ 的倍数(设为 $l$ 倍)，则

$$a_{k+1}\cdot 10^k+\overline{a_k\cdots a_1}=5^k(a_{k+1}\cdot 2^k+l).$$

可以证明对奇数 $l$ 和正整数 $k$，一定有一个数 $a_{k+1}\cdot 2^k+l$ 是 5 的倍数.

从而 $\overline{a_{k+1}a_k\cdots a_1}$ 是 $5^{k+1}$ 的倍数.

(3) 若 $m=5^l\cdot k$，其中 $l,k\in N$，且 $5\nmid k$.

我们可以先找出 $5^l$ 的一个倍数 $\overline{a_la_{l-1}\cdots a_1}$. 它的各位数码都是奇数.

然后，利用(1)中类似的办法，证明在数列

$$\overline{a_la_{l-1}\cdots a_1},\quad \overline{a_la_{l-1}\cdots a_1a_la_{l-1}\cdots a_1},\quad \cdots$$

中，存在着是 $m=5^l\cdot k$ 的倍数项

由(1)，(2)，(3)可知，对任何奇数 $m$，都存在一个 $m$ 的倍数，它的各位数码都是奇数.

10·105　在两个 1 之间夹着 1991 个数码 9，即

$$1\underbrace{99\cdots99}_{1991个9}1$$

试问:

(1) 应当在哪些数码之间放置"+"号,以使得所得的和为最小?

(2) 应当在哪些数码之间放置"×"号,以使得所得的积为最大?

(第 54 届莫斯科数学奥林匹克,1991 年)

[解] (1) 含有前 $m$ 个 9 的数等于 $2\cdot 10^m-1$,剩下的数码构成了数 $10^{1992-m}-9$.

考虑和数 $S(m)=2\cdot 10^m+10^{1992-m}-10$.

$S(996)\leqslant 2\cdot 10^{996}+10^{996}=3\cdot 10^{996}$,

$S(m)>10^m\geqslant 10\cdot 10^{996}$,当 $m\geqslant 997$.

$S(m)\geqslant 2\cdot 10+10^{997}-10>10\cdot 10^{996}$,当 $m\leqslant 995$.

于是在第 996 和 997 个数码之间放置"+"号,所得的和最小.

(2) 考虑积

$$
\begin{aligned}
P(m)&=(2\cdot 10^m-1)(10^{1992-m}-9)\\
&=2\cdot 10^{1992}+9-(18\cdot 10^m+10^{1992-m})
\end{aligned}
$$

设 $R(m)=18\cdot 10^m+10^{1992-m}$.

则 $R(m)$ 取得最小值时,$P(m)$ 最大,由于

$R(995)=18\cdot 10^{995}+10^{997}=118\cdot 10^{995}$,

$R(m)>18\cdot 10^m\geqslant 180\cdot 10^{995}$,当 $m\geqslant 996$,

$R(m)>10^{1992-m}\geqslant 1000\cdot 10^{995}$,当 $m\leqslant 994$.

于是在第 995 和 996 个数码之间放置"×"号,所得的积最大.

10·106 十进制的自然数 $k$ 有 $n$ 位数字.把这个数四舍五入精确到十位,再将所得的数四舍五入精确到百位,如此等等,在第 $n-1$ 次四舍五入之后得到数 $\overline{k}$.求证 $\overline{k}<\frac{18}{13}k$.

(第 17 届全苏数学奥林匹克,1983 年)

[证] 显然,四舍五入运算是单调的.即对自然数 $k_1$ 和 $k_2$,如果 $k_1\leqslant k_2$,那么 $\overline{k_1}\leqslant\overline{k_2}$.

现设 $a\geqslant 1$ 是数 $k$ 的第一位数字,由于

$$k<(a+1)\cdot 10^{n-1},$$

则
$$\overline{k}\leqslant\overline{(a+1)\cdot 10^{n-1}}=(a+1)\cdot 10^{n-1}. \qquad ①$$

(1) 若 $k\geqslant a\underbrace{44\cdots4}_{n-2个}5$,

则 $\overline{k} \geqslant \overline{a\underbrace{44\cdots4}_{n-2个}5}$

$= (a+1)\cdot 10^{n-1}.$

又由①得 $\overline{k} = (a+1)\cdot 10^{n-1}.$

$$\frac{\overline{k}}{k} \leqslant \frac{(a+1)\cdot 10^{n-1}}{a\underbrace{44\cdots4}_{n-2个}5} = \frac{(a+1)\cdot 10^{n-1}}{a\cdot 10^{n-1}+\frac{4}{9}(10^{n-1}-1)+1}$$

$$< \frac{(a+1)\cdot 10^{n-1}}{(a+\frac{4}{9})\cdot 10^{n-1}}$$

$$= \frac{a+1}{a+\frac{4}{9}} = 1+\frac{5}{9a+4}$$

$$\leqslant 1+\frac{5}{13} = \frac{18}{13}.$$

于是 $\overline{k} < \frac{18}{13}k.$

(2) 若 $k \leqslant a\underbrace{44\cdots4}_{n-1个}$,则

$$\overline{k} \leqslant \overline{a\underbrace{44\cdots4}_{n-1个}} = a\cdot 10^{n-1}.$$

又因为 $k \geqslant a\cdot 10^{n-1}$,

于是 $\frac{\overline{k}}{k} \leqslant \frac{a\cdot 10^{n-1}}{a\cdot 10^{n-1}} = 1 < \frac{18}{13}.$

$$\overline{k} < \frac{18}{13}k.$$

由(1),(2),本题得证.

10·107 已知 $m$ 和 $n$ 是自然数,且 $n \leqslant 100$,在将分数 $\frac{m}{n}$ 化成十进小数时,一位学生得到小数点后某连续三位上的数码为1,6,7.证明他的计算有错误.

(第6届全俄数学奥林匹克,1980年)

**[证]** 假定这个学生的计算没有错误,则

$$\frac{m}{n} = \overline{A\cdot a_1a_2\cdots a_k167a_{k+4}a_{k+5}\cdots}.$$

$$10^k\frac{m}{n} = \overline{Aa_1a_2\cdots a_k} + \overline{0.167a_{k+4}a_{k+5}\cdots}.$$

设$\frac{B}{n}=\overline{0.167a_{k+4}a_{k+5}\cdots}$,则

$$0.167\leqslant\frac{B}{n}<0.168,$$

$$167n\leqslant 1000B<168n.$$

将此不等式各项都乘以 6 得

$$1002n\leqslant 6000B<1008n,$$

$$2n\leqslant 6000B-1000n<8n.$$

由于 $B<n\leqslant 100$,则

$$0<6000B-1000n\leqslant 800.$$

于是$6000B-1000n$是一个不大于800且又能被1000整除的自然数,这是不可能的.

因而这个学生的计算有错误.

10·108　数列1,0,1,0,1,0,… 自第七项起,每个数字都等于它前六项数字之和的个位数.求证在数列中不会出现连续六项为0,1,0,1,0,1.

(列宁格勒数学奥林匹克,1984 年)

[证]　用 $L(n)$ 表示自然数 $n$ 的个位数.

考虑函数 $f(a_i)$.

$$\begin{aligned}f(a_i)&=L(2a_i+4a_{i+1}+6a_{i+2}+8a_{i+3}+10a_{i+4}+12a_{i+5})\\&=L(2(a_i+a_{i+1}+a_{i+2}+a_{i+3}+a_{i+4}+a_{i+5})+2a_{i+1}+4a_{i+2}\\&\quad+6a_{i+3}+8a_{i+4}+10a_{i+5})\\&=L(2a_{i+6}+2a_{i+1}+4a_{i+2}+6a_{i+3}+8a_{i+4}+10a_{i+5})\\&=L(2a_{i+1}+4a_{i+2}+6a_{i+3}+8a_{i+4}+10a_{i+5}+12a_{i+6})\\&=f(a_{i+1}).\end{aligned}$$

所以 $f(a_i)$ 为定值.

下面计算 $f(a_i)$ 的值.

$$\begin{aligned}f(a_i)&=f(a_1)\\&=L(2\cdot 1+4\cdot 0+6\cdot 1+8\cdot 0+10\cdot 1+12\cdot 0)\\&=L(18)\\&=8.\quad(i=1,2,\cdots)\end{aligned}\qquad ①$$

假设结论不成立,即在数列中出现连续六项为 0,1,0,1,0,1,则有

正整数 $j>1$,使得

$$a_j=a_{j+2}=a_{j+4}=0,$$
$$a_{j+1}=a_{j+3}=a_{j+5}=1.$$

$$\begin{aligned}f(a_j)&=L(2\cdot 0+4\cdot 1+6\cdot 0+8\cdot 1+10\cdot 0+12\cdot 1)\\&=L(24)\\&=4.\end{aligned} \quad ②$$

② 与 ① 矛盾.

所以数列中不能出现连续六项为 0,1,0,1,0,1.

10·109　如果一个 $2n$ 位数它本身是完全平方,而且用它的前 $n$ 个数字与后 $n$ 个数字所组成的数也都是完全平方(这里第2个 $n$ 位数可以从数字 0 开始,但不能等于 0,而由前 $n$ 个数字组成的第 1 个 $n$ 位数不能从 0 开始),这样的 $2n$ 位数称为"奇异数".

(1) 求所有两位数和四位数的奇异数.

(2) 有六位数的奇异数吗?

(3) 证明存在 20 位奇异数.

(4) 证明 100 位的奇异数至多有 10 个.

(5) 证明存在 30 位的奇异数.

(第 11 届全苏数学奥林匹克,1977 年)

[解]　(1) 先求两位奇异数.

由于一位平方数只有 0,1,4,9,由此组成的两位奇异数只有 49.

再求四位奇异数.

设四位奇异数为 $(10x+t)^2$,则

$$(10x+t)^2=100x^2+20xt+t^2.$$

则　$20xt+t^2$ 是小于 10 的自然数的平方,则

$$20xt+t^2<100,$$
$$xt\leqslant 4. \quad ①$$

又由于 $x^2>10$,则

$$x\geqslant 4. \quad ②$$

由 ①,② 及 $x,t\in\{1,2,\cdots,9\}$ 可知:　$x=4$,　$t=1$.

即四位奇异数是 $41^2=1681$.

(2) 存在六位奇异数,例如

$$256036=506^2.$$

(3) 若存在 20 位奇异数,设有

$$(10^5x+1)^2=10^{10}x^2+2\cdot 10^5x+1.$$

我们需求整数 $x$,使

$$10^9<x^2<10^{10}.$$

且 $$2\cdot 10^5x+1=y^2<10^{10}.$$

为此,我们可以取 $x=5\cdot 10^4-1$.

这时,20 位的奇异数为

$$\begin{aligned}&[5\cdot 10^9-(10^5-1)]^2\\=&(4999900001)^2\\=&24999000019999800001.\end{aligned}$$

它的前 10 位是 $49999^2=2499900001$,后 10 位是 $99999^2=9999800001$.

因此存在 20 位的奇异数.

(4) 对于任意的 $k\in N$, $4k$ 位的奇异数只能是

$$(10^kx+t)^2=10^{2k}x^2+2\cdot 10^kxt+t^2.$$

当 $10^{2k-1}\leqslant x^2<10^{2k}$ 时,有

$$x>3\cdot 10^{k-1},$$

$$2\cdot 10^kxt<10^{2k},$$

即 $$6\cdot 10^{2k-1}t<2\cdot 10^kxt<10^{2k},$$

$$6t<10.$$

所以有 $$t=1.$$

于是 $$2\cdot 10^kxt+t^2=2\cdot 10^kx+1.$$

设 $$2\cdot 10^kx+1=(2u+1)^2,$$

即 $$2^{k-1}5^kx=u(u+1).$$

这个等式成立只有三种情形:

(i)$5\cdot 10^{k-1}\mid u+1$;

(ii)$2^{k-1}\mid u$ 且 $5^k\mid u+1$;

(iii)$5^k\mid u$ 且 $2^{k-1}\mid u+1$.

在每一种情形都至多给出一个解,它满足条件 $u<5\cdot 10^{k-1}$.而这个条件等价于 $2u+1<10^k$.(在情形(ii),(iii)中为了得到矛盾,可设有二个解,并考虑这两个解的差即可)

因此存在的奇异数不多于 3 个.

(5) 对于任意的 $k$,至少存在一个 $(4k+2)$ 位的奇异数. 即

$$z = v + w^2,$$

其中 $v = 25 \cdot 10^{2k-1}$, $w$ 是大于 $\sqrt{v}$ 的最小自然数.

设 $y = w^2 - v$,同时满足不等式

$$0 < y^2 < 10^{2k+1}, \quad 10^{2k} \leqslant w^2 < 10^{2k+1},$$

那么由 $w^2$ 和 $y^2$ 组成的

$$z^2 = 4vw^2 + y^2 = 10^{2k+1}w^2 + y^2$$

是奇异数.

因为 $w - 1 < \sqrt{v}$,且 $(w-1)^2 \leqslant v - 1$,

所以 $$y < 2\sqrt{v},$$

且 $$y^2 < 4v = 10^{2k+1}.$$

其次 $$10^{2k} < v < w^2 = v + y < v + 2\sqrt{v} < 3v < 10^{2k+1}$$

因而存在 $4k+2$ 位奇异数.

当 $k = 7$ 时,借助于计算机可以求出

$$z = 25 \cdot 10^{13} + 15811389^2 = 500000022109321.$$

$z^2$ 的平方是一个 30 位奇异数.

10·110　对正整数 $n$,用 $S(n)$ 表示它的数字和,求所有的正整数 $M$,使得对每一个不超过 $M$ 的正整数 $k$,均有 $S(Mk) = S(M)$.

(匈牙利数学奥林匹克,1990 年)

[解]　我们证明:除去 $M = 1$ 这种平凡的情形外,当且仅当 $M = 10^n - 1$ 时,

$$S(Mk) = S(M). \qquad ①$$

当 $M = 10^n - 1$ 时,对 $2 \leqslant k \leqslant M$,

$$kM = (k-1) \cdot 10^n - (k-1) + (10^n - 1).$$

所以 ① 式成立.

反之,若 ① 式成立,设 $M$ 有 $n$ 位,首位数码是 $d$,则

$$M = d \cdot 10^{n-1} + m,$$
$$S(M) = d + S(m).$$

取 $k = 10^{n-1} + 1$,则

$$kM = m + 10^{n-1}(d + M),$$
$$S(Mk) = S(m) + S(M + d).$$

从而有 $$d = S(M + d). \qquad ②$$

若 $d < 9$,则 $M + d$ 的首位为 $d$ 或 $d + 1$,从而 $S(M + d) > d$,与②矛盾.

设 $d = 9$.如果 $M$ 有小于 9 的数码,那么仍有 $S(M + d) > d$,不满足②,因此 $M$ 的所有数码全是 9.

10·111 应当在如下的问号(?)的位置上填上哪一个数码,才能使所得的整数可被 7 整除:

$$\overline{\underbrace{666\cdots66}_{50个}?\underbrace{555\cdots55}_{50个}}.$$

(列宁格勒数学奥林匹克,1989 年)

[解] 注意到 $7 \mid 111111$.

于是 $$\overline{\underbrace{666\cdots66}_{50个}?\underbrace{555\cdots55}_{50个}}$$
$$= \underbrace{666\cdots66}_{48个} \cdot 10^{53} + \overline{66?55} \cdot 10^{48} + \underbrace{555\cdots55}_{48个}.$$

由于 $$7 \mid \underbrace{666\cdots66}_{48个} \cdot 10^{53},$$
$$7 \mid \underbrace{555\cdots55}_{48个}.$$

所以只需求(?),使
$$7 \mid \overline{66?55} \cdot 10^{48}.$$

鉴于 $(7,10^{48}) = 1$,所以只需求(?)满足
$$7 \mid \overline{66?55}.$$

设(?)位置的数码为 $x$, $x \in \{0,1,2,\cdots,9\}$,则有
$$\overline{66x55} = 63035 + \overline{3x20}.$$
$$= 7 \cdot 9005 + \overline{3x2} \cdot 10.$$

不难验证,仅有 322,392 能被 7 整除.即
$$7 \mid 66255, \quad 7 \mid 66955.$$

于是所求的数码(?)为 2 或 9.

10·112 求所有具有下述性质的 $n \in N$,如果并排写出十进制记数法中的数 $n^3$ 与 $n^4$,则其中十个数码恰好各出现一次.

(前南斯拉夫数学奥林匹克,1983 年)

[解] 用 $f(m)$ 表示自然数 $m$ 的十进制写法中数码的个数.

则对所求的 $n$,有

$$f(n^3)+f(n^4)=10.$$

显然 $$f(n^3)\geqslant 4.$$

否则,若 $f(n^3)<4$,则

$$n^3<1000,\quad n<10,$$

从而 $$n^4<10000,$$

$$f(n^3)+f(n^4)<4+5<10,$$

这是不可能的.

于是 $$f(n^3)=4,\quad f(n^4)=6.$$

由于 $n^3<10000$,而 $22^3>10000$,所以

$$n<22.$$

同样,由于 $n^4\geqslant 100000$,而 $17^4<100000$,所以

$$n>17.$$

于是 $$18\leqslant n\leqslant 21.$$

由于任意自然数都与它的十进制写法中数码之和对模 9 同余.所以

$$n^3+n^4\equiv(0+1+2+\cdots+9)\pmod 9,$$

$$n^3(n+1)\equiv 0\pmod 9.$$

显然 $n=19$, $n=20$ 不合上式.

而 $n=21$ 时,由于 $21^3$ 和 $21^4$ 的个位数都是 1,不符合题目要求.

因此只考虑 $n=18$,由于

$$18^3=5832,\quad 18^4=104976,$$

所以 $n=18$ 符合题目要求.

10·113 证明无论在数 12008 的两个 0 之间添加多少个 3,所得的数都可被 19 整除.

(第 58 届莫斯科数学奥林匹克,1995 年)

[证] 设在两个 0 之间添加 $n$ 个 3.

$$120\underbrace{3\cdots3}_{n\text{个}}08=12\underbrace{6\cdots6}_{n+1\text{个}}40-6\underbrace{3\cdots3}_{n+1\text{个}}2$$

$$=20\times6\underbrace{3\cdots3}_{n+1\text{个}}2-6\underbrace{3\cdots3}_{n+1\text{个}}2$$

第十章 十进制记数法

$=19\times 6\underbrace{3\cdots 3}_{n+1个}2$

于是对任何自然数 $n$，题目所得的数是 19 的倍数.



10·114　将数字 123456789101112…19941995 写在黑板上，构成整数 $N_1$，将 $N_1$ 的位于偶数位的数字擦掉，剩下的数字构成整数 $N_2$，将 $N_2$ 的位于奇数位的数字擦掉，剩下的数字构成整数 $N_3$，将 $N_3$ 的位于偶数位的数字擦掉，剩下的数字构成整数 $N_4$. 此过程一直持续到黑板上只剩下一个数字为止. 试确定这个数字.（注：从左往右数数计算位置，例如在 12345 中，1 在第一位，2 在第二位，依此类推）

（澳大利亚数学奥林匹克，1995 年）

**[解]**　整数 $N_1$ 由 $9\times 1+90\times 2+900\times 3+996\times 4=6873$ 个数字构成. 将这些数字依次编号为 $1,2,3,\cdots,6873$，我们考察编号的集合 $\{1,2,3,\cdots,6873\}$.

从 $N_1$ 中擦掉位于偶数位的数字等价于从集合 $\{1,2,\cdots,6874\}$ 中去掉 $\{2,4,\cdots,6872\}$，剩下的集合为 $\{1,3,5,\cdots,6873\}=\{1,1+2=3,3+2=5,\cdots,6871+2=6873\}$，

再从集合 $\{1,3,5,\cdots,6873\}$ 中去掉 $\{1,5,9,\cdots,6873\}$，得到剩下的集合 $\{3,7,11,\cdots,6781\}=\{3,3+4=7,7+4=11,\cdots,6867+4=6871\}$.

再从剩下的集合 $\{3,7,11,\cdots,6871\}$ 中去掉 $\{7,15,\cdots\}$，得到集合 $\{3,11,\cdots\}=\{3,3+8=11,11+8=19,\cdots\}$，

依次又得到

$\{11,11+16=27,\cdots\}$，$\{11,11+32=43,\cdots\}$，$\{43,43+64=107,\cdots\}$，$\{43,43+128=171,\cdots\}$，$\{171,171+256=427,\cdots\}$，$\{171,171+512=683,\cdots\}$，$\{683,683+1024=1707,\cdots\}$，$\{683,683+2048=2731\}$，$\{2731,2731+4096=6827\}$，

最后一步，即第十三步之后只剩下 $\{2731\}$.

所求的数字应是 $N$ 的从左至右的第 2731 位数字. 由于 $9\times 1+90\times 2<2731<9\times 1+90\times 2+900\times 3$，

所以该数为三位数.

一位数和两位数共占去 $9\times 1+90\times 2=189$ 个位置，而 $2731-189=2542=3\times 847+1$，于是，由于在三位数中第 848 个数是 947，其中第一个数字是 9. 因此，最后黑板剩下的数字是 9.

10·115　从任何一个三位数 $n$ 开始，我们得到一个新数 $f(n)$，它是 $n$ 的三位数字，三个两两数字的乘积，三位数字乘积的累加.

(1)当 $n=625$ 时，求$\frac{n}{f(n)}$.

(2)求所有三位数，使得$\frac{n}{f(n)}=1$.

(英国数学奥林匹克，1994 年)

[解]　设 $n=\overline{abc}=100a+10b+c$，这里 $a,b,c\in\{0,1,2,\cdots,9\}$，$a\geqslant 1$.

$$f(n)=(a+b+c)+(ab+bc+ca)+abc.$$

(1)当 $n=625$ 时，$a=6,b=2,c=5$.

$$f(625)=(6+2+5)+(12+10+30)+60=125,$$

$$\frac{625}{f(625)}=\frac{625}{125}=5.$$

(2)依题意，有 $n=f(n)$.

$$100a+10b+c=(a+b+c)+(ab+bc+ca)+abc,$$

$$c=\frac{99a+9b-ab}{a+b+ab}\leqslant 9,$$

即
$$99a+9b-ab\leqslant 9(a+b+ab),$$

或 $90a\leqslant 10ab$，故 $b\geqslant 9$.

另一方面，$b\leqslant 9$，于是 $b=9$.

而
$$c=\frac{99a+81-9a}{a+9+9a}=\frac{90a+81}{10a+9}=9$$

因此　$n=a\overline{99}$,

由于 $a$ 可取 $1,2,\cdots,9$，所以

$$n=199,299,399,499,599,699,799,899,999.$$

10·116　将正整数称为相似的，如果它们可用同样的一组数字写出(例如 112，121，211 是相似的，因为它们都可用数字组 1，1，2 写出).

证明存在三个相似的 1995 位数，它们的各位数字中不含 0，且其中两个数的和恰等于第三个数.

(第 21 届全俄数学奥林匹克，1995 年)

[解]　注意到 1995 是 3 的倍数，所以先考虑三位数的相似数. 由于

$$459+495=954.$$

于是,所求的三个数可以为

$$A=4\underbrace{59459\cdots4}_{459\text{的}665\text{组}}59$$

$$B=4\underbrace{95495\cdots4}_{495\text{的}665\text{组}}95$$

$$C=9\underbrace{54954\cdots9}_{954\text{的}665\text{组}}54$$

则 $A+B=C.$

于是 $A,B,C$ 即为所求.

10·117 试求具有如下性质的最大正整数:它的末位数不是0,在去掉它的某一位数(但非首位数)之后所得到的数是原来的数的约数.

(第57届莫斯科数学奥林匹克,1994年)

**[解]** 记原来的数为$\overline{a_k\cdots a_{t+1}a_ta_{t-1}\cdots a_1}$,是删去 $a_t$ 之后得的数$\overline{a_k\cdots a_{t+1}a_{t-1}\cdots a_1}$的 $b$ 倍.即

$$\overline{a_k\cdots a_{t+1}}\cdot10^t+a_t\cdot10^{t-1}+\overline{a_{t-1}\cdots a_1}$$
$$=b(\overline{a_k\cdots a_{t+1}}\cdot10^t+\overline{a_{t-1}\cdots a_1}).\qquad①$$

易见 $1<b<20$,又因 $a_1\neq0$,则 $b\neq10$.

如果 $b>10$,则 $t=k-1$.于是由①式得

$$[a_{k-1}-(b-10)a_n]\cdot10^{k-2}=(b-1)\overline{a_{k-2}\cdots a_1}\qquad②$$

②式两端为正整数,即 $a_{k-1}>(b-10)a_k$ . ③

此时②式即为$(b-1)\overline{a_{k-2}\cdots a_1}=2^{k-2}\cdot5^{k-2}[a_{k-1}-(b-10)a_k]$ ④

由于 $a_1\neq0$,则数$\overline{a_{k-2}\cdots a_1}$不能既为2的倍数,又为5的倍数.

当它是2的倍数时,$b-1$ 应为 $5^{k-2}$的倍数,但因为 $b-1<19<25$,所以 $k-2\leqslant1,k\leqslant3$,即原来的数至多为三位数.由于我们求最大正整数,可暂不考虑;

当它不是2的倍数时,$b-1$ 应为 $2^{k-2}$的倍数,但因 $b-1<19<2^5$,所以 $k-2\leqslant4,k\leqslant6$,这表明原来的数至多为六位数.

如果 $k=6$,则 $b-1$ 是 $2^4$ 的倍数,至少为16,它不再是5的倍数.这表明

$$b-1=16,\overline{a_4a_3a_2a_1}\text{是 }5^4=625\text{ 的倍数}.$$

代入③式有 $a_5>7a_b$ ⑤

因为 $a_6 \geqslant 1$,则 $a_5 > 7$,只能有 $a_5 = 8, a_5 = 9$.

当 $a_5 = 8$ 时,由⑤式,$a_6 = 1, b - 1 = 16$,代入④式得

$$\overline{a_4a_3a_2a_1} = \frac{10000}{16} = 625.$$

这表明原来的数是$\overline{a_6a_5a_4a_3a_2a_1} = 180625$.

事实上,$180625 = 17 \times 10625$.合乎题目要求.

当 $a_5 = 9$ 时,由⑤式,$a_6 = 1$,又 $b - 1 = 16$,代入④式,得

$$\overline{a_4a_3a_2a_1} = \frac{20000}{16} = 1250.$$

此时 $a_1 = 0$,不合要求.

如果 $b < 10$,将①式改写为

$$[(10 - b)\overline{a_k \cdots a_{t+1}} + a_t] \cdot 10^{t-1} = (b - 1)\overline{a_{t-1} \cdots a_1}, \qquad ⑥$$

由于所要求的是满足条件的最大整数,所以应有 $k \geqslant 6$,此时显然有 $t > 1$.经过类似的讨论可知,当 $b - 1 = 8, t - 1 = 3, \overline{a_3a_2a_1} = 875$ 时,⑥式右端最大,有$\overline{a_n \cdots a_5} + a_4 = 7$,可知 $k = 5, a_5 \leqslant 7$.故此时最大整数为 70875,而 $70875 = 9 \times 7875$,也合乎条件.

但是 $70875 < 180625$,所以所求的最大正整数是 180625.

10·118 证明:对于任何自然数 $k > 1$,都能找到一个 2 的幂,在它的末尾的 $k$ 个数码中至少有一半是 9.(例如,对于 $k = 2$,有 $2^{12} = 4096$,对于 $k = 3$,有 $2^{53} = \cdots 992$,等等)

(第 57 届莫斯科数学奥林匹克,1994 年)

[证] 我们来证明:对任何自然数 $k \geqslant 1$,在 $2^{10 \cdot 5^k + k + 2}$的末 $k + 2$ 位数中至少有$\left[\frac{2}{3}(k + 2)\right]$个 9.

由于 $2^{10} = 1024 = 10^3 + 24$,

$$(10^3 + 24)^{5^k} = 10^{3 \cdot 5^k} + 5^k \cdot 10^{3(5^k - 1)} \cdot 24 + \cdots + 5^k \cdot 10^3 \cdot 24^{(5^k - 1)} + 24^{5^k},$$

又由于 $5^k \cdot 10^3 \cdot 24^{(5^k - 1)} = 10^{3+k} \cdot 3^{5^k - 1} \cdot 2^{3 \cdot 5^k - 3 - k}$.

所以有 $2^{10 \cdot 5^k} \equiv 24^{5^k} \pmod{10^{3+k}}$,

因此 
$$\begin{aligned} 2^{12 \cdot 5^k} &\equiv 96^{5^k} = (10^2 - 2^2)^{5k} \\ &\equiv 5^k \cdot 10^2 \cdot 2^{2(5^k - 1)} - 2^{2 \cdot 5^k} \\ &= 2^{2 \cdot 5^k - 2 - k}(10^{k+2} - 2^{k+2}) \pmod{10^{3+k}}. \end{aligned}$$

所以有 $2^{10\cdot5^k+k+2}\equiv10^{k+2}-2^{k+2}\pmod{10^{3+k}}$.

由于 $2^{k+2}=8^{\frac{k+2}{3}}<10^{\frac{k+2}{3}}$，因此，$10^{k+2}-2^{k+2}$ 至多在末尾的 $\left[\frac{k+2}{3}\right]$ 个数上不是 9，即它至少在 $\left[\frac{2}{3}(k+2)\right]$ 个数位上都是 9.



10·119 设集合 $\{1,2,3,\cdots,1998\}$ 被分为 999 个彼此不相交的二元子集 $\{a_i,b_i\}$，并且对 $1\leqslant i\leqslant999$，均有 $|a_i-b_i|=1$ 或 6.

证明和数 $\sum_{i=1}^{999}|a_i-b_i|$ 的末尾数字为 9.

（第 27 届美国数学奥林匹克，1998 年）

［证］ 由条件，对任意 $1\leqslant i\leqslant999$，均有

$$|a_i-b_i|\equiv1\pmod 5.$$

所以，有和数 $S=\sum_{i=1}^{999}|a_i-b_i|\equiv999\equiv4\pmod 5$.

这表明，$S$ 的末尾数字只能为 4 或 9.

另一方面，$S=\sum_{i=1}^{999}|a_i-b_i|\equiv\sum_{i=1}^{999}(a_i+b_i)=\sum_{i=1}^{1989}i=999\times1999\equiv1\pmod 2$.

这又表明，$S$ 为奇数.

综合以上可知，$S$ 的末尾数字只能是 9.

10·120 取出小于 1 的分母为 1000 的正有理数，将所有的数约分成既约分数，然后把每个数的分子与分母相加，可以得到多少个不同的数.

（第 17 届美国数学邀请赛，1999 年）

［解］ 因为 $1000=2^3\cdot5^3$，所以 1000 有 16 个因数：

1,2,4,5,8,10,20,25,40,50,100,125,200,250,500,1000.

以上 16 个数除去 1 之外均可作为小于 1 的分母为 1000 的既约分数的分母.

把题设中的所有有理数按分母分类可以分为 15 类，记分母为 $k$ 的叫 $k$ 类.

又把既约分数 $\frac{q}{p}$ 的分子与分母之和 $p+q$ 叫做这个分数的生成数. 显然

以 2 为分母的只有$\frac{1}{2}$,生成数为 3;

以 4 为分母的有$\frac{1}{4}$,$\frac{3}{4}$,生成数为 5,7;

以 5 为分母的有$\frac{1}{5}$,$\frac{2}{5}$,$\frac{3}{5}$,$\frac{4}{5}$,生成数依次为 6,7,8,9;

以 8 为分母的有$\frac{1}{8}$,$\frac{3}{8}$,$\frac{5}{8}$,$\frac{7}{8}$,生成数依次为 9,11,13,15.

下面证明所有不小于 17 且不能被 5 整除的所有小于 2000 的正奇数均能被生成,而不小于 17 又小于 2000 且能被 5 整除的正奇数都不能被生成.

设 $M=\{m \mid 17 \leqslant m<2000, m \in N, 5 \nmid m, 2 \nmid m\}$

$=\{17,19,21,23,27,29,31,33,37, \cdots, 1999\}$.

对每一个 $i \in M$,可以从 1000 的偶因数中找到一个偶数 $k$,使得 $k<i<2k$.由于 $k$ 只有约数 2 和 5,所以 $2 \nmid i, 5 \nmid i$,从而$(k, i)=1,(k, i-k)=1$,即$\frac{i-k}{k}$属 $k$ 类,且生成 $i$.

下面证明不小于 17 而小于 2000 的且能被 5 整除的正奇数都不能生成.

显然,分母为 2,4,5,8 类都不能生成 17 至 2000 间 5 的倍数.

其他类的分母是$\{10,20,25, \cdots, 1000\}$均是 5 的倍数.假设 $i(5 \mid i, 2 \nmid i, 17 \leqslant i<2000, i \in N)$可被生成,则必属于分母为 $k$ 类$(5 \mid k)$,所以 $5 \mid i-k,(k, i-k)=5$,这时分数$\frac{i-k}{k}$不是既约分数.所以 $i$ 不能生成.

最后讨论可以生成的偶数.

显然,分母为偶数的类,其分子只能是奇数,此时不能生成偶数.

所以只需讨论分母为 5,25,125 的情况.

此时,要生成偶数,其分子必为奇数,而 5,25,125 均为 5 的幂,所以分子是非 5 的倍数且小于分母的奇数.

由于 3~2000 间的奇数有 999 个.

其中,末位为 5 的数有$\frac{1995-15}{10}=198$ 个.

分母为 5 时,分子有 2 种可能.

分母为 25 时,分子有 $12-\left[\frac{12}{5}\right]=10$ 种可能.

分母为 125 时，分子有$\frac{124}{2}-10-2=50$种可能.

所以共得到 $999-198+2+10+50=863$ 个不同的数.

10·121 证明对每个正整数 $n$，存在一个正整数具有如下性质：

(1)恰有 $n$ 位数字；

(2)数字均不为 0；

(3)被它们的数字和整除.

（第 39 届国际数学奥林匹克预选题，1998 年）

[证] 在 $n=3$ 时，111 合乎题目要求.

设 $n=3^l$ 时，则$\underbrace{111\cdots111}_{3^l个1}$ 合乎题目要求，

当 $n=3^{l+1}$时，

$$\underbrace{111\cdots111}_{3^{l+1}个1}=\underbrace{111\cdots111}_{3^l个1}\times(10^{2\times3^l}+10^{3^l}+1)$$

能被 $3^l\times3=3^{l+1}$整除.

于是由数学归纳法证明了对一切自然数 $n=3^l$，数$\underbrace{111\cdots111}_{3^l个1}$ 合乎要求.

对于 $3^l<n<2\times3^l$，令 $k=3^l$，$t=n-k$，则数

$$S=\underbrace{11\cdots1}_{t个1}\underbrace{99\cdots9}_{k-t个9}\underbrace{88\cdots8}_{t个8}.$$

从而 $S$ 的数字和为 $t+9k-9t+8t=9k$，

$S$ 的位数是 $t+k-t+k=k+t=n$.

且 
$$\begin{aligned}S&=\frac{(10^t-1)\cdot10^k}{9}+(10^{k-t}-1)\cdot10^t+\frac{8(10^t-1)}{9}\\&=\frac{10^{k+t}+8\cdot10^k-10^t-8}{9}=\frac{(10^t+8)(10^k-1)}{9}\\&=(10^t+8)\times\underbrace{11\cdots1}_{k个1}\end{aligned}$$

能被 $9k$ 整除.

对于 $2\times3^l\leqslant n<3^{l+1}$，令 $k=2\times3^l$，$t=n-k$，上面的 $S$，仍然满足题目要求.

于是对一切正整数 $n$，都存在满足题目要求的正整数.

# 第十一章　k 进制记数法



**11·1**　分别由整数$[(\sqrt{10})^n]$,$[(\sqrt{2})^n]$的末位数字构成的数列$\{\alpha_n\}$,$\{\beta_n\}$是循环数列吗?(这里$[x]$表示不超过$x$的最大整数)

(第17届全苏数学奥林匹克,1983年)

**[解]**　(1)　$\sqrt{10}=3.16227766\cdots$,

$[\sqrt{10}]$的末位数字为3,即$\alpha_1=3$,

$[(\sqrt{10})^2]=[10]=10$,即$\alpha_2=0$,

$[(\sqrt{10})^3]=[10\sqrt{10}]=31$,即$\alpha_3=1$,

$[(\sqrt{10})^4]=[100]=100$,即$\alpha_4=0$,

$[(\sqrt{10})^5]=[100\sqrt{10}]=316$,即$\alpha_5=6$.

因此$\alpha_{2k+1}$恰等于$\sqrt{10}$的十进制小数的小数点后的第$k$个数字.$\alpha_{2k}=0$.

由于$\sqrt{10}$是无理数,它是无限不循环小数,所以$\{\alpha_{2k+1}\}$是不循环的,因而数列$\{\alpha_n\}$不是循环数列.

(2)由十进制小数化为二进制小数的方法.$\sqrt{2}$的二进制的小数点后的第$n$位数字,恰等于$[(\sqrt{2})^k]$的二进制的末位数字组成数列$\{\gamma_k\}$的$\gamma_{2n+1}$.由于$\sqrt{2}$是无理数,所以$\{\gamma_{2n+1}\}$不是循环数列,因而对十进制来说,$\{\beta_n\}$也不是循环数列.

**11·2**　定义在正整数集上的函数$f$满足:$f(1)=1$,$f(2)=2$,

$$f(n+2)=f(n+2-f(n+1))+f(n+1-f(n)),\quad (n\geqslant 1).$$

(1)求证(i)$0\leqslant f(n+1)-f(n)\leqslant 1$;

(ii)如果$f(n)$是奇数,则$f(n+1)=f(n)+1$.

(2) 试求(并证明)适合 $f(n)=2^{10}+1$ 的一切 $n$ 的值.

(第22届加拿大数学竞赛,1990年)



**[证]** 根据已知条件,我们写出 $f(n)$ 的开始的一些值.

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(n)$ | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 4 | 5 | 6 | 6 |
| $n$ | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| $f(n)$ | 7 | 8 | 8 | 8 | 8 | 9 | 10 | 10 | 11 | 12 |

由这个表可以猜想这样的结果:

$f(n)$ 递增地取遍正整数值,且每个值 $m$ 出现 $r+1$ 次,其中 $r$ 是 $m$ 含2的最高次数,即

$$2^r \mid m,\quad 2^{r+1} \nmid m.$$

我们记作 $2^r \| m$.

为了证明上面的结果,我们使用 $m$ 的二进制记法.

$$m=\overline{(b_kb_{k-1}\cdots b_2b_1)_2},\quad b_i\in\{0,1\}.$$

则在不超过 $m$ 的自然数中,奇数的个数为

$$\overline{b_kb_{k-1}\cdots b_2}+b_1,$$

2的倍数的个数(非4的倍数)为

$$\overline{b_kb_{k-1}\cdots b_2}-\overline{b_kb_{k-1}\cdots b_3},\cdots$$

$2^{k-1}$ 的倍数的个数为 $b_k$.

因此适合 $f(n)=m$ 的最大的 $n$(记作 $a_m$)为

$$\begin{aligned}
a_m &= 1\cdot(\overline{b_k\cdots b_2}+b_1)+2(\overline{b_k\cdots b_2}-\overline{b_k\cdots b_3}) \\
&\quad +\cdots+(k-1)(\overline{b_kb_{k-1}}-b_k)+kb_k \\
&= b_1+3\,\overline{b_k\cdots b_2}+\overline{b_k\cdots b_3}+\cdots+\overline{b_kb_{k-1}}+b_k \\
&= (2\,\overline{b_k\cdots b_2}+b_1)+\overline{b_k\cdots b_2}+\overline{b_k\cdots b_3}+\cdots+\overline{b_kb_{k-1}}+b_k \\
&= \overline{b_k\cdots b_1}+\overline{b_k\cdots b_2}+\cdots+\overline{b_kb_{k-1}}+b_k \\
&= b_1+b_2(1+2)+\cdots+b_k(1+2+\cdots+2^{k-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{k} b_i(2^i-1).
\end{aligned}$$

由此式,我们可求出

$$a_1 = 2^1 - 1 = 1, \quad a_2 = 2^2 - 1 = 3,$$

$$a_3 = (2^2 - 1) + (2 - 1) = 4, \quad a_4 = 2^3 - 1 = 7, \cdots$$

如果 $2^r \parallel m$,则

$$\begin{aligned} & a_m - a_{m-1} \\ = & (2^{r+1} - 1) - [(2^r - 1) + (2^{r-1} - 1) + \cdots + (2 - 1)] \\ = & r + 1. \end{aligned}$$

下面用数学归纳法证明:(规定 $a_0 = 0$)

当 $a_{m-1} < n \leqslant a_m$ 时,$f(n) = m$.

当 $m \leqslant 10$ 时,已直接验证结论成立.

假设 $n \leqslant a_m$ 时,结论成立.下面证明:

当 $a_m < n \leqslant a_{m+1}$ 时,$f(n) = m + 1$.

(1) 若 $m + 1$ 为奇数,令

$$m + 1 = 1 + 2^{i_1} + 2^{i_2} + \cdots + 2^{i_k},$$

其中 $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k$,则

$$a_m = (2^{i_1+1} - 1) + (2^{i_2+1} - 1) + \cdots + (2^{i_k+1} - 1),$$

$$a_{m+1} = a_m + 1.$$

于是

$$\begin{aligned} f(a_{m+1}) &= f(a_{m+1} - m) + f(a_m - m) \\ &= f(a_{\frac{m}{2}} + 1) + f(a_{\frac{m}{2}}) \\ &= \frac{m}{2} + 1 + \frac{m}{2} \\ &= m + 1. \end{aligned}$$

(2) 若 $m + 1$ 为偶数,令 $m + 1 = 2^{i_1} + 2^{i_2} + \cdots + 2^{i_k}$,

其中 $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k$.

$$2^{i_1-1} \parallel \frac{m+1}{2}.$$

$$\begin{aligned} a_m &= (2 - 1) + \cdots + (2^{i_1} - 1) + (2^{i_2+1} - 1) + \cdots + (2^{i_k+1} - 1) \\ &= (2^{i_1+1} - 1) + (2^{i_2+1} - 1) + \cdots + (2^{i_k+1} - 1) - (i_1 + 1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(a_m + 1) &= f(a_{\frac{m+1}{2}} - i_1 + 1) + f(a_{\frac{m+1}{2}} - i_1 + 1) \\ &= \frac{m+1}{2} + \frac{m+1}{2} \\ &= m + 1, \end{aligned}$$

$$f(a_m + 2) = f(a_{\frac{m+1}{2}} - i_1 + 1) + f(a_{\frac{m+1}{2}} - i_1 + 1) = m + 1.$$

$f(a_m+3)=f(a_{\frac{m+1}{2}}-(i_1-2))+f(a_{\frac{m+1}{2}}-i_1+1)=m+1,$

……

$f(a_m+i_1+1)=f(a_{\frac{m+1}{2}})+f(a_{\frac{m+1}{2}}-1)=m+1.$



即对 $a_m<n\leqslant a_{m+1}$,均有 $f(n)=m+1$.

所以 $0\leqslant f(n+1)-f(n)\leqslant 1$.

并且 $f(n)$ 是奇数时,$f(n+1)=f(n)+1$.

由以上,满足 $f(n)=2^{10}+1$ 的 $n$ 只有一个,即

$$n=2^{11}-1+2-1=2^{11}.$$

**11·3** 三个容器都注进了整数升的水,可以从其他容器中往任何一个容器中再倒进这个容器中已有的那么多水.证明若干次这样"重倒"后能倒空一个容器.(每个容器都足够大,能盛下所有的水)

(第5届全苏数学奥林匹克,1971年)

**[证]** 设在3个容器 $A$、$B$、$C$ 中分别装着水 $a$ 升、$b$ 升、$c$ 升, $0\leqslant a\leqslant b\leqslant c$.

为证明本题,只要用若干次"重倒"能使一个容器中的水少于 $a$ 升就可以了,因为重复这种做法就可把一个容器中的水倒空.

设 $b=ad+r,\quad 0\leqslant r<a$.

我们把 $B$、$C$ 中的水倒进 $A$ 中,这时 $A$ 的水就会变成 $2a,2^2a,2^3a,\cdots,2^ka$.

我们注意到从 $B$ 中正好倒出 $da$ 升水,那么在 $B$ 中还剩 $r<a$ 升水.

事实上,这样做是可能做到的.

因为可以把 $d$ 写成二进制形式,即写成 $1,2,2^2,\cdots,2^k,\cdots$ 中若干个数之和的形式.因此从 $B$ 中 $k$ 次倒出相应的 $da$ 升水之后,如果 $A$ 中的水不足 $2^ka$ 升,再从 $C$ 中倒若干升水到 $A$ 中补足 $2^ka$ 升.这时从 $C$ 中倒出的水要比从 $B$ 中倒出的少,因此 $C$ 中还有水.

**11·4** 已知利用6个一组的砝码可以使重量是连续自然数的63个重物平衡,求这组砝码.

(第21届全苏数学奥林匹克,1987年)

**[解]** 设所求的6个砝码的重量按不减排列为 $x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_6$.

由数 $x_1,x_2,\cdots,x_6$ 中的某几个组成的和数可表示为

$$\varepsilon_1x_1+\varepsilon_2x_2+\cdots+\varepsilon_6x_6 \qquad ①$$

其中 $\varepsilon_i=0,1$, 且至少有一个 $\varepsilon_i\neq 0$.

形如 ① 的表达式恰好有 $2^6-1=63$ 个.

依照题设条件,这 63 个数可记为 $x_0+1,\quad x_0+2,\quad \cdots,\quad x_0+63$. 由于 ① 的所有表达式均不相同,因此必有 $x_1<x_2<\cdots<x_6$.

并且有

$$x_0+1=x_1,\quad x_0+62=x_2+x_3+\cdots+x_6,$$
$$x_0+63=x_1+x_2+\cdots+x_6.$$

由此可得　　$x_1=1$.

于是　　$x_0=0,\quad x_2=2,\quad x_1+x_2=3,\quad x_3=4.$

假设数 $x_1,x_2,\cdots,x_k(k\leqslant5)$ 已经求出,这样表达式 $\varepsilon_1x_1+\varepsilon_2x_2+\cdots+\varepsilon_kx_k(\varepsilon_i=0,1)$ 就可以给出数 $1,2,\cdots,2^k-1$,那么 $x_{k+1}=2^k$,且表达式 $\varepsilon_1x_1+\varepsilon_2x_2+\cdots+\varepsilon_{k+1}x_{k+1}$ 对同样的 $\varepsilon_i$ 表示数 $1,2,\cdots,2^{k+1}-1$.

于是可依次求出:

$x_1=1,\quad x_2=2,\quad x_3=4,\quad x_4=2^3=8,$

$x_5=2^4=16,\quad x_6=2^5=32.$

11·5　在练习本里写着若干个数. 如果这些数中的两个数或更多一些数的算术平均值不等于这些数中的任何数,那么就可以把这些平均值添写到已写好的那些数旁边. 证明从数 0 和 1 开始,用这样的添写法可以得到数:(1) $\frac{1}{5}$;(2)0 和 1 之间的任何有理数.

(第 13 届全苏数学奥林匹克,1979 年)

**[证]**　(1) 从数 0 和 1 开始,能够用求平均值法得到所有二进制的有理数:分母是 2,4,8,16,… 等的分数.

为了从 0 和 1 得到分数 $\frac{1}{n}$,只要选取其和为 1 的 $n$ 个不同的二进制有理数,并取它们的算术平均值即可.

例如,当 $n=5$ 时,有

$$\frac{\frac{3}{4}+\frac{3}{4^2}+\frac{3}{4^3}+\frac{3}{4^4}+\frac{1}{4^4}}{5}=\frac{1}{5}.$$

(2) 我们指出,如果能根据某个方案从 $(0,1)$ 得到 $t$,那么根据同一方案可由 $(1,0)$ 得到 $1-t$(即处处用 $1-x$ 代替 $x$,而求算术平均值的各步也保持这种代替).

根据同样的方案,我们也能从 $(0,r)$ 得到 $(0,rt)$,于是,如果已经

得到了数$\frac{1}{n}$以及所有有理数$\frac{k}{n-1}$，　$k=1,2,3,\cdots,n-1$，那么就可以得到

$$1-\frac{1}{n}=\frac{n-1}{n}.$$

以及一切

$$\frac{k}{n}=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{k}{n-1}.$$

从而得到0和1之间的任何有理数.

11·6　对于由整数构成的非空集合$S$，令$\sigma(S)$表示$S$中的所有元素之和.设$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_{11}\}$是一个由正整数构成的集合，并且$a_1<a_2<\cdots<a_{11}$.如果对于每个正整数$n\leqslant1500$，都存在$A$的一个子集$S$，使得$\sigma(S)=n$，　求$a_{10}$的最小可能值.

（第21届美国数学奥林匹克，1992年）

[解]　设　$S_k=\sum_{i=1}^{k}a_i$，则有

$$a_{k+1}\leqslant S_k+1,\quad k=1,2,\cdots,10.$$

事实上，若存在$j$，使得

$$a_{j+1}>S_j+1,$$

那么，对$n=S_j+1$，由于

$$a_1+a_2+\cdots+a_j=S_j<n,$$

而
$$a_t>S_j+1=n\quad(t>j).$$

从而不存在$S\subset A$，使得$\sigma(S)=n$.

易知，$a_1=1$，于是可得

$$a_2\leqslant2,\quad a_3\leqslant4,\quad a_4\leqslant8,\quad a_5\leqslant16,$$
$$a_6\leqslant32,\quad a_7\leqslant64,\quad a_8\leqslant128.$$

若$a_{10}\leqslant247$，则$a_9\leqslant246$，因此

$$\begin{aligned}a_{11}&\leqslant S_{10}+1\\&=(1+2+4+\cdots+128)+246+247+1\\&=749.\end{aligned}$$

从而
$$S_{11}=S_{10}+a_{11}\leqslant1497.$$

这是不可能的.

从而 $$a_{10} \geqslant 248.$$

又当 $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$, $a_4 = 8$, $a_5 = 16$, $a_6 = 32$, $a_7 = 64$, $a_8 = 128$, $a_9 = 247$, $a_{10} = 248$, $a_{11} = 751$时, 集合 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_{11}\}$ 满足题目要求.

实际上,1,2,4,8,…,128 可表示 1 至 $2^7 + 2^6 + \cdots + 2 + 1 = 255$ 之间的所有整数,这可由二进制表示得到.

1,2,4,…,128,247,248 可表示从 248 至 $247 + 248 + 255 = 750$ 之间的所有整数.

从而 1,2,…,128,247,248,751 可表示从 1 至 1500 间的所有整数.

11·7　证明任何一个正的既约真分数 $\frac{m}{n}$ 可以表示成两两互异的自然数的倒数之和.

（波兰数学竞赛,1972 年）

**[证 1]**　选取自然数 $k$ 满足不等式

$$n \leqslant 2^k.$$

设 $$2^k m = qn + r, \quad 0 \leqslant r < n.$$

于是有 $$\frac{m}{n} = \frac{2^k m}{2^k n} = \frac{q}{2^k} + \frac{r}{2^k n}. \qquad ①$$

因为 $\frac{m}{n} < 1$,所以

$$qn \leqslant qn + r = 2^k m < 2^k n.$$

即 $$q < 2^k.$$

于是在二进制中,$q$ 可写成

$$q = q_0 + q_1 \cdot 2 + q_2 \cdot 2^2 + \cdots + q_{k-1} \cdot 2^{k-1},$$

其中 $q_i \in \{0,1\}$.因此

$$\frac{q}{2^k} = q_0 \frac{1}{2^k} + q_1 \frac{1}{2^{k-1}} + q_2 \frac{1}{2^{k-2}} + \cdots + q_{k-1} \cdot \frac{1}{2}. \qquad ②$$

由于 $r < n \leqslant 2^k$,则在二进制下,$r$ 可写成

$$r = r_0 + r_1 \cdot 2 + r_2 \cdot 2^2 + \cdots + r_{k-1} 2^{k-1}.$$

其中 $r_i \in \{0,1\}$,因此

$$\frac{r}{2^k n} = r_0 \frac{1}{2^k n} + r_1 \frac{1}{2^{k-1} n} + \cdots + r_{k-1} \frac{1}{2n}. \qquad ③$$

另外,因为 $r < n$,所以当 $j = 0,1,2,\cdots,n-1$ 时有不等式

$$r_j \frac{1}{2^{k-j}n} = \frac{r_j 2^j}{2^k n} \leqslant \frac{r}{2^k n} < \frac{1}{2^k}.$$

因此，和式 ③ 中的每个非零加项小于和式 ② 中的任何非零加项. 于是，和式 ② 与 ③ 含有不同的加项.

由 ①，② 和 ③ 可将$\frac{m}{n}$表示为两两互异的倒数之和.

$$\frac{m}{n} = \sum_{i=0}^{k-1} q_i \frac{1}{2^{k-i}} + \sum_{i=0}^{k-1} r_i \frac{1}{2^{k-i}n}$$

其中 $q_i \in \{0,1\}$，　$r_i \in \{0,1\}$.

[证 2]　对 $m$ 用数学归纳法.

(1) 当 $m = 1$ 时，因为

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{6n},$$

所以结论正确.

(2) 假设结论对小于 $m(m > 1)$ 的自然数成立，我们证明结论对于 $m$ 也成立.

设
$$n = qm + r,\quad 0 \leqslant r < m. \qquad ①$$

因为 $0 < \frac{m}{n} < 1$，所以 $m < n$，　$q > 0$.

如果 $r = 0$，那么由 ① 可知 $n$ 被 $m(m > 1)$ 整除，这与 $m$ 和 $n$ 互素的假设矛盾. 于是 $r > 0$，　$m - r < m$.

将 ④ 写为

$$n = (q+1)m - (m-r).$$

那么

$$\frac{m}{n} - \frac{1}{q+1} = \frac{(q+1)m - n}{n(q+1)} = \frac{m-r}{n(q+1)}. \qquad ②$$

因为 $m - r < m$，所以按归纳假设，数$\frac{m-r}{n(q+1)}$可以表成两两互异的自然数倒数之和：

$$\frac{m-r}{n(q+1)} = \frac{1}{t_1} + \cdots + \frac{1}{t_k}. \qquad ③$$

因为 $n > m > 1$，所以由 ③ 知，当 $i = 1,2,\cdots,k$ 时，不等式 $t_i > q + 1$ 成立，从而 $t_i$ 与 $q + 1$ 不同.

把 ③ 代入 ② 得

$$\frac{m}{n}=\frac{1}{q+1}+\frac{1}{t_1}+\cdots+\frac{1}{t_k}.$$

于是对 $m$，$\frac{m}{n}$ 可表示成两两互异的自然数倒数之和.

于是结论对任何自然数 $m$ 成立.

11·8　设 $n$ 是固定的正整数.求出满足下述性质的所有正整数的和:在二进制的数字表示中,正好是由 $2n$ 个数字组成,其中有 $n$ 个 1,以及 $n$ 个 0,但第一个数字不是 0.

（第 23 届加拿大数学竞赛,1991 年）

**[解]**　(1)$n=1$ 时,由题设只有$(10)_2=2$.
即所求的和为 2.

(2)$n\geqslant 2$ 时,第一个数字为 1,则其余 $2n-1$ 位有 $n-1$ 个位置放 1，$n$ 个位置放 0,所以共有 $C_{2n-1}^{n-1}$ 种可能.

又考虑除第一位之外的任一数位,其数字为 1 的有 $C_{2n-2}^{n-2}$ 个数,其数字为 0 的有 $C_{2n-2}^{n-1}$ 个数.于是在此数位上的数字和为

$$C_{2n-2}^{n-2}=C_{2n-2}^{n}.$$

因此,所有数的和为

$$\begin{aligned}&C_{2n-2}^{n}(1+2+\cdots+2^{2n-2})+C_{2n-1}^{n-1}2^{2n-1}\\=&C_{2n-2}^{n}(2^{2n-1}-1)+C_{2n-1}^{n}2^{2n-1}.\end{aligned}$$

11·9　对 $0\leqslant k\leqslant n$.　令 $a_n,b_n$ 为 mod 3 分别与 1,2 同余的二项式系数 $C_n^k$ 的个数.证明对所有的 $n$，$a_n>b_n$.

（加拿大数学奥林匹克训练题,1989 年）

**[证]**　对 $n$ 采用三进制的表示法,令

$$n=\sum_{i=0}^{N-1}c_i\cdot 3^i,\quad c_i\in\{0,1,2\}.$$

则

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}C_n^kx^k&=(x+1)^n\\&=\prod_{i=0}^{N-1}(x+1)^{c_i\cdot 3^i}\\&\equiv\prod_i(x^{3^i}+1)^{c_i}\\&=\prod_i\sum_{d_i=0}^{c_i}C_{c_i}^{d_i}x^{d_i\cdot 3^i}\end{aligned}$$

第十一章　k进制记数法

$$= \sum_{k=0}^{n} \prod_{i} C_{c_i}^{d_i} x^k \quad (\bmod 3). \qquad ①$$



其中$\sum_{i=0}^{N-1} d_i 3^i = k$， 即$k$的三进制表示， 并约定$C_0^0 = 1$,及$a < b$时$C_a^b = 0$.

于是比较①式两边$x^k$的系数得

$$C_n^k \equiv \prod_{i} C_{c_i}^{d_i} \quad (\bmod 3). \qquad ②$$

设$c_i(0 \leqslant i \leqslant N-1)$中有$l$个等于2， $m$个等于1,其余的为0,则仅在相应于$l$个2的$d_i$中有奇数个为1,其余的为0或2,相应于$m$个1的$d_i$为0或1,相应于$N-l-m$个0的$d_i$为0时,$C_n^k \equiv 2 \pmod 3$.

因此

$$b_n = \sum_j C_l^{2j+1} 2^{l-(2j+1)} \cdot 2^m.$$

而
$$a_n = \sum_j C_l^{2j} 2^{l-2j} \cdot 2^m,$$

因此

$$\begin{aligned} a_n - b_n &= 2^m\Big(\sum_j C_l^{2j} 2^{l-2j} - \sum_j C_l^{2j+1} 2^{l-(2j+1)}\Big) \\ &= 2^m \cdot (2-1)^l \\ &= 2^m > 0. \end{aligned}$$

因此 $a_n > b_n$.

**11·10** 证明在数$[2^k \cdot \sqrt{2}]$中有无穷多个合数.

（第34届莫斯科数学奥林匹克,1971年）

**[证1]** 设$a_k = [2^k \cdot \sqrt{2}]$.

我们证明,在数列$\{a_k\}$中有无穷多个偶数,从而在数列$\{a_k\}$中有无穷多个合数.

若数列$\{a_k\}$从某一项起都是奇数,那么在它们的二进制记法中就都以1结尾,这时在$\sqrt{2}$的二进制记法中,从某个位置开始就出现1,这与$\sqrt{2}$的无理性矛盾.因此,不可能出现$\{a_k\}$从某一项起都是奇数的情形.

**[证2]** 设 $2^n\sqrt{2} = [2^n\sqrt{2}] + \alpha$， $0 < \alpha < 1$.

如果$0 < \alpha < \frac{1}{2}$,则

$$2^{n+1}\sqrt{2} = 2[2^n\sqrt{2}] + 2\alpha.$$

从而$[2^{n+1}\sqrt{2}] = 2[2^n\sqrt{2}]$是偶数,因而是合数.

如果$\frac{1}{2} \leqslant \alpha < 1$,则

$$\begin{aligned} & 2^{n+1}\sqrt{2} \\ = & 2[2^n\sqrt{2}] + 2\alpha, \\ & [2^{n+1}\sqrt{2}] \\ = & 2[2^n\sqrt{2}] + 1 + [2\alpha] - 1 \\ = & 2[2^n\sqrt{2}] + 1 \end{aligned}$$

为奇数.

此时由$2\alpha - [2\alpha] < \alpha$可知,用2的一系列方幂去乘$2^n \cdot \sqrt{2}$,每乘一次都可使结果中的小数部分减小,直到它小于$\frac{1}{2}$,这时再进行一次乘2的运算就又得到偶数.

因而在$[2^n\sqrt{2}]$中有无穷多个偶数,即有无穷多个合数.

11·11 设$n$是合数,$p$是$n$的真因数,试求最小的正整数$N$(用二进制表示),使得$(1 + 2^p + 2^{n-p})N - 1$能被$2^n$整除.

(第31届国际数学奥林匹克预选题,1990年)

**[解]** 显然,满足题设要求的最小正整数$N$应满足

$$(1 + 2^p + 2^{n-p})N \equiv 1 \pmod{2^n}. \quad ①$$

因为$p$是$n$的真因数,则$p > 1$,因而

$$(1 + 2^p + 2^{n-p},\quad 2^n) = 1.$$

因此,满足①且小于$2^n$的自然数$N$是惟一的,这个$N$就是所求的数.

不难看出,①等价于

$$(1 + 2^p + 2^{n-p} + 2^n)N \equiv 1 \pmod{2^n},$$

即 $$(1 + 2^p)(1 + 2^{n-p})N \equiv 1 \pmod{2^n}. \quad ②$$

设$n = mp$, $m > 1$,于是

$$(1 + 2^p)\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k 2^{kp} \equiv 1 - (-1)^m 2^n \equiv 1 \pmod{2^n}.$$

另一方面,又有 $n-2p\geqslant 0$,所以

$$\begin{aligned}&(1+2^{n-p})(1-2^{n-p})\\ \equiv\ &1-2^{n}2^{n-2p}\\ \equiv\ &1\pmod{2^{n}}.\end{aligned}$$

从而有

$$(1+2^{p})(1+2^{n-p})(1-2^{n-p})\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^{k}2^{kp}\equiv 1\pmod{2^{n}}.$$

对比 ② 式有

$$\begin{aligned}N&\equiv(1-2^{n-p})\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^{k}2^{kp}\\ &\equiv\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^{k}2^{kp}-2^{n-p}\\ &\equiv 2^{n}-2^{n-p}+\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^{k}2^{kp}\pmod{2^{n}}.\end{aligned}$$

从而可令

$$N=2^{n}-2^{n-p}+\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^{k}2^{kp}.\qquad ③$$

则 $\qquad 1\leqslant N\leqslant 2^{n}$.

所以 $N$ 为所求的数.

现分两种情况写出 $N$ 的二进制表示.

当 $2\nmid m$ 时,由 ③ 式得

$$\begin{aligned}N&=2^{n}-2^{n-p}+2^{n-p}-2^{n-2p}+2^{n-3p}-2^{n-4p}+\cdots+2^{4p}-2^{3p}+\\ &\quad 2^{2p}-2^{p}+1\\ &=2^{n-p}(2^{p}-1)+2^{n-2p}(2^{p}-1)+2^{n-4p}(2^{p}-1)+\cdots+2^{p}(2^{p}\\ &\quad -1)+1\\ &=(\underbrace{\underbrace{11\cdots1}_{p个}\underbrace{11\cdots1}_{p个}\underbrace{00\cdots0}_{p个}\cdots\underbrace{11\cdots1}_{p个}\underbrace{00\cdots0}_{p个}\underbrace{11\cdots1}_{p个}\underbrace{00\cdots01}_{p个}}_{共\frac{n}{p}段})_{2}.\end{aligned}$$

当 $2\mid m$ 时,由 ③ 式得

$$\begin{aligned}N&=2^{n}-2^{n-p+1}+2^{n-2p}-2^{n-3p}+2^{n-4p}-2^{n-5p}+\cdots+2^{4p}-2^{3p}\\ &\quad +2^{2p}-2^{p}+1\\ &=2^{n-p+1}(2^{p-1}-1)+2^{n-3p}(2^{p}-1)+2^{n-5p}(2^{p}-1)+\cdots+\\ &\quad 2^{3p}(2^{p}-1)+2^{p}(2^{p}-1)+1\end{aligned}$$

$$= (\underbrace{\underbrace{11\cdots1}_{p-1\text{个}}\underbrace{00\cdots0}_{p+1\text{个}}\underbrace{11\cdots1}_{p\text{个}}\underbrace{00\cdots0}_{p\text{个}}\cdots\underbrace{11\cdots1}_{p\text{个}}\underbrace{00\cdots0}_{p\text{个}}\underbrace{11\cdots1}_{p\text{个}}\underbrace{00\cdots01}_{p\text{个}}}_{\text{共}\frac{n}{p}\text{段}})_2 .$$

**11·12** 给定 $n$ 个不同的自然数,试对

(1) $n = 5$, (2) $n = 1989$

证明存在某个无穷的正数等差数列,其首项不大于公差,且数列的项中恰含有 3 个或 4 个所给定的数.

(第 52 届莫斯科数学奥林匹克,1989 年)

**[证]** 对任一整数 $a$,考虑它的二进制表示:

$$a = (\overline{a_k a_{k-1} \cdots a_1})_2 = \sum_{j=1}^{k} a_j \cdot 2^{j-1},$$

其中 $a_k = 1$, $a_j = 0$ 或 1, $j = 1, 2, \cdots, k-1$.

当 $n = 5$ 时,我们先来考察所给定的5个自然数的二进制表示中的末位数 $a_1$.

如果它们不全相同,则因其中只有 0 和 1 两种情况,所以其中会有 3 个或 4 个 $a_1$ 是相同的,其余的 1 个或 2 个与它们不同.

如果这相同的 3 个或 4 个 $a_1$ 等于 1,则将等差数列的首项取作 1,将公差取作 2,于是所得的无穷的正数等差数列(为奇数列)中将含有相应的 3 个或 4 个自然数,而不含有其余的 1 个或 2 个自然数.

如果这相同的3个或4个 $a_1$ 等于0,则将这个等差数列的首项取作 2,将公差也取作 2,同样可含有相应的 3 个或 4 个自然数.

如果这 5 个自然数的二进制表示中的末位数 $a_1$ 全都相同,就再看它们的次末位数 $a_2$,如果仍全部相同,再看 $a_3, \cdots$,总之,能找到某一位数 $a_i$ 不全相同,而 $a_{i-1} \cdots a_1$ 全都相同.

于是,由 $a_i$ 中必有 3 个或 4 个是相同的,这时,如果 $(\overline{a_i a_{i-1} \cdots a_1})_2 \neq 0$,则将等差数列的首项就取作 $(\overline{a_i a_{i-1} \cdots a_1})_2$ 所对应的十进制正整数,如果 $(\overline{a_i a_{i-1} \cdots a_1})_2 = 0$,就将首项取作 $2^i$,并且都将公差取作 $2^i$,于是所得的正数无穷等差数列即能满足要求.则 $n = 5$ 时,结论成立.

下面证明 $n = 1989$ 时结论成立.

假设对任何 $5 \leqslant n \leqslant m$,结论成立.我们证明 $n = m + 1$ 时,结论成立.

数论卷

我们依次考察这 $m+1$ 个自然数的二进制表示中的各位数字 $a_1$，$a_2$，…，直到找到某一位数 $a_i$ 不全相同，而 $a_{i-1}, a_{i-2}, \cdots, a_1$ 全都相同.由于 $a_i \in \{0,1\}$，则至少有 $\left[\frac{m+1}{2}\right]+1$ 个数等于 0，或至少有 $\left[\frac{m+1}{2}\right]+1$ 个数等于1，但均不会超过 $m$ 个，对至少有 $\left[\frac{m+1}{2}\right]+1$ 的那些 $a_i$ 所对应的自然数，它们的数目在5至 $m$ 之间，使用归纳假设，如果它们的数目恰有3或4个就直接处理，这样对 $n=m+1$ 时，结论也成立.

从而由数学归纳法证明了对 $n \geqslant 5$ 的自然数结论都成立.

11·13　以 $\alpha(n)$ 表示正整数 $n$ 的二进制表示式中1的个数.证明

(1) $\alpha(n^2) \leqslant \frac{1}{2}\alpha(n)[\alpha(n)+1]$；

(2) 上式中的等号对无穷多个整数成立；

(3) 存在数列 $(n_i)_1^\infty$，使得

$$\frac{\alpha(n_i^2)}{\alpha(n_i)} \to 0, \quad i \to \infty.$$

（第33届国际数学奥林匹克预选题，1992年）

［证］　(1) 首先可用数学归纳法证得 $\alpha(n)$ 具有半可加性，亦即

$$\alpha(n+m) \leqslant \alpha(n)+\alpha(m).$$

下面利用这一事实证明不等式(1).

如果 $n=1$，则 $\alpha(1^2)=1$，　$\alpha(1)=1$，

$$\frac{1}{2}\alpha(1)[\alpha(1)+1]=1.$$

因而不等式 $\alpha(n^2) \leqslant \frac{1}{2}\alpha(n)[\alpha(n)+1]$ 成立；

假设对于一切 $1 \leqslant n < N$，不等式均已成立，下证 $k=N$ 时成立.则当 $N=2n$ 时，有

$$\begin{aligned}\alpha(N^2) &= \alpha(4n^2) = \alpha(n^2) \\ &\leqslant \frac{1}{2}\alpha(n)[\alpha(n)+1] \\ &= \frac{1}{2}\alpha(N)[\alpha(N)+1];\end{aligned}$$

当 $N=2n+1$ 时，有

$$\alpha(N^2) = \alpha(4n^2+4n+1)$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \alpha(n^2+n)+1\\
&\leqslant \alpha(n^2)+\alpha(n)+1\\
&\leqslant \frac{1}{2}\alpha(n)[\alpha(n)+1]+\alpha(n)+1\\
&=\frac{1}{2}[\alpha(n)+1][\alpha(n)+2]\\
&=\frac{1}{2}[\alpha(2n)+1][\alpha(2n)+1+1]\\
&=\frac{1}{2}\alpha(2n+1)[\alpha(2n+1)+1]\\
&=\frac{1}{2}\alpha(N)[\alpha(N)+1].
\end{aligned}
$$

于是对所有 $n$， $\alpha(n^2)\leqslant \frac{1}{2}\alpha(n)[\alpha(n)+1]$ 成立.

(2) 取 $n=2+\sum_{j=2}^{m}2^{2^j}$. 则

$$\alpha(n)=m,$$

且 $$n^2=2^2+\sum_{j=2}^{m}2^{2^{j+1}}+\sum_{j=2}^{m}2^{2+2^j}+\sum_{2\leqslant i<j\leqslant m}2^{1+2^i+2^j}.$$

该和式中的所有项互不相同,因此

$$
\begin{aligned}
\alpha(n^2)&=1+(m-1)+(m-1)+\frac{1}{2}(m-1)(m-2)\\
&=\frac{1}{2}m(m+1)\\
&=\frac{1}{2}\alpha(n)[\alpha(n)+1].
\end{aligned}
$$

于是,有无穷多个整数 $n$,使等式

$$\alpha(n^2)=\frac{1}{2}\alpha(n)[\alpha(n)+1]$$

成立.

(3) 取 $n=2^{2^m}-1-\sum_{j=1}^{m}2^{2^m-2^j}$,其中 $m>1$,则

$$\alpha\left(n+\sum_{j=1}^{m}2^{2^m-2^j}\right)=2^m.$$

这表明 $$\alpha(n)=2^m-m.$$

将 $n$ 平方并化简得

$$n^2 = 1 - 2^{2^m+1} + \sum_{j=1}^{m} 2^{2^m-2^j+1} - \sum_{j=1}^{m} 2^{2^{m+1}-2^j}$$



及
$$\alpha(n^2) = 1 + \frac{1}{2}m(m+1).$$

因此,当 $m \to \infty$ 时,

$$\frac{\alpha(n^2)}{\alpha(n)} = \frac{1+\frac{1}{2}m(m+1)}{2^m - m} \to 0.$$

**11·14** $n$ 为非负整数. 由 $f(0)=0$, $f(1)=1$, $f(n)=f\left(\left[\frac{n}{2}\right]\right)+n-2\left[\frac{n}{2}\right]$ 确定 $f(n)$. 求在 $0 \leqslant n \leqslant 1991$ 时, $f(n)$ 的最大值.(这里 $[x]$ 表示不超过 $x$ 的最大整数)

(日本数学奥林匹克,1991 年)

**[解]** 将 $n$ 表示成二进制数:

$$n = (\overline{a_k a_{k-1} \cdots a_2 a_1})_2.$$

这里 $a_i = 0$ 或 1, $i = 1,2,\cdots,k$,则

$$\left[\frac{n}{2}\right] = (\overline{a_k a_{k-1} \cdots a_2})_2.$$

$$\begin{aligned}
f(n) &= f((\overline{a_k a_{k-1} \cdots a_2 a_1})_2) \\
&= f\left(\left[\frac{n}{2}\right]\right) + n - 2\left[\frac{n}{2}\right] \\
&= f((\overline{a_k a_{k-1} \cdots a_2})_2) + a_1 \\
&= f((\overline{a_k a_{k-1} \cdots a_3})_2) + a_2 + a_1. \\
&= \cdots. \\
&= a_k + a_{k-1} + \cdots + a_2 + a_1.
\end{aligned}$$

于是 $f(n)$ 等于 $n$ 的二进制表示中数码 1 的个数.

由于
$$0 < 2^{10} - 1 < 1991 < 2^{11} - 1,$$

故 $n$ 最多是有 11 位的二进制数,但 $n$ 的数码可有 10 个 1,但不能有 11 个 1.

因此,$f(n)$ 的最大值为 10.

**11·15** $m$ 为正整数,定义 $f(m)$ 为 $m!$ 中因数 2 的个数(即满足 $2^k \mid m!$ 的最大整数 $k$). 证明有无穷多个正整数 $m$,满足 $m - f(m) =$

1989.

（第 30 届国际数学奥林匹克候选题，1989 年）

［证］ 将 $m$ 用二进制表示，即

$$m=\sum_{j=1}^{n}2^{r_j}=2^{r_n}+2^{r_{n-1}}+\cdots+2^{r_1},$$

其中整数 $r_n>r_{n-1}>\cdots>r_1\geqslant 0$. 这时

$$\begin{aligned}f(m)&=\left[\frac{\sum_j 2^{r_j}}{2}\right]+\left[\frac{\sum_j 2^{r_j}}{2^2}\right]+\left[\frac{\sum_j 2^{r_j}}{2^3}\right]+\cdots\\&=\sum_j 2^{r_j-1}+\sum_j 2^{r_j-2}+\sum_j 2^{r_j-3}+\cdots\\&=\sum_j(2^{r_j-1}+2^{r_j-2}+\cdots+1)\\&=\sum_j(2^{r_j}-1)\\&=m-n.\end{aligned}$$

所以 $m-f(m)$ 等于 $m$ 在二进制中的非零数字的个数 $n$.

因为有无数多个 $m$ 的二进制表示中恰有 1989 个非零数字. 因此有无穷多个正整数 $m$，满足

$$n=m-f(m)=1989.$$

11·16 设 $n$ 为正整数. 求多项式 $u_n(x)=(x^2+x+1)^n$ 中奇系数的个数.

（第 29 届国际数学奥林匹克候选题，1988 年）

［解］ 设 $u_n(x)=(x^2+x+1)^n$ 中奇系数有 $f(n)$ 个.

由 $$u_1(x)=x^2+x+1,$$

则 $$f(1)=3.$$

又
$$\begin{aligned}&(x^2+x+1)^{2^k}\\=&[(x^2+x+1)^2]^{2^{k-1}}\\\equiv&(x^4+x^2+1)^{2^{k-1}}\pmod 2\\\equiv&(x^8+x^4+1)^{2^{k-2}}\pmod 2\end{aligned}$$

$$\equiv \cdots$$

$$\equiv x^{2^{k+1}} + x^{2^k} + 1 \pmod 2.$$

所以 $f(2^k) = 3.$

将 $n$ 用二进制表示为

$$n = a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 + \cdots + a_m \cdot 2^m, \quad ①$$

其中 $a_i \in \{0,1\}, \quad i = 0,1,2,\cdots,m.$

将 ① 中连续的非零项并在一起,改写 ① 为

$$n = n_1 \cdot 2^{k_1} + n_2 \cdot 2^{k_2} + \cdots + n_l \cdot 2^{k_l}.$$

其中

$$k_1 < k_2 < \cdots < k_l.$$

$$n_1 = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{h_1}, \ h_1 + k_1 < k_2 - 1,$$

$$n_2 = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{h_2}, \ h_2 + k_2 < k_3 - 1,$$

$$\cdots\cdots$$

$$n_l = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{h_l}.$$

(例如,$n = 1 + 2 + 2^2 + 2^4 + 2^5 + 2^{11} + 2^{12} + 2^{13} + 2^{15}$,则 $k_1 = 0, \quad n_1 = 1 + 2 + 2^2, \quad k_2 = 4, \quad n_2 = 1 + 2, \quad k_3 = 11,$ $n_3 = 1 + 2 + 2^2, \quad k_4 = 15, \quad n_4 = 1$),则

$$(x^2 + x + 1)^n$$

$$= (x^2 + x + 1)^{n_1 \cdot 2^{k_1}} (x^2 + x + 1)^{n_2 \cdot 2^{k_2}} \cdots (x^2 + x + 1)^{n_l \cdot 2^{k_l}}$$

$$\equiv (x^{2^{k_1+1}} + x^{2^{k_1}} + 1)^{n_1} \cdots (x^{2^{k_l+1}} + x^{2^{k_l}} + 1)^{n_l} \pmod 2.$$

由于 $n_1 \cdot 2^{k_1+1} + n_2 \cdot 2^{k_2+1} + \cdots + n_i \cdot 2^{k_i+1}$

$$< 2^{h_1+k_1+2} + n_2 \cdot 2^{k_2+1} + \cdots + n_i \cdot 2^{k_i+1}$$

$$< (n_2 + 1) \cdot 2^{k_2+1} + \cdots + n_i \cdot 2^{k_i+1}$$

$$= 2^{h_2+k_2+2} + \cdots + n_i \cdot 2^{k_i+1}$$

$$\leqslant \cdots \leqslant 2^{h_i+k_i+2} \leqslant 2^{k_{i+1}} \leqslant n_{i+1} \cdot 2^{k_{i+1}}.$$

所以在乘方运算完成(对 mod 2) 后,对

$$(x^{2^{k_1+1}} + x^{2^{k_1}} + 1)^{n_1} (x^{2^{k_2+1}} + x^{2^{k_2}} + 1)^{n_2} \cdots (x^{2^{k_l+1}} + x^{2^{k_l}} + 1)^{n_l}$$

施行乘法时,每一步得到的每个单项式 $x^m$ 都没有同类项,并且它的系数为 1. 于是共有

$$f(n_1)\cdot f(n_2)\cdots f(n_l)$$

个奇系数,即

$$f(n)=f(n_1)\cdot f(n_2)\cdots f(n_l).$$

剩下的问题是求出 $f(1+2+2^2+\cdots+2^k)$.

我们证明

$$f(1+2+2^2+\cdots+2^k)=2\left[\frac{2^{k+2}-1}{3}\right]+1. \qquad ②$$

这里$[x]$表示不超过 $x$ 的最大整数.

显然有

$$k=0\text{ 时},\quad f(1)=3,$$
$$k=1\text{ 时},\quad f(3)=5.$$

对于一般情况,我们有以下结论:

若 $k$ 为偶数,则

$$(x^2+x+1)^{2^{k-1}+2^{k-2}+\cdots+1}$$
$$\equiv x^{2^{k+1}-2}+x^{2^{k+1}-3}+x^{2^{k+1}-5}+x^{2^{k+1}-6}+\cdots+x^{2^k+2}+x^{2^k+1}+x^{2^k-1}$$
$$+x^{2^k-3}+x^{2^k-4}+x^{2^k-6}+x^{2^k-7}+\cdots+x+1 \pmod 2. \qquad ③$$

若 $k$ 为奇数,则

$$(x^2+x+1)^{2^{k-1}+2^{k-2}}+\cdots+1$$
$$\equiv x^{2^{k+1}-2}+x^{2^{k+1}-3}+x^{2^{k+1}-5}+x^{2^{k+1}-6}+\cdots+x^{2^k+3}+x^{2^k+2}+x^{2^k}$$
$$+x^{2^k-1}+x^{2^k-2}+x^{2^k-4}+x^{2^k-5}+x^{2^k-7}+x^{2^k-8}+\cdots$$
$$+x+1 \pmod 2. \qquad ④$$

③ 式的右边的项数为

$$\frac{2^k-1}{3}\cdot 2^2+1.$$

④ 式的右边的项数为

$$\frac{2^k-2}{3}\cdot 2^2+1.$$

对于③, ④不难用数学归纳法给予证明.

奠基是显然的.

设 $k$ 为偶数,且③, ④成立,则

$$(x^2+x+1)^{2^k+2^{k-1}+\cdots+1}$$

$$= (x^2+x+1)(x^2+x+1)^{2^k+2^{k-1}+\cdots+2}$$

$$\equiv (x^2+x+1)(x^4+x^2+1)^{2^{k-1}+2^{k-2}+\cdots+1}$$

$$\equiv (x^2+x+1)(x^{2^{k+2}-4}+x^{2^{k+2}-6}+x^{2^{k+2}-10}+x^{2^{k+2}-12}+\cdots$$
$$+x^{2^{k+1}+4}+x^{2^{k+1}+2}+x^{2^{k+1}-2}+x^{2^{k+1}-6}+x^{2^{k+1}-8}+x^{2^{k+1}-12}$$
$$+x^{2^{k+1}-14}+\cdots+x^2+1)$$

$$\equiv x^{2^{k+2}-2}+x^{2^{k+2}-3}+x^{2^{k+2}-5}+x^{2^{k+2}-6}+\cdots+x^{2^{k+1}+3}+x^{2^{k+1}+2}$$
$$+x^{2^{k+1}}+x^{2^{k+1}-1}+x^{2^{k+1}-2}+x^{2^{k+1}-4}+x^{2^{k+1}-5}+x^{2^{k+1}-7}$$
$$+x^{2^{k+1}-8}+\cdots+x+1 \pmod 2.$$

$$(x^2+x+1)^{2^{k+1}+2^k+\cdots+1}$$

$$= (x^2+x+1)(x^2+x+1)^{2^{k+1}+2^k+\cdots+2}$$

$$\equiv (x^2+x+1)(x^4+x^2+1)^{2^k+2^{k-1}+\cdots+1}$$

$$\equiv (x^2+x+1)(x^{2^{k+3}-4}+x^{2^{k+3}-6}+x^{2^{k+3}-10}+x^{2^{k+3}-12}+\cdots$$
$$+x^{2^{k+2}+6}+x^{2^{k+2}+4}+x^{2^{k+2}}+x^{2^{k+2}-2}+x^{2^{k+2}-4}+x^{2^{k+2}-8}$$
$$+x^{2^{k+2}-10}+x^{2^{k+2}-14}+x^{2^{k+2}-16}+\cdots+x^2+1)$$

$$\equiv x^{2^{k+3}-2}+x^{2^{k+3}-3}+x^{2^{k+3}-5}+x^{2^{k+3}-6}+\cdots+x^{2^{k+2}+2}+x^{2^{k+2}+1}$$
$$+x^{2^{k+2}-1}+x^{2^{k+2}-3}+x^{2^{k+2}-4}+x^{2^{k+2}-6}+x^{2^{k+2}-7}+\cdots+x+1$$
$$\pmod 2.$$

因此,③, ④ 对一切自然数都成立.

从而可知,② 式成立.

11·17　求具有以下性质的最小的自然数 $n$,并予以证明$\frac{1}{n}$ 的二进制表示中,1 至 1990 的二进制表示全部在小数点后出现(由连续的数字组成).

(第 31 届国际数学奥林匹克候选题,1990 年)

[解]　所求的最小自然数 $n = 2053$.

设 $n < 2053$,且为具有题设所述的性质的最小自然数.

显然,$n$ 为奇数,否则$\frac{n}{2}$ 仍具有所述性质.

二进制小数$\frac{1}{n} = 0.\overline{a_0a_1a_2a_3\cdots}$

是循环小数,即存在一个最小正周期 $e$,使得对所有的 $v, a_{v+e} = a_v$.

这表明

$$2^s \equiv 1 \pmod n \Longleftrightarrow e \mid s.$$

对 $1 \leqslant k \leqslant 9, 2^{9-k}$ 个满足

$1024 + 2^{9-k} \leqslant r < 1024 + 2^{10-k} (\leqslant 1536 < 1990)$ 的数 $r$,它的二进表示的开始部分是长为 $k+1$ 的块"100…0",$r = 1024$ 本身则是长为 11 的块"100…0".

从 1536 至 1990,以及从 996 至 1023 这 483 个数,开始的部分是长为 1 的块 1.

以上这些均在 $\frac{1}{n} = 0.\overline{a_0a_1a_2a_3}\cdots$ 的一个完整周期中出现.(不妨设这个周期是以数字 1 开始),而且互不相交(注意 $996 > \frac{1990}{2}$),从而

$$e \geqslant \sum_{k=1}^{9} 2^{9-k}(k+1) + 11 + 483 = 2018.$$

设 $\varphi(n)$ 为欧拉函数,由于

$$e \mid \varphi(n) < n < 2053,$$

所以
$$e = \varphi(n).$$

如果 $n$ 不是素数,则 $n$ 有 $\leqslant \sqrt{n}$ 的素因数 $p$,从而有

$$\varphi(n) \leqslant \left(1 - \frac{1}{p}\right)n \leqslant n - \sqrt{n} < 2053 - 45 = 2008$$

与 $e \geqslant 2018$ 矛盾.

因此 $n$ 是素数.

若
$$v \equiv 2^k \pmod n, 0 < v < n,$$

则
$$\frac{v}{n} = 0.\overline{a_ka_{k+1}a_{k+2}\cdots},$$

于是对每个 $r$: $1024 \leqslant r \leqslant 1990$,有

$$0 < v_r < n,$$

并且
$$\frac{r}{2048} < \frac{r}{n} < \frac{r+1}{2048}.$$

$\frac{v_r}{n}$ 的前 11 位与 $\frac{r}{2048}$ 相同.

由于自然数 $v_r$ 随 $r$ 严格递增,则

$$\frac{1990+1}{2048}-\frac{1024}{2048}>\frac{v_{1990}-v_{1024}}{n}\geqslant\frac{966}{n},$$

$$n>\frac{966}{967}\cdot 2048>2045.$$



由于 $2047=23\cdot 89$, $2049=3\cdot 683$, $2051=7\cdot 293$ 都是合数，所以在 2045 与 2053 之间(不包括 2053) 没有素数，与 $n$ 为素数矛盾.

于是 $n<2053$ 不具有题中所述性质.

现在证明 $n=2053$ 满足要求.

由于 $n=2053$ 是素数，则

$$e\mid\varphi(n)=2052=2^2\cdot 3^3\cdot 19.$$

$$2^{11}\equiv -5\pmod{2053}.$$

$$(-5)^7\equiv -78125\equiv -111\pmod{2053}.$$

所以 $$2^{154}\equiv(-111)^2=12321\equiv 3\pmod{2053}.$$

$$2^{3^2\cdot 19}=2^{154}\cdot 2^{11}\cdot 2^6\equiv -3\cdot 5\cdot 64\equiv -960\pmod{2053}.$$

$$2^{3^3\cdot 19}\equiv -960^3\equiv -921600\cdot 960$$
$$\equiv 197\cdot 960\equiv 189120\equiv 244\pmod{2053}.$$

由此得到 $$4\mid e,$$

并且 $$x^4\equiv 1\pmod{2053}$$

的解为 $\{\pm 1,\pm 244\}$，而 $-960$ 不是它的解.

从而 $$2^{2^2\cdot 3^2\cdot 19}\not\equiv 1\pmod{2053},\quad 3^3\mid e.$$

由于 $$2^{3^3}=2^{27}\equiv(-5)^2\cdot 2^5\equiv 25\cdot 32\equiv 800\pmod{2053},$$

所以 $$2^{2^2\cdot 3^3}\not\equiv 1\pmod{2053},\quad 19\mid e.$$

由 $4\mid e$, $3^3\mid e$, $19\mid e$，则

$$4\cdot 3^3\cdot 19=2052\mid e.$$

于是 $$e=2052.$$

因为 $n>2048=2^{11}$，对于 $1\leqslant r\leqslant 1990$, 有 $v$,

$$1<v<n,$$

$$\frac{r}{2048}<\frac{v}{n}<\frac{r+1}{2048}.$$

因为 $$e=\varphi(n)=n-1=2052,$$

所以有 $k$，使 $$v\equiv 2^k\pmod{2053}.$$

从而 $a_k\cdots a_{k+10}$ 是 $r$ 的二进表示(可能从若干个0开头).

于是证明了 $n=2053$ 是满足题目要求的最小自然数.

11·18　证明对任意自然数 $n$,二项式系数 $C_n^h(0\leqslant h\leqslant n)$ 中,奇数的个数是2的幂.

(第31届国际数学奥林匹克候选题,1990年)

[证]　将 $n$ 用二进制表示:

$$n=2^{\alpha_1}+2^{\alpha_2}+\cdots+2^{\alpha_k}(\alpha_1>\alpha_2>\cdots>\alpha_k),\text{则有}$$

$$(1+x)^n=(1+x)^{2^{\alpha_1}}(1+x)^{2^{\alpha_2}}\cdots(1+x)^{2^{\alpha_k}}.$$

因此　$$(1+x)^n\equiv(1+x^{2^{\alpha_1}})(1+x^{2^{\alpha_2}})\cdots(1+x^{2^{\alpha_k}})\pmod 2.$$

上式中右边的多项式共有 $2^k$ 项,它们的系数为1(奇数),因此 $(1+x)^n$ 的展开式中,恰有 $2^k$ 项系数 $C_n^h$ 为奇数.

11·19　设 $N$ 为正整数集,在 $N$ 上定义函数 $f$ 如下:

(i) $f(1)=1,\quad f(3)=3;$

(ii) 对 $n\in N$,　有

$$f(2n)=f(n),$$
$$f(4n+1)=2f(2n+1)-f(n),$$
$$f(4n+3)=3f(2n+1)-2f(n).$$

试求所有的 $n$,使 $n\leqslant1988$,且 $f(n)=n$.

(第29届国际数学奥林匹克,1988年)

[解]　由已知公式可得到下表:

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(n)$ | 1 | 1 | 3 | 1 | 5 | 3 | 7 | 1 | 9 | 5 | 13 | 3 | 11 | 7 | 15 | 1 | 17 |

这张表说明,在 $n\leqslant17$ 的范围内,我们有

$$f(2^k)=1,\quad f(2^k-1)=2^k-1,\quad f(2^k+1)=2^k+1.$$

这启发我们从二进制的角度来讨论问题,将上面的表格改写为二进制表示.

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(n)$ | 1 | 1 | 3 | 1 | 5 | 3 | 7 | 1 | 9 |
| $n_{(2)}$ | 1 | 10 | 11 | 100 | 101 | 110 | 111 | 1000 | 1001 |
| $f(n)_{(2)}$ | 1 | 01 | 11 | 001 | 101 | 011 | 111 | 0001 | 1001 |

| $n$ | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $f(n)$ | 5 | 13 | 3 | 11 | 7 | 15 | 1 | 17 |
| $n_{(2)}$ | 1010 | 1011 | 1100 | 1101 | 1110 | 1111 | 10000 | 10001 |
| $f(n)_{(2)}$ | 0101 | 1101 | 0011 | 1011 | 0111 | 1111 | 00001 | 10001 |

由此我们猜想：$f(n)$ 的值等于 $n$ 的二进制展开式的反向排列所形成的二进制数.

下面用数学归纳法证明这个猜想.

由于 $f(2n)=f(n)$，所以只须考虑 $n$ 为奇数的情形.

(1) 如果 $n$ 具有 $4m+1$ 的形式.

设 $4m+1=a_k\cdot 2^k+a_{k-1}\cdot 2^{k-1}+\cdots+a_1\cdot 2^1+a_0\cdot 1$，其中 $a_i\in\{0,1\}$， $i=0,1,2,\cdots,k$，且 $a_k=1$.

显然，$a_0=1, a_1=0$.

所以
$$4m=a_k\cdot 2^k+a_{k-1}\cdot 2^{k-1}+\cdots+a_2\cdot 2^2,$$
$$m=a_k\cdot 2^{k-2}+a_{k-1}\cdot 2^{k-3}+\cdots+a_3\cdot 2+a_2,$$
$$2m+1=a_k\cdot 2^{k-1}+a_{k-1}\cdot 2^{k-2}+\cdots+a_3\cdot 2^2+a_2\cdot 2+1.$$

由归纳假设有
$$f(m)=a_k+a_{k-1}\cdot 2+\cdots+a_3\cdot 2^{k-3}+a_2\cdot 2^{k-2},$$
$$f(2m+1)=a_k+a_{k-1}\cdot 2+\cdots+a_3\cdot 2^{k-3}+a_2\cdot 2^{k-2}+2^{k-1},$$

下面计算 $f(4m+1)$.

$$\begin{aligned}&f(4m+1)\\&=2f(2m+1)-f(m)\\&=(a_k\cdot 2+a_{k-1}\cdot 2^2+\cdots+a_3\cdot 2^{k-2}+a_2\cdot 2^{k-1}+2^k)-(a_k\\&\quad+a_{k-1}\cdot 2+\cdots+a_3\cdot 2^{k-3}+a_2\cdot 2^{k-2})\\&=a_k+a_{k-1}\cdot 2+\cdots+a_3\cdot 2^{k-3}+a_2\cdot 2^{k-2}+a_1\cdot 2^{k-1}+a_0\cdot 2^k.\end{aligned}$$

所以 $f(4m+1)$ 恰为 $4m+1$ 的二进制展开式的反向排列.

于是 $n=4m+1$ 时猜想成立.

(2) 如果 $n$ 具有 $4m+3$ 的形式.

设 $4m+3$
$$=a_k\cdot 2^k+a_{k-1}\cdot 2^{k-1}+\cdots+a_3\cdot 2^3+a_2\cdot 2^2+a_1\cdot 2+a_0,$$

其中 $a_i \in \{0,1\}$，且 $a_k = 1$，显然 $a_0 = a_1 = 1$.

所以 $4m = a_k \cdot 2^k + a_{k-1} \cdot 2^{k-1} + \cdots + a_2 \cdot 2^2$,

$$m = a_k \cdot 2^{k-2} + a_{k-1} \cdot 2^{k-3} + \cdots + a_2,$$

$$2m + 1 = a_k \cdot 2^{k-1} + a_{k-1} \cdot 2^{k-2} + \cdots + a_2 \cdot 2 + 1.$$

由归纳假设

$$f(m) = a_k + a_{k-1} \cdot 2 + \cdots + a_2 \cdot 2^{k-2},$$

$$f(2m+1) = a_k + a_{k-1} \cdot 2 + \cdots + a_2 \cdot 2^{k-2} + 2^{k-1}.$$

下面计算 $f(4m+3)$.

$$\begin{aligned} & f(4m+3) \\ &= 3f(2m+1) - 2f(m) \\ &= a_k + a_{k-1} \cdot 2 + \cdots + a_2 \cdot 2^{k-2} + 3 \cdot 2^{k-1} \\ &= a_k + a_{k-1} \cdot 2 + \cdots + a_2 \cdot 2^{k-2} + 2^{k-1} + 2^k \\ &= a_k + a_{k-1} \cdot 2 + \cdots + a_2 \cdot 2^{k-2} + a_1 \cdot 2^{k-1} + a_0 \cdot 2^k. \end{aligned}$$

所以 $f(4m+3)$ 恰为 $4m+3$ 的二进制展开式的反向排列.

于是 $n = 4m + 3$ 时猜想成立.

由以上，对所有 $n \in N$，猜想成立.

设 $n = (\overline{t_1 t_2 \cdots t_m})_2$ 是 $n$ 的二进制表示，则满足 $f(n) = n$ 的数 $n$ 应具有下面的对称形式

$$(\overline{t_1 t_2 \cdots t_m})_2 = (\overline{t_m \cdots t_2 t_1})_2.$$

容易验证，无论 $m = 2m_1$，还是 $m = 2m_1 - 1$，恰有 $m$ 位的二进制对称数都恰有 $2^{m_1-1}$ 个.

所以，小于 $2^{11} = 2048$ 的二进制对称数共有

$$2(2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + 2^5 = 94(\text{个}).$$

因为 $1988 = (11111000100)_2$，而满足 $1988 < n < 2048$ 的二进对称数只有 $(11111011111)_2$ 和 $(11111111111)_2$ 这两个，从而满足 $n \leqslant 1988$ 且 $f(n) = n$ 的数 $n$ 共 92 个.

**11·20** 一个正整数称为“坏数”，如果它的二进制表示中数码 1 的个数是偶数，例如 $18 = (10010)_2$ 是“坏数”.

在正整数集合中，求前 1985 个“坏数”之和.

（英国数学奥林匹克，1985 年）

**[解]** 我们把 0 也看作是“坏数”，这样并不影响所求的结果.

先用数学归纳法证明引理：

在0到$2^n-1(n\geqslant 2)$中，“坏数”的个数与和都恰好占了它们的一半.

(1)在0到$2^2-1$中，即在0,1,2,3中，0是“坏数”，$3=(11)_2$是“坏数”，所以有2个“坏数”.且

$$0+3=\frac{1}{2}(0+1+2+3).$$

所以在0到$2^2-1$中，“坏数”的个数是它们的一半，其和也是它们的和的一半.

(2)假设在0到$2^n-1$中，“坏数”的个数与和都恰好等于它们的一半.

由于把0到$2^n-1$中的每个数都加上$2^n$，就相当于在二进制数中多了一个1，因此，0到$2^n-1$中的“坏数”都变成了“非坏数”，从而$0+2^n$到$2^n-1+2^n$即$2^n$到$2^{n+1}-1$中“坏数”的个数与和也恰好为它们的一半，因此，0到$2^{n+1}-1$中“坏数”的个数与和都恰好占了一半.

这样就用数学归纳法证明了引理.

于是，从0到$2^n-1$中“坏数”的个数为$2^{n-1}$个，它们的和为

$$\frac{1}{2}[1+2+\cdots+(2^n-1)]=2^{n-2}(2^n-1).$$

由于 $$1984=2^{10}+2^9+2^8+2^7+2^6.$$

而前$2^{10}$个“坏数”的和为$2^9(2^{11}-1)$.

前$(2^{10}+2^9)$个“坏数”的和还要加上$2^{11}$到$2^{11}+2^{10}-1$中“坏数”的和，即

$$2^{11}\cdot 2^9+2^8(2^{10}-1).$$

由此，前$2^{10}+2^9+2^8+2^7+2^6=1984$个“坏数”还要再加上

$$(2^{11}+2^{10})\cdot 2^8+2^7(2^9-1)+(2^{11}+2^{10}+2^9)\cdot 2^7$$
$$+2^6(2^8-1)+(2^{11}+2^{10}+2^9+2^8)\cdot 2^6+2^5(2^7-1).$$

于是前1986个“坏数”(包括0)(若不包括0即为前1985个“坏数”)的和为

$$2^9(2^{11}-1)+2^{11}\cdot 2^9+2^8(2^{10}-1)+(2^{11}+2^{10})\cdot 2^8$$
$$+2^7(2^9-1)+(2^{11}+2^{10}+2^9)\cdot 2^7+2^6(2^8-1)$$
$$+(2^{11}+2^{10}+2^9+2^8)\cdot 2^6+2^5(2^7-1)$$

$+(2^{11}+2^{10}+2^{9}+2^{8}+2^{7})\cdot 2+2+1$

$=2^{21}+2^{20}+2^{19}+2^{18}+2^{13}+2^{11}+2^{9}+2^{8}+2^{5}+2+1.$

这就是所求的前 1985 个"坏数"的和(十进制).

11·21　把所有 3 的方幂及互不相等的 3 的方幂的和排列成一个递增数列:1,3,4,9,10,12,13,… 求这个数列的第 100 项.

(第 4 届美国数学邀请赛,1986 年)

[解]　这个数列的每一项都是正数,其 3 进制表示只有 0 和 1 组成,所以可以在全体正整数与数列的项之间建立一一对应,使数 $n$ 的二进制表示与它所对应的数列中的三进制表示相同:

$$1=1_{(2)}\quad\leftrightarrow\quad 1_{(3)}=1,$$
$$2=10_{(2)}\quad\leftrightarrow\quad 10_{(3)}=3,$$
$$3=11_{(2)}\quad\leftrightarrow\quad 11_{(3)}=4,$$
$$4=100_{(2)}\quad\leftrightarrow\quad 100_{(3)}=9,$$
$$5=101_{(2)}\quad\leftrightarrow\quad 101_{(3)}=10,$$
$$6=110_{(2)}\quad\leftrightarrow\quad 110_{(3)}=12,$$
$$7=111_{(2)}\quad\leftrightarrow\quad 111_{(3)}=13.$$

在这个对应中,第 $k$ 个正整数对应于数列中的第 $k$ 项.

所以,为了求已知数列的第 100 项,只需在二进制中找到十进制 100 的对应数,再进而求这个对应数在三进制中的对应数即可.

$$100=1100100_{(2)}\quad\leftrightarrow\quad 1100100_{(3)}=981.$$

因此,所求数列的第 100 项是 981(十进制).

11·22　找出 8 个正整数 $n_1,n_2,\cdots,n_8$,使它们有下列性质:对于每个整数 $k$,$-1985\leqslant k\leqslant 1985$,有 8 个整数 $a_1,a_2,\cdots,a_8$,其中每个 $a_i$ 都属于集合 $\{-1,0,1\}$,使得 $k=\sum_{i=1}^{8}a_in_i$.

(第 26 届国际数学奥林匹克候选题,1985 年)

[解]　考虑 1985 的三进制表示

$$1985=2\cdot 3^6+2\cdot 3^5+3^3+3^2+3+2.$$

但是,由题设,表示式中的系数不能是 2,而 $2=3-1$,则 1985 可表示为

$$1985=3^7-3^5+3^4-3^3-3^2-3-1.$$

同样有 $1984 = 3^7 - 3^5 + 3^3 + 3^2 + 3 + 1.$

现在从 1984 开始,逐次减 1,可能出现两种情况:



一种是像 1984 这样的数,后面的若干项是正的,可以减 1,项数不会增,另一种是像 1985 这样的数,最后若干项是负数,减去 1 就会出现 $-2 \cdot 3^i \quad (i = 0,1,2,3)$,这样由于

$$-2 \cdot 3^i = -3^{i+1} + 3^i,$$

把 $-2 \cdot 3^i$ 换成 $-3^{i+1} + 3^i$,虽然多了一项,由于 1985 的表达式只有 7 项,所以多了一项之后也不会多于 8 项,而当 $i + 1 = 4$ 或 7 时,与原来前面的正项正好抵消,从而项数保持不变.

所以对于 $k \in [0,1985]$ 中的数都能用

$$k = \sum_{i=1}^{8} a_i 3^{i-1}, \quad a_i \in \{-1,0,1\} \text{ 表示.}$$

若把式中的 $a_i$ 换成它的相反数,则对于 $k \in [-1985,0]$ 也可用上式表示.

于是,题目所求的 $n_i = 3^{i-1}, \quad i = 1,2,\cdots,8.$

11·23 能否选择 1983 个不同的正整数,使它们都不大于 $10^5$ 且其中任何三数都不是等差数列中的连续项?证明你的结论.

(第 24 届国际数学奥林匹克,1983 年)

[解] 设 $T$ 是这样的正整数集合,它的元素在 3 进制表示中最多有 11 位数字,且每一位的数字都是 0 或 1,但不全为 0.

这样的正整数显然有 $2^{11} - 1 > 1983$ 个.

并且 $T$ 中的最大数是

$$1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{10} = 88573 < 10^5.$$

为此,我们选择 $T$ 中的 1983 个数,下面证明 $T$ 中任何三数都不是某个等差数列中的连续三项.

否则,若 $x,y,z \in T$,且 $x + z = 2y$.

此时 $2y$ 的 3 进制表示中必只含数字 0 和 2,从而 $x$ 和 $z$ 一定是所有对应位的数字都相同,即 $x = z$,这是不可能的.

综上,我们证明了确能选择 1983 个不同的正整数,使它们都不大于 $10^5$,且其中任何三数都不是某等差数列中的连续三项.

11·24 现有一大缸水和 5 个量杯,量杯的容积依次为 1,5,25,125,625(毫升).试证明对于不超过 1562 的整数 $a$,只要用这 5 个量杯,

每个至多用2次，就能把 $a$ 毫升的水注入空水桶中.（说明：从大缸量一杯水倒入水桶，或从水桶量一杯水倒入大缸，均算用量杯一次）

（中国江西省南昌市数学竞赛，1991年）

**[证]** 考虑多项式

$$b\cdot5^4+c\cdot5^3+d\cdot5^2+e\cdot5+f$$
$$=625b+125c+25d+5e+f.$$

其中每个字母表示用其系数相应的毫升数的量杯使用的次数.

如字母取正值，则表示从水缸中量水倒入水桶，如字母取负值，则表示从水桶中量水倒入水缸.

并令 $b,c,d,e,f$ 在 $\{-2,-1,0,1,2\}$ 中取值.则

$$625b+125c+25d+5e+f$$
$$\leqslant625\cdot2+125\cdot2+25\cdot2+5\cdot2+2$$
$$=1562.$$

又 $a=625b+125c+25d+5e+f$ 的最小值为 $-1562$.

而从 $-1562$ 到 $1562$ 之间恰有3125种取值方法.

同时 $625b+125c+25d+5e+f$ 也有 $5^5=3125$ 种不同取法.

所以多项式 $625b+125c+25d+5e+f$ 可以得到 $-1562$ 到 $1562$ 的每一个整数值.

11·25 有一个写成七进制的三位数，如果把各位数码按相反顺序写出，并把它看成是九进制的三位数，且这两数相等.求这个数.

（基辅数学奥林匹克，1956年）

**[解]** 设所求的数为 $A$.

在七进制中，A 可写为

$$A=7^2\cdot a+7\cdot b+c,$$

这里 $a,b,c\in\{0,1,2,3,4,5,6\}$，$a\neq0$.

数 A 在九进制中可表示为

$$A=9^2\cdot c+9\cdot b+a.$$

于是由题意得方程

$$7^2\cdot a+7\cdot b+c=9^2\cdot c+9\cdot b+a,$$

即

$$b=8(3a-5c).$$

于是 $b$ 是8的倍数，又 $b\in\{0,1,2,\cdots,6\}$，则只能有

$$b=0.$$

再由 $$3a-5c=0$$
及 $$a,c\in\{0,1,2,\cdots,6\},\quad a\neq 0,$$
可得 $$a=5,\quad c=3.$$

于是数 $A$ 在七进制中为$(503)_7$,在九进制中为$(305)_9$,在十进制中为

$$A=7^2\cdot 5+3=248.$$

11·26　对每个正整数 $k,n$,令 $S_k(n)$ 表示 $n$ 在 $k$ 进制中的数字和.证明对于小于 20000 的素数 $p$, $S_{31}(p)$ 至多有两个值为合数.

（第 29 届国际数学奥林匹克候选题,1988 年）

［证］　20000 在 31 进制表示中

$$20000=20\cdot 31^2+25\cdot 31+5.$$

所以小于 20000 的数,在 31 进制中的数字和不大于

$$19+30+30=79.$$

如果素数 $p<20000$,而

$$\begin{aligned}p&=a_2\cdot 31^2+a_1\cdot 31+a_0\\&=a_2\cdot 960+a_1\cdot 30+(a_2+a_1+a_0).\end{aligned}$$

则

$$a_2+a_1+a_0\leqslant 79.$$

由于 $p$ 为素数,所以 $a_2+a_1+a_0$ 不能被 2,3,5 整除,否则,若 $a_2+a_1+a_0$ 能被 2,3,5 之一整除,由于 $30\mid a_2\cdot 960$, $30\mid a_1\cdot 30$,则 $p$ 能被 2,3,5 之一整除,这是不可能的.

在不大于 79 且不能被 2,3,5 整除的合数中只有两个,即 $49=7\cdot 7$ 和 $77=7\cdot 11$.

容易验证

$$\begin{aligned}619&=19\cdot 31+30,\\709&=22\cdot 31+27,\\739&=23\cdot 31+26,\\18257&=18\cdot 31^2+30\cdot 31+29,\end{aligned}$$

等素数在 31 进制中的数字和为 49 或 77.

11·27　在几进位制中,16324 是 125 的平方.

（基辅数学奥林匹克,1954 年）

[解]　设进位制的基数为 $b$.

由题设,显然　　　$b>6$.

此时可得方程

$$b^4+6b^3+3b^2+2b+4=(b^2+2b+5)^2,$$

经整理可得　　　$2b^3-11b^2-18b-21=0,$

$$(b-7)(2b^2+3b+3)=0.$$

此方程仅有惟一的实根 $b=7$.

于是在 7 进制中,16324 是 125 的平方.

11·28　在几进位制中,$4\cdot 13=100$?

(基辅数学奥林匹克,1953 年)

[解]　设进位制的基数为 $b$.

由题设,显然　　　$b>4$.

此时可得方程

$$\begin{cases}4(1\cdot b+3)=1\cdot b^2+0\cdot b+0,\\ b>4.\end{cases}$$

从而有　　　$b^2-4b-12=0,$

$$b=6,\quad b=-2(\text{舍去}).$$

于是题设中的等式是在 6 进制中.

11·29　设 $1990=2^{\alpha_1}+2^{\alpha_2}+\cdots+2^{\alpha_n}$,其中 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为彼此两两不等的非负整数.求 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$.

(中国北京市高中一年级数学竞赛,1990 年)

[解]　$1990=1024+512+256+128+64+4+2$

$$=2^{10}+2^9+2^8+2^7+2^6+2^2+2.$$

所以 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=10+9+8+7+6+2+1=43$.

11·30　$N$ 是整数,它的 $b$ 进制表示是 777.求最小的正整数 $b$,使得 $N$ 是十进制整数的四次方.

(第 9 届加拿大数学竞赛,1977 年)

[解]　本题等价于求最小的正整数 $b$,使得方程

$$7b^2+7b+7=x^4 \qquad ①$$

对 $x$ 有整数解.

因为 7 是素数,所以由 ① 式,7 是 $x$ 的约数,为此设 $x=7k$,则 ① 式化为

$$b^2+b+1=7^3k^4.$$

最小的 $b$ 出现在 $k$ 最小的时候.

取 $k=1$,此时有

$$b^2+b+1=343,$$

$$b^2+b-342=0.$$

此时有 $(b-18)(b+19)=0.$

解得正整数 $b=18.$

我们用 $(A)_k$ 表示 $k$ 进制的数,则有

$$(777)_{18}=(7^4)_{10}.$$

11·31 设 1987 可以在 $b$ 进制中写出三位数 $\overline{xyz}$,且 $x+y+z=1+9+8+7$,试确定出所有可能的 $x,y,z$ 及 $b$.

(第 19 届加拿大数学竞赛,1987 年)

[解] 由题设,在十进制下有

$$xb^2+yb+z=1987,\quad (x\geqslant 1) \qquad ①$$

则 $$b^3>1987,\quad b^2\leqslant 1987.$$

由此得 $12<b<45.$

再由题设

$$x+y+z=1+9+8+7=25, \qquad ②$$

① - ② 得

$$(b-1)(bx+x+y)=1962.$$

所以 $b-1\mid 1962=2\cdot 9\cdot 109.$

由于 $11<b-1<44.$

所以只能有

$$b-1=18,\quad b=19.$$

即题设的 $b$ 进制为 19 进制.

把十进制的 1987 化为 19 进制表达形式:

$$\begin{array}{r|l} 19 & 1987 \\ \hline 19 & 104\cdots\cdots 11 \\ \hline & 5\cdots\cdots 9 \end{array}$$

则 $1987=5\cdot 19^2+9\cdot 19+11.$

所以 $x=5,y=9,z=11,b=19.$

11·32 (1) 证明 10201 在大于 2 的任何进制的记数法中,都是一

个合数.

(2) 证明 10101 在任何进制的记数法中,都是一个合数.

(第 4 届加拿大数学竞赛,1972 年)

[证] (1) 设 10201 是 $x(x>2)$ 进制中的数,则有

$$10201=x^4+2x^2+1=(x^2+1)^2.$$

显然是一个合数.

(2) 设 10101 是 $x$ 进制中的数,则有

$$10101=x^4+x^2+1=(x^2+x+1)(x^2-x+1).$$

当 $x\geqslant 2$ 时, $x^2+x+1>1, x^2-x+1>1.$

所以 10101 是合数.

11·33 试求出并证明所有的正整数的个数,它在 $n$ 进位制的表示中数字各不相同,并且除去最左边的数字,每一个数字均和它左边的某个数字相差 $\pm 1$.(答案用 $n$ 的显函数以最简单的形式表达)

(第 19 届美国数学奥林匹克,1990 年)

[解 1] 我们考察满足题设要求的 $n$ 进制中的 $k$ 位数的个数.

显然,这个 $k$ 位数应该由 $k$ 个连续的 $n$ 进位数字组成.

为此有下面的结论.

(1) 对每个 $k=1,2,\cdots,n$,有 $n-k+1$ 个可能的 $k$ 个连续的 $n$ 进位数字的集合.

$\{0,1,\cdots,k-1\},\{1,2,\cdots,k\},\cdots,\{n-k,n-k+1,\cdots,n-1\}.$

(2) 对于给定的 $k$ 个连续数字,符合条件的排列方法有 $2^{k-1}$ 种.

这是因为,最右边的数字或者是各数字中最大的或者是最小的,从右数第二个数字是剩下的数字中最大的或最小的,…,最左边的数字则为选完 $k-1$ 个数字之后剩下的数字.这就是说,除最左边的数字外,其余 $k-1$ 位数字.每一位都有 2 种选择,因此有 $2^{k-1}$ 种.

(3) 对每个 $k$,恰有一个以 0 开头的 $k$ 个连续数字的排列,这个数不是真正的 $k$ 位数.

因此,由(1),(2),(3) 可知,满足要求的 $k$ 位整数有

$$(n-k+1)\cdot 2^{k-1}-1 \text{ 个}.$$

当 $k=1,2,\cdots,n$ 时,对所有的 $k$ 求和

$$\sum_{k=1}^{n}[(n-k+1)\cdot 2^{k-1}-1]$$

$$=[(\underbrace{2^0+2^0+\cdots+2^0}_{n\text{个}})-1]+[(\underbrace{2^1+2^1+\cdots+2^1}_{n-1\text{个}})-1]+\cdots$$

$$+[(2^{n-2}+2^{n-2})-1]+[2^{n-1}-1]$$

$$=[(2^n-1)+(2^{n-1}-1)+\cdots+(2^2-1)+(2^1-1)]-n$$

$$=(2^n+2^{n-1}+\cdots+2^2+2)-2n$$

$$=2^{n+1}-2n-2.$$

因此,满足要求的正整数有 $2^{n+1}-2n-2$ 个.

**[解2]** 因为只有0不能作第一个数字,我们先定义 $F(n)$ 为 $n$ 进位满足题设条件的整数,而先不考虑第一个数字是否为0,则

$F(1)=1$, 即{0},

$F(2)=4$, 即{0,01,1,10},

$F(3)=11$, 即{0,01,012,1,10,102,12,120,2,21,210}.

现在建立 $F(n+1)$ 的递推式.

注意到 $n+1$ 进位中的数字串有三类:

(1) 单一的数字:$0,1,2,\cdots,n$;

(2) 一个适当的 $n$ 进位数字串,接一个紧挨着最大的未用数字;

(3) 一个适当的 $n$ 进位数字串,接一个紧挨着最小的未用数字.

于是有 $F(n+1)=n+1+2F(n)$,

$F(1)=1.$

由此可以推得

$$F(n)=2^{n+1}-n-2.$$

由于以0作为第一个数字的数不合要求,这样的数,在 $n$ 进制中有

$$0,01,012,\cdots,012\cdots(n-1).$$

共有 $n$ 个.

所以所求正整数的个数为

$$F(n)-n=2^{n+1}-2n-2.$$

**11·34** 确定最小的自然数 $n$,使 $n!$的结尾恰有1987个0.

(第28届国际数学奥林匹克候选题1987年)

**[解]** 设 $S(n)$ 是 $n$ 在 $p$ 进制的各位数码之和.我们首先证明 $n!$

中素数 $p$ 的幂指数等于

$$\frac{n-S(n)}{p-1}.$$

为此,设 $n$ 的 $p$ 进制表示为

$$\begin{aligned} n &= (a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0)_p \\ &= a_k p^k + a_{k-1} p^{k-1} + \cdots + a_1 p + a_0. \end{aligned}$$

$$S(n) = a_k + a_{k-1} + \cdots + a_1 + a_0.$$

则 $n!$ 中素数 $p$ 的幂指数为

$$\begin{aligned} &\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{p^k}\right] \\ =& (a_k p^{k-1} + a_{k-1} p^{k-2} + \cdots + a_1) + (a_k p^{k-2} + a_{k-1} p^{k-3} + \cdots + a_2) \\ &+ \cdots + (a_k p + a_{k-1}) + a_k \\ =& a_k \frac{1-p^k}{1-p} + a_{k-1} \frac{1-p^{k-1}}{1-p} + \cdots + a_1 \\ =& \frac{(a_k p^k + a_{k-1} p^{k-1} + \cdots + a_1 p + a_0) - (a_k + a_{k-1} + \cdots + a_1 + a_0)}{p-1} \\ =& \frac{n-S(n)}{p-1}. \end{aligned}$$

解本题的关键是计算 $n!$ 中素因数 5 的幂指数,即 $n$ 为何值时,$n!$ 中 5 的幂指数恰为 1987.

由于 $1987 \cdot 4 = 7948,$

$$7948 = (223243)_5,$$

$$S(7948) = 16,$$

$$\frac{7948-16}{5-1} = 1983.$$

由于 7950 能被 $5^2$ 整除,7955,7960 都只能被 5 整除.

于是　7960!中 5 的幂指数恰为 1987.

即　$n = 7960.$

11·35　设 $g,s$ 均是给定的大于等于 1 的正整数,$f(n)$ 表示正整数 $n$ 在 $g$ 进制中所有数码的 $s$ 次方之和.证明 $n$, $f(n)$, $f(f(n))$,… 是周期的(也就是数列 $\{f^{(t)}(n),\ t=0,1,2,\cdots\}$ 是周期数列).

(中国国家集训队训练题,1990 年)

**[证]**　设 $x$ 在 $g$ 进制中的表示为

$$x = (\overline{a_m a_{m-1} \cdots a_1 a_0})_g,$$

其中 $0 \leqslant a_i \leqslant g-1$，$0 \leqslant i \leqslant m$，$a_m \neq 0$，则

$$f(x) = a_m^s + a_{m-1}^s + \cdots + a_0^s$$
$$\leqslant (m+1)(g-1)^s.$$

当 $m$ 足够大时，

$$g^m \geqslant (m+1)(g-1)^s,$$

因此存在足够大的 $x_0$，使得对任一自然数 $p$，当 $p > x_0$ 时，$p > f(p)$.

由于在任何一个严格递减的自然数的数列中，只有有限多项大于 $x_0$，

所以，在数列 $n$，$f(n)$，$f^{(2)}(n)$，…，中，有无数多个小于或等于 $x_0$. 因此必有某两数相等，即有 $i \neq j$，满足

$$f^{(i)}(n) = f^{(j)}(n).$$

这样就有 $$f^{(i+l)}(n) = f^{(j+l)}(n).$$

所以，$n$，$f(n)$，$f(f(n))$，… 是周期的.

11·36　求一个三位数，它具有下列性质：将它的数字按原来的顺序在某个非十进制的记数制中写出的数，是原数的 2 倍.

（波兰数学竞赛，1961 年）

**[解]**　设非十进制的记数制为 $c$ 进制，并设这个三位数在十进制中的百位数字、十位数字及个位数字分别是 $x, y, z$.

由题意得 $$2(100x + 10y + z) = x \cdot c^2 + y \cdot c + z.$$

由此可得 $$(200 - c^2)x + (20 - c)y + z = 0. \quad ①$$

于是问题归结为求方程 ① 的适合下述条件的整数解 $x, y, z, c$：

$$1 \leqslant x \leqslant 9,\quad 0 \leqslant y \leqslant 9,\quad 0 \leqslant z \leqslant 9,$$
$$c > x,\quad c > y,\quad c > z.$$

我们首先证明，新记数制的底 $c$ 只可能等于 15.

事实上，如果 $0 < c \leqslant 14$，则

$$(200 - c^2)x + (20 - c)y + z \geqslant 4x + 6y + z \geqslant 4,$$

① 式不可能成立.

如果 $c \geqslant 16$，那么

$$(200 - c^2)x + (20 - c)y + z$$
$$\leqslant -56x + 4y + z$$

$$\leqslant -56+36+9$$
$$=-11.$$

于是 $\qquad c=15.$

将 $c=15$ 代入方程 ①,可得

$$-25x+5y+z=0. \qquad ②$$

如果整数 $x,y$ 和 $z$ 满足方程 ②,由于 $-25x$ 和 $5y$ 都是 5 的倍数,则 $z$ 也应是 5 的倍数.因而 $z=0$ 或 $z=5$.

若 $z=0$,则方程 ② 可得

$$-5x+y=0,$$

因此只能有 $\qquad x=1,y=5.$

这时十进制的三位数为 150,在 15 进制下 $(150)_{15}=15^2+5\cdot 15=300=2\cdot 150$.符合题目要求.

若 $z=5$,则方程 ② 可得

$$-5x+y+1=0.$$

于是当 $x\geqslant 3$ 时,

$$-5x+y+1\leqslant -15+9+1=-5<0.$$

所以只能是 $x<3$,即 $x=1$ 或 $x=2$.

当 $x=1$ 时, $\quad y=4$.

当 $x=2$ 时, $\quad y=9$.

这时十进制的三位数分别是 145 和 295.

在 15 进制下,$(145)_{15}=15^2+4\cdot 15+5=290=2\cdot 145.$

$$(295)_{15}=2\cdot 15^2+9\cdot 15+5=590=2\cdot 295.$$

于是本题有三个解,它在十进制下是 145,150 和 295.

11·37 设 $a,b,n$ 都是自然数,并且 $a>1,\quad b>1,\quad n>1$;又 $A_{n-1}$ 和 $A_n$ 是 $a$ 进制数,$B_{n-1}$ 和 $B_n$ 是 $b$ 进制数,并且 $A_{n-1},A_n,B_{n-1}$ 和 $B_n$ 可表示为如下形式:

$$A_{n-1}=\overline{x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_0},\quad A_n=\overline{x_nx_{n-1}\cdots x_0},$$
($a$ 进制写出);
$$B_{n-1}=\overline{x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_0},\quad B_n=\overline{x_nx_{n-1}\cdots x_0},$$
($b$ 进制写出)

此处 $x_n\neq 0,\quad x_{n-1}\neq 0$.

数论卷

试证　当 $a > b$ 时

$$\frac{A_{n-1}}{A_n} < \frac{B_{n-1}}{B_n}.$$

（第 12 届国际数学奥林匹克，1970 年）

[**证 1**]　由 $a$ 进制的定义

$$A_{n-1} = x_{n-1}a^{n-1} + x_{n-2}a^{n-2} + \cdots + x_1 a + x_0,$$

$$A_n = x_n a^n + x_{n-1}a^{n-1} + \cdots + x_1 a + x_0.$$

其中 $a > 1$，所以有

$$\frac{A_{n-1}}{A_n} = 1 - \frac{x_n a^n}{x_n a^n + x_{n-1}a^{n-1} + \cdots + x_1 a + x_0}$$

$$= 1 - \frac{x_n}{x_n + x_{n-1}\cdot\frac{1}{a} + \cdots + x_1\cdot\frac{1}{a^{n-1}} + x_0\cdot\frac{1}{a^n}}.$$

同理有

$$\frac{B_{n-1}}{B_n} = 1 - \frac{x_n}{x_n + x_{n-1}\cdot\frac{1}{b} + \cdots + x_1\cdot\frac{1}{b^{n-1}} + x_0\cdot\frac{1}{b^n}}.$$

因为 $a > b > 1$，则 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$，并且 $x_n \neq 0, x_{n-1} \neq 0$，所以有

$$x_n + x_{n-1}\cdot\frac{1}{a} + \cdots + x_1\cdot\frac{1}{a^{n-1}} + x_0\cdot\frac{1}{a^n}$$

$$< x_n + x_{n-1}\cdot\frac{1}{b} + \cdots + x_1\cdot\frac{1}{b^{n-1}} + x_0\cdot\frac{1}{b^n},$$

从而

$$\frac{x_n}{x_n + x_{n-1}\cdot\frac{1}{a} + \cdots + x_1\cdot\frac{1}{a^{n-1}} + x_0\cdot\frac{1}{a^n}}$$

$$> \frac{x_n}{x_n + x_{n-1}\cdot\frac{1}{b} + \cdots + x_1\cdot\frac{1}{b^{n-1}} + x_0\cdot\frac{1}{b^n}}.$$

于是　$$\frac{A_{n-1}}{A_n} < \frac{B_{n-1}}{B_n}.$$

[**证 2**]　先用数学归纳法证明一个引理：对于任意自然数 $n$ 及 $a > b$，有

$$a^n B_n - b^n A_n > 0.$$

事实上,当 $n=1$ 时,则 $x_1>0, x_0>0$,且

$aB_1-bA_1=a(x_1b+x_0)-b(x_1a+x_0)=x_0(a-b)>0.$

所以,$n=1$ 时,引理成立.

假设 $n=k$ 时,引理成立,即

$$a^kB_k-b^kA_k>0,\quad a^kB_k>b^kA_k.$$

因为 $a>b$,所以有

$$a^{k+1}B_k>b^{k+1}A_k,$$
$$a^{k+1}B_k-b^{k+1}A_k>0.$$

于是当 $n=k+1$ 时,有

$$\begin{aligned}&a^{k+1}B_{k+1}-b^{k+1}A_{k+1}\\=&a^{k+1}(b^{k+1}x_{k+1}+B_k)-b^{k+1}(a^{k+1}x_{k+1}+A_k)\\=&a^{k+1}B_k-b^{k+1}A_k>0.\end{aligned}$$

因此 $$a^{k+1}B_{k+1}>b^{k+1}A_{k+1}.$$

即 $n=k+1$ 时,引理成立.

所以,对所有自然数 $n$,引理成立.

于是,由引理可得

$$\begin{aligned}&\frac{B_{n-1}}{B_n}-\frac{A_{n-1}}{A_n}\\=&\frac{1}{A_nB_n}(A_nB_{n-1}-B_nA_{n-1})\\=&\frac{1}{A_nB_n}[A_n(B_n-b^nx_n)-(A_n-a^nx_n)B_n]\\=&\frac{x_n}{A_nB_n}(a^nB_n-b^nA_n)\\>&0.\end{aligned}$$

所以 $$\frac{A_{n-1}}{A_n}<\frac{B_{n-1}}{B_n}.$$

**[证 3]** 引入辅助函数.

设 $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$,其中

$$p(x)=\sum_{k=0}^{n-1}x_k\cdot x^k,\quad q(x)=p(x)+x_n\cdot x^n.$$

因而有 $$p(a)=\sum_{k=0}^{n-1}x_k\cdot a^k=A_{n-1}.$$

$$q(a)=p(a)+x_n\cdot a^n=\sum_{k=0}^{n}x_ka^k=A_n.$$

所以 $$f(a)=\frac{p(a)}{q(a)}=\frac{A_{n-1}}{A_n}.$$

同理有 $$f(b)=\frac{p(b)}{q(b)}=\frac{B_{n-1}}{B_n}.$$

因此,要证明当 $a>b$ 时,$\frac{A_{n-1}}{A_n}<\frac{B_{n-1}}{B_n}$ 成立,就等价于证明 $f(a)<f(b)$ 成立.

由此可见,若能证明 $y=f(x)$ 是单调递减函数,则命题获证.

为此,对 $f(x)$ 求导数,得

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{p'(x)q(x)-p(x)q'(x)}{q^2(x)}\\&=\frac{p'(x)[p(x)+x_nx^n]-p(x)[p'(x)+nx_n\cdot x^{n-1}]}{q^2(x)}\\&=\frac{x_n\cdot x^{n-1}[xp'(x)-np(x)]}{q^2(x)}\\&=\frac{x_nx^{n-1}\left(\sum_{k=1}^{n-1}kx_kx^k-\sum_{k=0}^{n-1}nx_kx^k\right)}{q^2(x)}\\&=\frac{x_nx^{n-1}[\sum_{k=1}^{n-1}x^kx_k(k-n)-nx_0]}{q^2(x)}\end{aligned}$$

由于 $x>0$, $x_n>0$, $x_{n-1}>0$, $n>1$, $k-n<0$, $x_k\geqslant 0$, $q^2(x)>0$,所以当 $x>0$ 时,有 $f'(x)<0$.

因此 $f(x)$ 是单调递减函数.

所以当 $a>b$ 时,$f(a)<f(b)$,

即 $$\frac{A_{n-1}}{A_n}<\frac{B_{n-1}}{B_n}.$$

11·38 四位数$(xyzt)_B$ 称为$B$ 进制中的稳定数,如果$(xyzt)_B=(dcba)_B-(abcd)_B$,其中 $a\leqslant b\leqslant c\leqslant d$ 是由$x,y,z,t$ 依递增顺序排

列而得. 试在 $B$ 进制中确定所有的稳定数.

(第 26 届国际数学奥林匹克候选题, 1985 年)

**[解]** 如果 $c > b$.

则由 $(\overline{dcba})_B - (\overline{abcd})_B$ 及 $a \leqslant b < c \leqslant d$ 得

$$a + B - d = t, \quad ①$$
$$b - 1 + B - c = z, \quad ②$$
$$c - 1 - b = y, \quad ③$$
$$d - a = x. \quad ④$$

如果 $c = b$, 则有

$$a + B - d = t, \quad ①$$
$$b - 1 + B - c = z, \quad ②$$
$$c + B - 1 - b = y, \quad ⑤$$
$$d - 1 - a = x. \quad ⑥$$

当 $c = b$ 时, ② 和 ⑤ 可得

$$y = B - 1, \quad z = B - 1. \quad ⑦$$

因为在 $B$ 进制中, $x, y, z, t$ 的最大值为 $B - 1$, 由 ⑦ 知, $x, y, z, t$ 中至少有两个达到最大值 $B - 1$, 于是必有 $d = B - 1, c = B - 1$.

又由 $c = b$ 知, $b = B - 1$.

由 ⑥ 知 $\quad x < d = c = b,$

所以 $\quad x = a.$

再由 ⑥ 得 $\quad 2a = B - 2.$

由 ① 得 $\quad a = t - B + d = B - 1 - B + B - 1 = B - 2.$

于是有 $\quad 2a = B - 2 = 2B - 4.$

即 $\quad B = 2, \quad a = 0 = x,$

这与 $(xyzt)_B$ 为四位数矛盾.

于是必有 $\quad c > b.$

(1) 如果 $a = b, \quad c = d,$

由 ③, ④ 可得 $x = y + 1.$

所以有 $\quad x = c, \quad y = a.$

再由 ④ $\quad d - a = x$ 化为 $c - a = c$. 于是

$$a = 0.$$

由 ③ 得 $\quad c = 1,$

进而由 ①,② 得　$B=2$.

于是得到一组解:

$$(1100)_2-(0011)_2=(1001)_2.$$

(2) 如果　$a<b$ 或 $c<d$,

这时　$c-b+1\leqslant d-a$.

由 ③④ 得　$x\geqslant y+2$.

所以　$x\neq a$.

如果 $x=d$,由 ④ 得 $a=0$,

由 ①,② 得　$z\geqslant t>0$,

所以　$y=a=0$.

由 ③　$c-b=1$.

由 ②　$z=B-2$.

于是　$c=z=B-2$,

$t=b=B-3$.

再由 ①,　$d=3$.

所以　$B-2=c\leqslant 3$,

$B\leqslant 5$.

由 $B=4$ 得　$d=3$, $c=2$, $b=1$, $a=0$.即

$$(3210)_4-(0123)_4=(3021)_4.$$

由 $B=5$ 得　$d=3$, $c=3$, $b=2$, $a=0$,

即

$$(3320)_5-(0233)_5=(3032)_5.$$

如果 $x=c$,由于 $z\geqslant t$,所以 $z=d$.

由 ①, $t>a$,所以

$$y=a,\quad t=b.$$

由 ①,②,③,④ 可解出

$$c=\frac{3B}{5},\quad d=\frac{4B}{5}-1,\quad b=\frac{2B}{5},\quad a=\frac{B}{5}-1.$$

因此,当 $5\mid B$ 时,可得到需要的解.

如果 $x=b$,则　$y=a$, $z=d$, $t=c$.

由 ③,④ 得　$c=a+b+1$, $d=a+b$.

此时 $d < c$ 与 $d \geqslant c$ 矛盾.

于是 $B$ 进制中的稳定数为

$$(1001)_2, (3021)_4, (3032)_5,$$

$$\left(\frac{3B}{5} \quad \frac{B}{5}-1 \quad \frac{4B}{5}-1 \quad \frac{2B}{5}\right)_B, \quad 5 \mid B.$$

11·39 $p$ 是一个素数而 $n$ 是一个自然数,证明下列命题(Ⅰ)和命题(Ⅱ)是等价的:

命题(Ⅰ):设有一个二项式系数 $C_n^k$, $k = 0,1,\cdots,n$,可被 $p$ 除尽.

命题(Ⅱ):$n$ 能表示为 $n = p^s q - 1$,其中 $s,q$ 是整数,而 $s \geqslant 0$, $0 < q < p$.

(卢森堡等五国国际数学竞赛,1980 年)

**注** 卢森堡等五国是指比利时、英国、卢森堡、荷兰和前南斯拉夫.

**[证]** 若命题(Ⅰ)不成立,则存在一个 $k$,$0 \leqslant k \leqslant n$,使 $C_n^k$ 能被 $p$ 除尽.

由于
$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$
则 $C_n^k$ 中素数 $p$ 的方次数为

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\left[\frac{n}{p^i}\right]-\left[\frac{k}{p^i}\right]-\left[\frac{n-k}{p^i}\right]\right).$$

由于 $[x+y] \geqslant [x]+[y]$,则当 $p$ 可以除尽 $C_n^k$ 时,必存在一个 $i$,使得

$$\left[\frac{n}{p^i}\right]-\left[\frac{k}{p^i}\right]-\left[\frac{n-k}{p^i}\right] \geqslant 1.$$

又因为
$$[x]+[y]+1 \geqslant [x+y],$$
则又有
$$\left[\frac{n}{p^i}\right]-\left[\frac{k}{p^i}\right]-\left[\frac{n-k}{p^i}\right] \leqslant 1.$$

因此,对这个 $i$,必有 $\left[\frac{n}{p^i}\right]-\left[\frac{k}{p^i}\right]-\left[\frac{n-k}{p^i}\right]=1$,

即
$$\left[\frac{n}{p^i}\right]=\left[\frac{k}{p^i}\right]+\left[\frac{n-k}{p^i}\right]+1. \qquad ①$$

现在我们将数 $n$, $k$, $n-k$ 都按 $p$ 进制展开,即

$$n = \sum_{k=0}^{r} n_k p^k$$

$$=(\overline{n_r n_{r-1}\cdots n_1 n_0})_p.$$

其中$0\leqslant n_k\leqslant p-1,\quad k=0,1,\cdots,r-1,\quad 1\leqslant n_r\leqslant p-1.$

再注意到　$0\leqslant k\leqslant n,\quad 0\leqslant n-k\leqslant n,$

此可以有

$$k=(\overline{n'_r n'_{r-1}\cdots n'_1 n'_0})_p,$$

$$n-k=(\overline{n''_r n''_{r-1}\cdots n''_1 n''_0})_p.$$

当$i\leqslant r$时，

$$\left[\frac{n}{p^i}\right]=(\overline{n_r n_{r-1}\cdots n_i})_p,$$

$$\left[\frac{k}{p^i}\right]=(\overline{n'_r n'_{r-1}\cdots n'_i})_p,$$

$$\left[\frac{n-k}{p^i}\right]=(\overline{n''_r n''_{r-1}\cdots n''_i})_p.$$

因此，当$i\leqslant r$时，① 式成为

$$(\overline{n_r n_{r-1}\cdots n_i})_p=(\overline{n'_r n'_{r-1}\cdots n'_i})_p+(\overline{n''_r n''_{r-1}\cdots n''_i})_p+1. \quad ②$$

这显然是指在进行$p$进制加法

$$(\overline{n_r n_{r-1}\cdots n_1 n_0})_p=(\overline{n'_r n'_{r-1}\cdots n'_1 n'_0})_p+(\overline{n''_r n''_{r-1}\cdots n''_1 n''_0})_p$$

时，从第$(i-1)$位进到第$i$位一个1，因此 ② 就相当于

$$(\overline{1n_{i-1}\cdots n_0})_p=(\overline{n'_{i-1}\cdots n'_0})_p+(\overline{n''_{i-1}\cdots n''_0})_p.$$

当$i\geqslant r+1$时，因为

$$\left[\frac{n}{p^i}\right]=0,\quad\left[\frac{k}{p^i}\right]=0,\quad\left[\frac{n-k}{p^i}\right]=0.$$

故 ② 式显然不成立.

于是若$n=(\overline{n_r n_{r-1}\cdots n_1 n_0})_p,\quad 1\leqslant n_r\leqslant p-1$，则存在某一$1\leqslant i\leqslant r$，并且存在数$(\overline{n'_{i-1}\cdots n'_0})_p$及$(\overline{n''_{i-1}\cdots n''_0})_p$，使得

$$(\overline{1n_{i-1}\cdots n_0})_p=(\overline{n'_{i-1}\cdots n'_0})_p+(n''_{i-1}\cdots n''_0)_p. \quad ③$$

由于$n'_k,\quad n''_k,\quad k=0,1,\cdots,i-1$在$0,1,\cdots,p-1$内变动，则有

$$0\leqslant(\overline{n'_{i-1}\cdots n'_0})_p+(\overline{n''_{i-1}\cdots n''_0})_p$$

$$\leqslant((\underbrace{p-1)\cdots(p-1}_{i\text{位}}))_p+((\underbrace{p-1)\cdots(p-1}_{i\text{位}}))_p$$

$$=(1\underbrace{(p-1)\cdots(p-1)}_{i-1\text{位}}(p-2))_p$$

因此,只要 $n_{i-1},n_{i-2},\cdots,n_0$ 不都是 $p-1$,则 ③ 式总可以成立.

此外,当 $n$ 在 $p$ 进制下是一位数时,$r=0$,则不存在满足 $1\leqslant i\leqslant r=0$ 的 $i$,从而 ③ 式当然不可能成立.

于是 $n$ 在 $p$ 进制下至少是一个两位数,并且

$$n\neq(\overline{n_r(p-1)\cdots(p-1)})_p$$

其中 $r\geqslant 1$, $1\leqslant n_r\leqslant p-1$.

与 $n=p^sq-1$, $s\geqslant 0$, $0<q<p$ 矛盾,于是命题(Ⅱ)不成立.

反之,也可证明,若命题(Ⅱ)不成立,把 $n$ 表为 $p$ 进制数,进而可得 ① 式成立,于是存在 $0\leqslant k\leqslant n$,使 $p\mid C_n^k$,即命题(Ⅰ)不成立.

于是,命题(Ⅰ)和命题(Ⅱ)等价.

11·40　设自然数 $n$ 为 17 的倍数,且在二进制写法中恰有三个数码为 1. 证明 $n$ 的二进制写法中至少有六个数码为 0,且若恰有 7 个数码为 0,则 $n$ 是偶数.

(英国数学奥林匹克,1982 年)

[证]　因为 $n$ 的二进制写法中恰有三个数码是 1,其余都是 0,所以它可以表为

$$n=2^k+2^l+2^m.$$

其中 $k,l,m$ 为非负整数,且 $k<l<m$.

如果 $n$ 的二进制写法中 0 的个数小于 6,则 $m\leqslant 7$.

当 $i=0,1,2,3,4,5,6,7$ 时,$2^i$ 被 17 除的余数依次为 1,2,4,8,−1,−2,−4,−8. 可以验证,其中任意三个数之和均不能被 17 整除,从而 $n=2^k+2^l+2^m$ 不能被 17 整除,与题设矛盾.

因此,在 $n$ 的二进制中至少有 6 个 0.

如果 $n$ 的二进制写法中恰有 7 个 0,则 $m=9$.

如果 $n$ 为奇数,则 $n$ 的二进制表示中最末一位是 1,从而 $k=0$. 由于

$$2^k+2^m=2^0+2^9=513\equiv 3\pmod{17}.$$

则为使 $n$ 是 17 的倍数,应有

$$2^l\equiv -3\pmod{17}.$$

但是,当 $l \in \{1,2,\cdots,8\}$ 时

$$2^l \not\equiv -3 \quad (\bmod 17).$$

出现矛盾.

因此 $n$ 为偶数.这样的偶数确实存在,比如

$$n = 2^1 + 2^6 + 2^9 = 578 = (1001000010)_2.$$

11·41 对每一个正整数 $n$,若 $n$ 的二进制表示中 1 的个数为偶数,则令 $a_n = 0$,否则令 $a_n = 1$.证明不存在正整数 $k$ 和 $m$,使得

$$a_{k+j} = a_{k+m+j} = a_{k+2m+j}, 0 \leqslant j \leqslant m-1.$$

(第 53 届美国普特南数学竞赛,1992 年)

[证] 由题设的规定易得

$$a_{2n} = a_n, a_{2n+1} = 1 - a_{2n} = 1 - a_n.$$

假设存在正整数 $k$ 和 $m$ 满足条件,并假定 $m$ 是使得条件成立的最小值.

如果 $m$ 是奇数,不妨设 $a_k = a_{k+m} = a_{k+2m} = 0$

($a_k = 1$ 的情形可以同样处理).

因为不论 $k$ 还是 $k+m$ 是偶数,

$$a_{k+1} = a_{k+m+1} = a_{k+2m+1} = 1.$$

再因为,不论 $k+1$ 还是 $k+m+1$ 是偶数,都有

$$a_{k+2} = a_{k+m+2} = a_{k+2m+2} = 0.$$

由此下去,$a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \cdots, a_{k+m-1}$

在 0 与 1 之间是交替的.

于是,因为 $m-1$ 是偶数,有

$$a_{k+m-1} = a_{k+2m-1} = a_{k+3m-1} = 0,$$

但是,因为不论 $k+m-1$ 还是 $k+2m-1$ 是偶数,都有 $a_{k+m} = a_{k+2m} = 1$.推出矛盾.

如果 $m$ 是偶数,取出项 $a_{k+j} = a_{k+m+j} = a_{k+2m+j}(0 \leqslant j \leqslant m-1)$.的所有下标,并利用 $r$ 为偶数时,$a_r = a_{\frac{r}{2}}$,可以得到

$$a_{\left[\frac{k}{2}\right]+j} = a_{\left[\frac{k}{2}\right]+\frac{m}{2}+i} = a_{\left[\frac{k}{2}\right]+m+i},$$

$0 \leqslant i \leqslant \left(\frac{m}{2}\right) - 1$.

这与 $m$ 的最小性矛盾.因此,不存在符合条件的 $k$ 和 $m$.

11·42　对于整数 $x\geqslant1$，设 $p(x)$ 是不整除 $x$ 的最小素数，$q(x)$ 是所有小于 $p(x)$ 的素数之积. 特别地 $p(1)=2$，若有某个 $x$，使 $p(x)=2$，则定义 $q(x)=1$.

序列 $x_0,x_1,x_2,\cdots$ 由下式定义：

$$x_0=1,$$

$$x_{n+1}=\frac{x_np(x_n)}{q(x_n)}$$

其中 $n\geqslant0$，试求所有使 $x_n=1995$ 的整数 $n$.

（第 36 届国际数学奥林匹克预选题，1995 年）

［证］　显然，由 $p(x)$ 与 $q(x)$ 的定义可导出，对任何 $x$，$q(x)$ 都整除 $x$，于是

$$x_{n+1}=\frac{x_n}{q(x_n)}\cdot p(x_n)$$

即对任何 $n$，$x_{n+1}$ 都是正整数.

另外，用数学归纳法容易证明，对所有 $n$，$x_n$ 都没有平方因子.

因而，可依据是否被某个素数整除对 $x$ 确定惟一的一个编码. 具体做法如下：

设 $p_0=2,p_1=3,p_2=5,\cdots$ 是按递增顺序排列的全部素数的序列.

设 $x>1$ 是任一个无平方因子的数. 并设 $p_m$ 是整除 $x$ 的最大素数.

用 $p_i$ 除 $x$，若 $p_i$ 能整除 $x$ 时，取编码 $Si=1$，否则取编码 $Si=0$，则 $x$ 的编码为 $(1,S_{m-1},S_{m-2},\cdots,S_1,S_0)$

定义　$f(x)=\dfrac{xp(x)}{q(x)}$.

若 $x$ 的编码最后一位是 0，则 $x$ 是奇数，$p(x)=2,q(x)=1,f(x)=2x$，$f(x)$ 的编码除了最后一位的 0 被 1 替代外，其余的与 $x$ 的编码相同，如果 $x$ 的编码的最后若干位为 $011\cdots1$，则 $f(x)$ 的编码的最后若干位为 $100\cdots0$，如果将编码遍历全部二进制数，则 $f(x)$ 的编码可由 $x$ 的编码加 1 得到.

由 $x_1=2$ 以及当 $n\geqslant2$ 时，$x_{n+1}=f(x_n)$，$x_n$ 的编码可直接等于 $n$ 的二进制表示.

因此，当 $x_n=1995=3\cdot5\cdot7\cdot19$ 时，存在的惟一的 $n$，由 $x_n$ 的编号

10001110(从右向左的编号是由 $2\nmid 1995, 3\mid 1995, 5\mid 1995, 7\nmid 1995, 11\nmid 1995, 13\nmid 1995, 17\nmid 1995, 19\mid 1995$ 而得).



由 $(10001110)_2=(142)_{10}$.

所以,$n=142$ 是使 $x_n=1995$ 的整数 $n$.

11·43 对于任何正整数 $k$,$f(k)$表示集合$\{k+1,k+2,\cdots,2k\}$内在二进制下恰有 3 个 1 的所有元素的个数.

(1)求证对于每个正整数 $m$,至少存在一个正整数 $k$,使得 $f(k)=m$.

(2)确定所有正整数 $m$,对每一个 $m$,恰存在一个 $k$,满足 $f(k)=m$.

(第 35 届国际数学奥林匹克,1994 年)

[**解**] 用 $S$ 表示正整数集合内在二进制表示下恰有 3 个 1 的所有元素组成的集合.

首先证明 $f(k+1)=\begin{cases}f(k), & 当\ 2k+1\notin S;\\ f(k)+1, & 当\ 2k+1\in S.\end{cases}$ ①

由于 $f(k+1)$是集合$\{k+2,k+3,\cdots,2k+1,2k+2\}$内在二进制表示下恰有 3 个 1 的所有元素的集合,$f(k)$是集合$\{k+1,k+2,k+3,\cdots,2k\}$内在二进制表示下恰有 3 个 1 的所有元素的集合.在二进制表示下,在 $k+1$ 的后面添加一个零,恰为 $2(k+1)$在二进制表示下的数,于是 $k+1$ 与 $2(k+1)$或者同属于 $S$,或者同不属于 $S$,因此公式①得证.

(1)显然 $f(1)=0,f(2)=0$.

当 $k=2^s(s\geqslant 2,s\in N)$时,$f(2^s)$表示集合$\{2^s+1,2^s+2,\cdots,2^{s+1}\}$内在二进制表示下恰有 3 个 1 的所有元素的个数.

在二进制下,$2^s+1=1\underbrace{0\cdots0}_{s-1个0}1$,$2^{s+1}=10\underbrace{0\cdots0}_{s+1个0}$.

考虑所有形如 1※※…※的 $s+1$ 位数,取 2 个 1 放入这 $s$ 个※中的任两个※的位置,其余※的位置全放入 0,就得到集合$\{2^s+1,\cdots,2^{s+1}\}$内在二进制表示下恰有 3 个 1 的一个元素,于是有 $f(2^s)=C_s^2=\frac{1}{2}s(s-1)$.

由①可知 $f(k)$无上界,又从 $f(1)=0$,$f(k)$无上界及①式可知,当 $k$ 取遍所有正整数时,$f(k)$取遍所有非负整数.

于是,对每个 $m\in N$,至少存在一个 $k\in N$,满足 $f(k)=m$.

(2)由于对每一个适当的 $m$,恰存在一个 $k$,满足 $f(k)=m$,则由①式可知

$$f(k+1)=f(k)+1=m+1, \qquad ②$$
$$f(k-1)=f(k)-1=m-1, \qquad ③$$

于是 $2k+1\in S,2(k-1)+1\in S$.

设在二进制下 $k=2^s+k_1\cdot 2^{s-1}k_2\cdot 2^{s-2}+\cdots+k_{s-1}\cdot 2+k_s$

其中 $k_1,k_2,\cdots,k_S\in\{0,1\},S\in N$.则

$$2k-1=2^{s+1}+k_1\cdot 2^s+k_2\cdot 2^{s-1}+\cdots+k_{s-1}\cdot 2^2+k_s\cdot 2-1,$$
$$2k+1=2^{s+1}+k_1\cdot 2^s+k_2\cdot 2^{s-1}+\cdots+k_{s-1}\cdot 2^2+k_s\cdot 2+1.$$

由于在二进制下,$2k+1$ 恰有 3 个 1,则在 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 中只能有一个 1,其余为 0.于是

$$2k+1=2^{s+1}+2^t+1$$

其中 $t\leqslant S,t\in N$.由此解得 $k=2^s+2^{t-1}$. ④

进而有 $\quad 2k-1=2^{s+1}+2^t-1$

$$=2^{s+1}+2^{t-1}+2^{t-1}+\cdots+2+1.$$

由于在二进制下,$2k-1$ 也恰有三个 1,则只能有 $t=2$,从而由④式,

$k=2^s+2$,即 $\quad k+1=2^s+2+1$,且 $\quad 2k=2^{s+1}+2^2$.

在二进制下,$k+1=1\underbrace{0\cdots0}_{s-2\text{个}0}11,2k=1\underbrace{0\cdots0}_{s-2\text{个}0}100$,

在 $k+1$ 与 $2k$ 之间的正整数为

$$1\underbrace{※※※\cdots※}_{s\text{个}※}$$

(但这里要排除 $10\cdots0,10\cdots01,10\cdots010$ 这三个数),还有 $s+2$ 位数 $10\cdots01,10\cdots010,10\cdots011,10\cdots0100$.

因此 $f(k)=f(2^s+2)=C_s^2+1=\frac{1}{2}s(s-1)+1$.

从而 $f(k)=m$ 恰有惟一解时,必有

$$m=\frac{1}{2}s(s-1)+1. \quad (s\geqslant 2).$$

当 $m=\frac{1}{2}s(s-1)+1$ 时,$(s\geqslant 2)$,取 $k=2^s+2$,由于

$$2(2^s+2)-1=2^{s+1}+2+1,$$

$$2(2^s+2)+1=2^{s+1}+2^2+1,$$

它们在二进制下恰有 3 个 1,由①式得

$$f(2^s+2-1)=f(2^s+2)-1,$$
$$f(2^s+2+1)=f(2^s+2)+1.$$



从而,$f(k)=\frac{1}{2}s(s-1)+1(s\geqslant 2)$有惟一解 $k=2^s+2$.

**11·44** 设 $a_0,a_1,a_2,\cdots$是非负整数的递增数列,使得每个非负整数可以惟一地表成 $a_i+2a_j+4a_k$ 的形式,这里 $i,j,k$ 不一定不同.确定 $a_{1998}$.

(第 39 届国际数学奥林匹克预选题,1998 年)

**[解]** 显然 $a_0=0,a_1=1$,如果已有符合条件的非负整数 $a_0,a_1,\cdots a_n$,且 $a_{n+1}$是第一个不能表成 $a_i+2a_j+4a_k$ 的数($i,j,k\in\{0,1,\cdots,n\}$),则 $a_{n+1}$被 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 惟一确定,所以数到$\{a_n\}$如果存在,则只有惟一一种.

把每一自然数 $n$ 用二进制表示为

$$n=d_k\cdot 2^k+d_{k-1}\cdot 2^{k-1}+\cdots+d_1\cdot 2+d_0,$$

考虑数列

$$a_n=d_k\cdot 8^k+d_{k-1}\cdot 8^{k-1}+\cdots+d_1\cdot 8+d_0. \quad ①$$

其中 $d_i(i=0,1,\cdots,k)\in\{0,1\},k\in N\cup\{0\}$.

由于每一个非负整数 $m$ 都可以惟一地表成八进制:

$$m=c_s\cdot 8^s+c_{s-1}\cdot 8^{s-1}+\cdots+c_1\cdot 8+c_0,$$

其中 $c_i\in\{0,1,\cdots,7\},0\leqslant i\leqslant s,s\in N\cup\{0\}$.

而每个 $c_i\in\{0,1,\cdots,7\}$都可以惟一地表示成

$$c_i=d_i+2d_j+4d_k,d_i,d_j,d_k\in\{0,1\} \quad ②$$

的形式,所以,$m$ 可以表示成

$$m=a_i+2a_j+4a_k \quad ③$$

的形式,其中 $a_i,a_j,a_k$ 具有①的形式,并且 $a_i,a_j,a_k$ 由②惟一确定.

另一方面,如果有③式,其中 $a_i,a_j,a_k$ 具有①的形式,那么由八进制的惟一性,它们的系数由②惟一确定,从而 $m$ 的这种表示是惟一的.

因此,①就是所求的数列.

由于 $1998=2^{10}+2^9+2^8+2^7+2^6+2^3+2^2+{}^21$,

所以 $a_{1998}=8^{10}+8^9+8^8+8^7+8^6+8^3+8^2+8^1$.

11·45 给定正整数 $n$,已知用克数都是正整数的 $k$ 块砝码和一台天平可以称出质量为 $1,2,3,\cdots,n$ 克的所有物品.

(1)求 $k$ 的最小值 $f(n)$.

(2)当且仅当 $n$ 取什么值时,上述 $f(n)$ 块砝码的组成方式是惟一确定的? 并证明你的结论.

(中国高中数学联赛,1999年)

**[解]** (1)设这 $k$ 块砝码的质量数分别为 $a_1,a_2,\cdots,a_k$,且 $1\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_k$, $a\in Z$, $1\leqslant i\leqslant k$.

因为天平两端都可以放砝码,故可称质量为 $\sum\limits_{i=1}^{k}x_ia_i$, $x_i\in\{-1,0,1\}$.

若利用这 $k$ 块砝码可以称出质量为 $1,2,3,\cdots,n$ 的物品,则在上述表示中一定含有 $1,2,\cdots,n$,由对称性易知,上述表示中也一定含有 $-1,-2,\cdots,-n$ 及 0,即

$$\left\{\sum_{i=1}^{k}x_ia_i \mid x_i\in\{-1,0,1\}\right\}\supseteq\{-n,\cdots,-2,-1,0,1,\cdots n\}.$$

记 $|A|$ 为有限集合 $A$ 中元素的个数,则

$$|\{-n,\cdots,-2,-1,0,1,\cdots n\}|=2n+1,$$

$$2n+1\leqslant\left|\left\{\sum_{i=1}^{k}x_ia_i \mid x_i\in\{-1,0,1\}\right\}\right|\leqslant 3^k.$$

由此解得 $n\leqslant\dfrac{3^k-1}{2}$.

设 $\dfrac{3^{m-1}-1}{2}<n\leqslant\dfrac{3^m-1}{2}$ $(m\geqslant1, m\in Z)$,

则 $k\geqslant m$.

且 $k=m$ 时,可取 $a_1=1, a_2=3,\cdots,a_m=3^{m-1}$.

由数的三进制表示可知,对任意 $0\leqslant p\leqslant 3^m-1$,

都有 $p=\sum\limits_{i=1}^{m}y_i3^{i-1}$, $y_i\in\{0,1,2\}$, $1\leqslant i\leqslant m$.

则 $p-\dfrac{3^m-1}{2}=\sum\limits_{i=1}^{m}y_i3^{i-1}-\sum\limits_{i=1}^{m}3^{i-1}=\sum\limits_{i=1}^{m}(y_i-1)3^{i-1}$,

令 $x_i=y_i-1$,则 $x_i\in\{-1,0,1\}$.

数论卷

因此，对一切 $-\frac{3^m-1}{2}\leqslant l\leqslant\frac{3^m-1}{2}$ 的整数 $l$，都有

$l=\sum_{i=1}^{m}x_i3^{i-1}, x_i\in\{-1,0,1\}$.

由于 $n\leqslant\frac{3^m-1}{2}$，故对一切 $-n\leqslant l\leqslant n$ 的整数 $l$ 都有上述表示.

综合以上可知，$k$ 的最小值 $f(n)=m$，其中 $n$ 满足 $\frac{3^{m-1}-1}{2}<n\leqslant\frac{3^m-1}{2}$.

(2)首先证明，当 $n\neq\frac{3^m-1}{2}$ 时，$f(n)$ 块砝码的组成方式不惟一.

当 $\frac{3^m-1}{2}<n<\frac{3^{m+1}-1}{2}$ 时，由(1)可知，$1,3,\cdots,3^{m-1},3^m$ 就是一种砝码的组成方式.

下面证明，$1,3,\cdots,3^{m-1},3^m-1$ 也是一种方式.

若 $1\leqslant l\leqslant\frac{3^m-1}{2}$，由(1)可知

$$l=\sum_{i=1}^{m}x_i3^{i-1}, x_i\in\{-1,0,1\},$$

则 $$l=\sum_{i=1}^{m}x_i3^{i-1}+0\cdot(3^m-1), x\in\{-1,0,1\},$$

若 $\frac{3^m-1}{2}<l\leqslant n<\frac{3^{m+1}-1}{2}$，则

$$\frac{3^m-1}{2}<l+1\leqslant\frac{3^{m+1}-1}{2},$$

由(1)可知，$l+1=\sum_{i=1}^{m+1}x_i3^{i-1}, x_i\in\{-1,0,1\}$,

易知 $x_{m+1}=1$，否则 $l\leqslant\sum_{i=1}^{m}3^{i-1}-1=\frac{3^m-1}{2}-1$，与 $l$ 的假设 $l>\frac{3^m-1}{2}$ 矛盾，则

$$l=\sum_{i=1}^{m}x_i3^{i-1}+1\cdot(3^m-1).$$

所以，当 $n\neq\frac{3^m-1}{2}$ 时，$f(n)$ 块砝码的组成方式不惟一.

下面再证明：当 $n=\frac{3^m-1}{2}$ 时，$f(n)=m$ 块砝码的组成方式是惟一的，这 $m$ 块砝码为 $1,3,\cdots,3^{m-1}$.

若对每个 $-\frac{3^m-1}{2}\leqslant l\leqslant\frac{3^m-1}{2}$，都有 $l=\sum_{i=1}^{m}x_ia_i,x_i\in\{-1,0,1\}$.

即 $\left\{\sum_{i=1}^{m}x_ia_i \mid x_i\in\{-1,0,1\}\right\}\supseteq\left\{0,\pm1,\cdots,\pm\frac{3^m-1}{2}\right\}$.

上式中，左边集合中至多有 $3^m$ 个元素，而右边集合中恰有 $3^m$ 个元素，故必有

$$\left\{\sum x_ia_i \mid x_i\in\{-1,0,1\}\right\}=\left\{0,\pm1,\cdots,\pm\frac{3^m-1}{2}\right\}.$$

从而对每个 $l$，$-\frac{3^m-1}{2}\leqslant l\leqslant\frac{3^m-1}{2}$ 都可以惟一地表示为 $l=\sum_{i=1}^{m}x_ia_i,x_i\in\{-1,0,1\}$.

因而 $\sum_{i=1}^{m}a_i=\frac{3^m-1}{2}$,

则 $\sum_{i=1}^{m}(x_i+1)a_i=\sum_{i=1}^{m}x_ia_i+\sum_{i=1}^{m}a_i=\sum_{i=1}^{m}x_ia_i+\frac{3^m-1}{2}$.

令 $y_i=x_i+1$，则 $y_i\in\{0,1,2\}$.

由上可知，对每个 $0\leqslant l\leqslant 3^m-1$，都可以惟一地表示为 $l=\sum_{i=1}^{m}y_ia_i$，$y_i\in\{0,1,2\}$. 特别地，易知 $1\leqslant a_1<a_2<\cdots<a_m$.

下面用数学归纳法证明 $a_i=3^{i-1}(1\leqslant i\leqslant m)$.

当 $i=1$ 时，由于 $\sum_{i=1}^{m}y_ia_i$ 中的最小正整数是 $a_1$，故 $a_1=1$.

假设当 $1\leqslant i\leqslant p$ 时，$a_i=3^{i-1}$.

由于 $\sum_{i=1}^{p}y_ia_i=\sum_{i=1}^{p}y_i3^{i-1}$，$y_i\in\{0,1,2\}$ 就是数的三进制表示，因而它们恰好等于 $0,1,2,\cdots,3^p-1$.

所以，$a_{p+1}$ 应是除上述表示外，在 $\sum_{i=1}^{m}y_ia_i$，$y_i\in\{0,1,2\}$ 中的最小数，因此 $a_{p+1}=3^p$.

由数学归纳法可知，$a_i=3^{i-1}$，$(1\leqslant i\leqslant m)$.

由以上可知，当且仅当 $n=\dfrac{3^m-1}{2}$时，上述 $f(n)$块砝码的组成方式是惟一确定的.

# 第十二章　不定方程



12·1　有堆成一堆的100个小砝码，总量为500克，已知只有1克、10克和50克三种砝码，在这堆砝码中，每一种砝码各有多少？

（第9届全俄数学奥林匹克，1983年）

**[解]**　设1克，10克和50克砝码分别有$x$个，$y$个和$z$个，由题目条件得方程组

$$\begin{cases}x+y+z=100,\\x+10y+50z=500.\end{cases}$$

消去$x$得

$$9y+49z=400,$$

$$9(y+5z)=4(100-z).$$

由此可得

$$4\mid y+5z.$$

设$y+5z=4t$，　$t\in Z$，则

$$100-z=9t,$$

$$z=100-9t,$$

$$y=4t-5z=49t-500.$$

由$y\geqslant 1$，　$z\geqslant 1$可得

$$10<\frac{501}{49}\leqslant t\leqslant 11.$$

于是　$t=11$，　$z=1$，　$y=39$，　$x=60$.

所以在这堆砝码中，1克的60个，10克的39个，50克的1个.

12·2　今有两小堆小石头，如果从第一堆中取出100块放进第二堆，那么第二堆比第一堆多一倍，相反，如果从第二堆中取出一些放进第一堆，那么第一堆比第二堆多5倍，问第一堆中可能的最少石头块数

等于多少?并在这种情况下求出第二堆的石头块数.

（第 14 届全俄数学奥林匹克,1988 年）

**[解]** 设第一堆有 $x$ 块石头,第二堆有 $y$ 块石头,第二堆放到第一堆 $z$ 块石头.由题意

$$\begin{cases}2(x-100)=y+100, & ①\\ x+z=6(y-z). & ②\end{cases}$$

由 ① 得 $$y=2x-300,$$
代入 ② 得 $$11x-7z=1800,$$
$$4x+7(x-z)=1800. \qquad ③$$

因为 $4\mid 4x,\quad 4\mid 1800$,则
$$4\mid 7(x-z).$$

又因为$(4,7)=1$,则
$$4\mid x-z.$$

令 $x-z=4t,\quad t\in N$,则
$$4x+28t=1800,$$
$$x+7t=450.$$

于是
$$\begin{cases}x=-7t+450,\\ y=2x-300=-14t+600,\\ z=x-4t=-11t+450.\end{cases}$$

因为 $x,y,z\in N$,则
$$\begin{cases}-7t+450>0,\\ -14t+600>0,\\ -11t+450>0.\end{cases}$$

考虑到 $t$ 是整数,则
$$t\leqslant 40.$$

当 $t$ 取最大容许值 40 时,由 $x=-7t+450$ 得 $x$ 取最小值 170,此时 $y=40,\quad z=10$.

经检验
$$\begin{cases}x=170,\\ y=40,\\ z=10\end{cases}$$
为所求之解.

12·3 有24个面积为 $S$ 的全等小矩形,把所有这些小矩形拼成一

个与小矩形相似的大矩形,问小矩形的边长各是多少?

(中国北京市高中数学竞赛,1980年)

[解] 设小矩形两邻边分别为 $a$ 和 $b$(其中 $a > b$).

则大矩形的两邻边长为 $\sqrt{24}a$ 和 $\sqrt{24}b$.

再设大矩形长边包含小矩形的长边与短边的数目分别为 $x_1$, $x_2$($x_1, x_2$ 为非负整数),大矩形的短边包含小矩形的长边与短边数目分别为 $y_1, y_2$($y_1, y_2$ 为非负整数),则依题意有

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 = \sqrt{24}a, & ① \\ ay_1 + by_2 = \sqrt{24}b. & ② \end{cases}$$

由 ① 和 ② 分别解出 $\frac{a}{b}$,得

$$\frac{a}{b} = \frac{x_2}{\sqrt{24} - x_1} = \frac{\sqrt{24} - y_2}{y_1}.$$

由上面的等式可得

$$x_1 y_2 + 24 - x_2 y_1 = \sqrt{24}(x_1 + y_2). \quad ③$$

方程 ③ 的左边是整数,仅当 $x_1 + y_2 = 0$ 时,右边才是整数.又 $x_1$ 和 $y_2$ 是非负整数,则必有 $x_1 = y_2 = 0$.将它们代入方程①、②和③得

$$x_2 = \sqrt{24}\,\frac{a}{b},$$

$$y_1 = \sqrt{24}\,\frac{b}{a},$$

$$x_2 y_1 = 24.$$

因为 $a > b$,故有 $x_2 > y_1$.从而 $y_1$ 只能取数值 1,2,3,4.而 $x_2$ 相应地取值 24,12,8,6.

由 $ab = S$ 和 $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{24}}{y_1}$ 可得出 $a$ 和 $b$ 的四组解:

$y_1 = 1$ 时, $a = \sqrt[4]{24}\sqrt{S}$, $b = \sqrt[4]{\frac{1}{24}}\sqrt{S}$;

$y_1 = 2$ 时, $a = \sqrt[4]{6}\sqrt{S}$, $b = \sqrt[4]{\frac{1}{6}}\sqrt{S}$;

$y_1=3$ 时，$\quad a=\sqrt[4]{\dfrac{8}{3}}\sqrt{S},\quad b=\sqrt[4]{\dfrac{3}{8}}\sqrt{S}$；



$y_1=4$ 时，$\quad a=\sqrt[4]{\dfrac{3}{2}}\sqrt{S},\quad b=\sqrt[4]{\dfrac{2}{3}}\sqrt{S}$.

12·4　设 $a,b$ 为整数，问 $\Delta=\begin{vmatrix}36 & a\\ 81 & b\end{vmatrix}$ 的最小正整数值 $c$ 为多少？对满足 $\Delta=c$ 的各组正整数解 $(a,b)$ 中，要使 $a+b$ 为最小的值，问 $a,b$ 各为多少？

（中国上海市数学竞赛，1963 年）

[解]

$$\begin{aligned}\Delta&=36b-81a\\&=9(4b-9a).\end{aligned}$$

因为 $a,b$ 是整数，所以 $4b-9a$ 也是整数.

由于 $(4,9)=1$，所以存在整数 $a,b$ 使

$$4b-9a=1. \qquad ①$$

于是 $\Delta$ 的最小正整数值 $c=9$.

解方程 ① 得

$$\begin{cases}a=4t-1,\\ b=9t-2.\end{cases}$$

当 $t=1,2,3,\cdots$ 时，上式给出所有正整数解.

$$a+b=13t-3\quad(t=1,2,3,\cdots).$$

所以 $t=1$ 时，$a+b$ 的值最小，最小值为 10. 此时 $a=3,b=7$.

12·5　自然数序列 $\{x_n\}$ 按如下法则构造出来：

$$x_1=a,\quad x_2=b,\quad x_{n+2}=x_n+x_{n+1},\quad n\geqslant 1.$$

现知序列中的某项为1000，试问，和数 $a+b$ 的最小可能值是多少？

（前苏联教委推荐试题，1990 年）

[解]　可以求出数列的前几项：

$$x_1=a,\quad x_2=b,\quad x_3=a+b,\quad x_4=a+2b,$$

$$x_5=2a+3b,\quad x_6=3a+5b,\quad x_7=5a+8b,\cdots$$

一般地有关系式

$$x_n=t_na+t_{n+1}b$$

其中 $t_1=1,\quad t_2=0,\quad t_{n+2}=t_n+t_{n+1}$.

这一点不难用数学归纳法证明.

可以看出,从 $n=4$ 开始,序列 $\{t_n\}$ 便严格上升.

所以,若 $k>n\geqslant 4$,且

$$1000=t_na+t_{n+1}b$$
$$=t_ka'+t_{k+1}b',$$

则必有

$$(a+b)t_{n+1}>t_na+t_{n+1}b$$
$$=t_ka'+t_{k+1}b'$$
$$>t_k(a'+b')$$
$$\geqslant t_{n+1}(a'+b'),$$

即有

$$a+b>a'+b'.$$

这就表明,为得到 $a+b$ 的最小值,就应确定,对怎样的最大的 $n$,方程

$$t_na+t_{n+1}b=1000$$

有正整数解,而且还需要在解不惟一时,从中选出使得和数 $a+b$ 为最小的解来.

序列 $\{t_n\}$ 的开头一些项为

1,0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,610,987,…

显然,方程 $610a+987b=1000$ 以及其以后的相应的方程都不可能有正整数解.因为此时方程的左端对正整数 $a$ 和 $b$ 都大于 1000.

可以验证,方程

$$377a+610b=1000,$$
$$233a+377b=1000,$$
$$144a+233b=1000,$$

都没有正整数解.

而方程

$$89a+144b=1000$$

有惟一的一组正整数解:

$$a=8,\quad b=2.$$

由此得到 $a+b$ 的最小值为 10.

12·6　时钟的刻度盘(写有数字 1,2,…,11,12 的圆盘),以其中心为轴,固定在教室的黑板上,刻度盘可以绕轴转过 30° 的整数倍的任意角度.起初,在黑板上靠近刻度盘上的数字旁边的地方写上"0",然后转动刻度盘若干次,每次转动停止后,都将刻度盘上的数加到靠近它旁边

的黑板上所写的数字上，这样是否可以做到：

(1) 黑板上所写的各数都是 1984?

(2) 黑板上所写的各数除了一个之外，其余所写的数都是 1984?

(3) 黑板上所写的各数除了两个之外，其余所写的数都是 1984?

(第 10 届全俄数学奥林匹克，1984 年)

[**解**] (1) 题目的要求不能做到.

每次旋转钟面加到黑板上所有数的和是

$$1+2+3+\cdots+12=78.$$

即经过一次旋转，黑板上的各数之和能被 78 整除.

所以经过 $n$ 次旋转，黑板上各数之和为 $78n$.

如果黑板上 12 个位置的数都是 1984，则有

$$78n=12\cdot 1984.$$

而 $12\cdot 1984$ 不是 78 的倍数.

所以不可能使黑板上的所有数都是 1984.

(2) 同样不能做到.

假设刻度盘转动 $k$ 次之后，黑板上有 11 个地方写下的数是 1984，不失一般性，可以认为这 11 个地方是刻度盘在初始位置时，靠近刻度盘上的 12，1，2，…，9，10 等处的黑板上所写的地方.

用 $x_j(j=1,2,\cdots,12)$ 表示从初始位置算起，刻度盘沿逆时针方向转过 $30°\cdot j$ 的次数.

我们分析刻度盘在初始位置为 12 时，它旁边的黑板上所写的数 1984 是怎样得到的.

当刻度盘每次转过 $30°\cdot 1$ 时，在"12"时的旁边每次应加上 1，这样的情况有 $x_1$ 次；

当刻度盘每次转过 $30°\cdot 2$ 时，在"12"时的旁边每次应加上 2，这样的情况有 $x_2$ 次.

如此等等.

当刻度盘每次转过 $30°\cdot 12$ 时，在"12"时的旁边每次应加上 12，这样的情况有 $x_{12}$ 次.

因此，在"12"时旁边上的黑板上的 1984，有

$$1984=x_1+2x_2+3x_3+\cdots+12x_{12}.$$

对初始位置为其他数时，也可做同样的分析. 于是非负整数 $x_1$，

$x_2,\cdots,x_{12}$ 必须满足如下的 11 个方程组成的一次方程组：

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3+\cdots+11x_{11}+12x_{12}=1984, & ①\\ 2x_1+3x_2+4x_3+\cdots+12x_{11}+x_{12}=1984, & ②\\ 3x_1+4x_2+5x_3+\cdots+x_{11}+2x_{12}=1984, & ③\\ \cdots\cdots \\ 10x_1+11x_2+12x_3+\cdots+8x_{11}+9x_{12}=1984, & ⑩\\ 11x_1+12x_2+x_3+\cdots+9x_{11}+10x_{12}=1984. & ⑪\end{cases}$$

② − ①，③ − ②，…，⑪ − ⑩ 得

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+\cdots+x_{10}+x_{11}-11x_{12}=0, & ⑫\\ x_1+x_2+x_3+x_4+\cdots+x_{10}-11x_{11}+x_{12}=0, & ⑬\\ \cdots\cdots \\ x_1+x_2-11x_3+x_4+\cdots+x_{10}+x_{11}+x_{12}=0. & ㉑\end{cases}$$

由 ⑫，⑬ 得

$$x_{11}=x_{12}.$$

类似地，可得

$$x_3=x_4=x_5=\cdots=x_{11}=x_{12}.$$

在方程组中将方程 ① − ⑪ 中的 $x_j(j=4,5,\cdots,12)$ 用 $x_3$ 代换得

$$\begin{cases}x_1+2x_2=1984-75x_3,\\ 2x_1+3x_2=1984-73x_3,\\ \cdots\cdots \\ 10x_1+11x_2=1984-57x_3,\\ 11x_1+12x_2=1984-55x_3.\end{cases}$$

由此可得

$$\begin{cases}x_1=79x_3-1984,\\ x_2=1984-77x_3.\end{cases}$$

因为 $x_1$ 与 $x_2$ 均为非负整数，则有

$$\begin{cases}79x_3-1984\geqslant 0,\\ 1984-77x_3\geqslant 0.\end{cases}$$

从而有

$$\frac{1984}{79}\leqslant x_3\leqslant\frac{1984}{77},$$

即
$$25.1\cdots \leqslant x_3 \leqslant 25.8\cdots.$$
显然,满足此不等式的整数 $x_3$ 不存在.

所以题设要求的情况不存在.

(3) 我们可以证明:在初始位置时,刻度盘的“12 时”,“1 时”,“2 时”,“3 时”,…,“9 时”旁边的黑板上所写的数是 1984 是可能的.

如(2) 我们得到 10 个方程的方程组:
$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+\cdots+11x_{11}+12x_{12}=1984, & ①\\ 2x_1+3x_2+4x_3+\cdots+12x_{11}+x_{12}=1984, & ②\\ 3x_1+4x_2+5x_3+\cdots+x_{11}+2x_{12}=1984, & ③\\ \cdots\cdots \\ 10x_1+11x_2+12x_3+\cdots+8x_{11}+9x_{12}=1984. & ⑩\end{cases}$$
同(2) 一样可得到用参数 $x_3,x_4$ 表达 $x_1$ 和 $x_2$ 的表达式:
$$\begin{cases} x_1=78x_4+x_3-1984,\\ x_2=1984-75x_4-2x_3.\end{cases}$$
因为 $x_2\geqslant 0$,则
$$75x_4+2x_3\leqslant 1984.$$
又因为 $x_3\geqslant 0$,则
$$x_4\leqslant \frac{1984}{75}\approx 26.4,$$
即
$$x_4\leqslant 26.$$
不难验证:$x_1=44$, $x_2=34$, $x_3=0$, $x_4=x_5=x_6=\cdots=x_{12}=26$ 满足上述的方程组.

因此,题设要求的第(3) 种情况是可能的.

12·7 $m$ 个盒子中,每个盒子中有一些球.设 $n<m$ 为一已知的自然数.施行下面的运算:从这些盒子中取 $n$ 个,在取定的盒子中各放入一个球,证明

(1) 如果$(m,n)=1$,则可施行有限次运算,使所有的盒子中含相等的球.

(2) 如果$(m,n)\neq 1$,则这些盒子中的球数,存在着一种初始的分布,使得不可能经过上面的运算(任意多次)达到全相等.

(第 26 届国际数学奥林匹克候选题,1985 年)

[证]　(1) 由于$(m,n)=1$，则存在自然数$u,v$使得

$$un-vm=1,$$

即
$$un=vm+1=v(m-1)+(v+1).$$

这就是说，拿出的$n$个盒子，在每个盒子里各放入$u$个球，相当于$m-1$个盒子放入$v$个球，一个盒子放入$v+1$个球，这就相当于只有一个盒子增加一个球，而其他盒子的球数不动，因此重复这一过程多次，就可以使所有盒子中的球数相等.

(2) 若
$$(m,n)=d>1.$$

如果开始时球的总数为$m+1$个，则$k$次后，球的总数为$m+1+kn$个.

我们证明$m+1+kn$不是$m$的倍数.

设$m=pd$，　$n=qd$，则

$$\begin{aligned}m+1+kn&=pd+kqd+1\\&=d(p+kq)+1.\end{aligned}$$

从而
$$d\nmid m+1+kn.$$

又
$$d\mid m,$$

所以
$$m\nmid m+1+kn.$$

由于$m+1+kn$不是$m$的倍数，所以不可能使$m$个盒子中的球数都相等.

12·8　波尔达维亚是一个奇特的国家，它的货币单位是布尔巴基，可是钱币只有两种：金币与银币．每一金币等于$n$布尔巴基，每一银币等于$m$布尔巴基，$m$和$n$都是自然数．用金币和银币可以组成10000布尔巴基，1875布尔巴基，3072布尔巴基等等．实际上，波尔达维亚的货币体系并没有粗看上去那样奇特.

(1) 证明只要保证有钱可找，就能购买任何价值为整数布尔巴基的货物.

(2) 证明任何超过$(mn-2)$布尔巴基的货款均可支付，而不需要找钱.

（第30届国际数学奥林匹克候选题，1989年）

[证]　(1) 因为　$(10000,1875,3072)=1$，

所以
$$(m,n)=1.$$

于是，存在正整数$\alpha,\beta$满足

$$\alpha n-\beta m=1.$$

从而 $$(k\alpha)n-(k\beta)m=k.$$

因此,要支付$k$布尔巴基,只要付出$k\alpha$个金币,找回$k\beta$个银币即可.

(2) 若 $k>mn-2$,即 $k\geqslant mn-1$,则在区间$[k\beta m,k\alpha n]$中含有

$$k\alpha n-k\beta m+1=k+1\geqslant mn$$

个连续整数,因此其中必有一个为 $mn$ 的倍数.设此数为 $tmn$.

则 $tn-k\beta$ 与 $k\alpha-tm$ 均非负,而

$$(tn-k\beta)m+(k\alpha-tm)n=k\alpha n-k\beta m=k.$$

于是用 $tn-k\beta$ 个银币,$k\alpha-tm$ 个金币即可支付$k$布尔巴基,无需找钱.

12·9　设 $a,b,c$ 是整数,求证存在整数 $p_1,q_1,r_1;p_2,q_2,r_2$ 满足

$$a=q_1r_2-q_2r_1,$$
$$b=r_1p_2-r_2p_1,$$
$$c=p_1q_2-p_2q_1.$$

(第 31 届国际数学奥林匹克候选题,1990 年)

[证]　(1) 若 $a,b,c$ 中至少有一个为 0,不妨设 $c=0$,取

$$p_1=p_2=-b,\quad q_1=q_2=a,\quad r_1=1,\quad r_2=2.$$

则满足题设的等式.

(2) 若 $a,b,c$ 均不为 0.

设$(a,b)=r$,则存在整数 $x,y$ 使

$$xa+yb=r.$$

令 $$p_1=cx,\quad q_1=cy,\quad p_2=-\frac{b}{r},$$

$$q_2=\frac{a}{r},\quad r_1=-r,\quad r_2=0.$$

则 $$q_1r_2-q_2r_1=cy\cdot 0+\frac{a}{r}r=a,$$

$$r_1p_2-r_2p_1=-r\left(-\frac{b}{r}\right)-0\cdot cx=b,$$

$$p_1q_2-p_2q_1=cx\cdot\frac{a}{r}+\frac{b}{r}\cdot cy=c\cdot\frac{ax+by}{r}=c.$$

12·10　证明对任意的整数 $a$ 和$b$,方程组

$$\begin{cases}x+y+2z+2t=a,\\ 2x-2y+z-t=b.\end{cases}$$

有整数解.

（匈牙利数学奥林匹克,1926年）

［证］ (1) 首先我们证明,如果 $a=1,\quad b=0$,那么方程组

$$\begin{cases}x+y+2z+2t=1,\\2x-2y+z-t=0.\end{cases}\qquad ①$$

至少有一组整数解.

事实上,

$$x=1,\quad y=0,\quad z=-1,\quad t=1$$

就是方程组 ① 的一组解.

(2) 如果 $a=0,\quad b=1$,那么方程组

$$\begin{cases}x+y+2z+2t=0,\\2x-2y+z-t=1,\end{cases}\qquad ②$$

也至少有一组整数解.

事实上,

$$x=-1,\quad y=-1,\quad z=1,\quad t=0$$

就是方程组 ② 的一组解.

(3) 如果方程组 ① 的任一组解为$(x_1,y_1,z_1,t_1)$,方程组 ② 的任一组解为$(x_2,y_2,z_2,t_2)$,那么

$$\begin{cases}x=ax_1+bx_2,\\y=ay_1+by_2,\\z=az_1+bz_2,\\t=at_1+bt_2.\end{cases}$$

满足原来的方程组

$$\begin{cases}x+y+2z+2t=a,\\2x-2y+z-t=b.\end{cases}\qquad ③$$

对于方程组 ① 和 ② 的特解

$$(x_1,y_1,z_1,t_1)=(1,0,-1,1),$$
$$(x_2,y_2,z_2,t_2)=(-1,-1,1,0).$$

则 $x=a-b,\quad y=-b,\quad z=-a+b,\quad t=a$ 是方程组 ③ 的整数解.

于是,对于任意的整数 $a$ 和 $b$,原来的方程组至少有一组整数解.

12·11　将一个自然数乘以 2 加上 1,然后把得到的数再乘以 2 并加上 1,以此类推,直到这种运算重复进行 100 次时止.最后得到的数能被 1980 整除吗?能被 1981 整除吗?

(基辅数学奥林匹克,1980 年)

[解]　(1) 由于每一步运算之后,总得到一个奇数,因此最后得到的奇数不能被偶数 1980 整除.

(2) 我们证明,按题目中的运算重复 100 次之后得到的数有可能被 1981 整除.

设第一个自然数为 $x-1$.

第一步运算后得到数 $2(x-1)+1=2x-1$.

第二步运算后得到数 $2(2x-1)+1=2^2x-1$.

若第 $k$ 步运算后得到数 $2^kx-1$,则第 $k+1$ 步运算得到的数为

$$2(2^kx-1)+1=2^{k+1}x-1.$$

因此,第 100 步运算之后得到的数为 $2^{100}x-1$.

由于$(2^{100},1981)=1$,则不定方程

$$2^{100}x-1981y=1$$

一定有整数解$(x_0,y_0)$,并且它的一般解为

$$\begin{cases}x=x_0+1981t,\\ y=y_0+2^{100}t. \quad t\in Z.\end{cases}$$

可以选择适当的整数 $t_0$,使

$$x=x_0+1981t_0>0,$$

$$y=y_0+2^{100}t_0>0.$$

对于这样的 $x,y$,则有

$$2^{100}x-1=1981y.$$

即最后得到的数 $2^{100}x-1$ 是 1981 的倍数.

12·12　设 $f(x)=3x+2$. 证明存在正整数 $m$,使得 $f^{(100)}(m)$ 能被 1988 整除.($f^{(k)}(x)$ 表示 $\underbrace{f(f(\cdots f(x)\cdots))}_{k个f}$).

(中国国家集训队选拔试题,1988 年)

[证]　由 $f(x)=3x+2$ 得

$$f(x)+1=3(x+1),$$

从而,对于给定的 $x$,有

$$f^{(n+1)}(x)+1=3[f^{(n)}(x)+1],$$
$$n=0,1,2,\cdots.$$

于是,数列$\{f^{(n)}(x)+1\}$是以3为公比的等比数列,因而

$$f^{(n)}(x)+1=3^n(x+1),\quad n=0,1,2,\cdots.$$

这样,要证明存在正整数$m$,使得$f^{(100)}(m)$能被1988整除,等价于要证方程

$$3^{100}(x+1)-1=1988y,$$

即

$$3^{100}(x+1)-1988y=1 \qquad ①$$

有整数解,且$x$为正整数.

因为 $$(3^{100},1988)=1,$$

所以方程①必有整数解.

设$(x_0,y_0)$是方程①的一组特解,则①的所有整数解可表示为

$$\begin{cases}x=x_0+1988t,\\ y=y_0+3^{100}t.\end{cases}$$

其中$t$为任意整数.

取足够大的$t$,使由上式给出的$x,y$均为正整数.此时令$m=x$,则$f^{(100)}(m)$能被1988整除.

12·13 若$n$是正整数,$X_n$表示所有$n$元非负整数有序组$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的集合,其中$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$满足方程$x_1+x_2+\cdots+x_n=n$.而$Y_n$表示所有$n$元非负整数有序组$(y_1,y_2,\cdots,y_n)$的集合,其中$(y_1,y_2,\cdots,y_n)$满足方程$y_1+y_2+\cdots+y_n=2n$.若对于$1\leqslant i\leqslant n$,有$x_i\leqslant y_i$,则称$X_n$中的$n$元组与$Y_n$中的$n$元组是相容的.证明不同的(但不必是不相交的)相容对的总数是一个完全平方数.

(加拿大数学奥林匹克训练题,1992年)

[证] 考虑$X_n$中一组特殊的$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.

假定它与$Y_n$中的$(y_1,y_2,\cdots,y_n)$是相容的.

对于$1\leqslant i\leqslant n$,令$z_i=y_i-x_i\geqslant 0$.

因为
$$\begin{aligned}&z_1+z_2+\cdots+z_n\\=&(y_1+y_2+\cdots+y_n)-(x_1+x_2+\cdots+x_n)\\=&n.\end{aligned}$$

所以$(z_1,z_2,\cdots,z_n)$属于$X_n$.

反之,对于 $X_n$ 中任何的$(z_1,z_2,\cdots,z_n)$,令 $y_i=x_i+z_i\geqslant x_i\quad(1\leqslant i\leqslant n)$,

因为
$$\begin{aligned}&y_1+y_2+\cdots+y_n\\=&(z_1+z_2+\cdots+z_n)+(x_1+x_2+\cdots+x_n)\\=&2n,\end{aligned}$$
所以$(y_1,y_2,\cdots,y_n)$属于 $Y_n$,从而与$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是相容的.

记 $|X_n|$ 表示集合 $X_n$ 中 $n$ 元有序组的个数.

由以上可知,$Y_n$ 中确有 $|X_n|$ 个 $n$ 元组与$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是相容的.

所以相容的对数总数为 $|X_n|^2$,是平方数.

12·14　证明方程 $x-y+z=1$ 有无穷多组满足如下条件的正整数解:其中 $x,y,z$ 两两不同,而且它们中任何两数的乘积都可被第三个数整除.

(第 22 届全苏数学奥林匹克,1988 年)

[证]　设 $x,y,z$ 是方程 $x-y+z=1$ 的满足条件的一组正整数解.

为满足 $x,y,z$ 中任两个的乘积都能被第三个整除,则有
$$x=mn,\quad y=nk,\quad z=mk.$$
其中 $m,n$ 和 $k$ 都是自然数.

则已知方程为
$$n(m-k)=1-mk,$$
$$n(k-m)=mk-1.$$

令 $k-m=1$,就可得到无穷多组解
$$\begin{cases}x=m(m^2+m-1),\\y=(m+1)(m^2+m-1),\\z=m(m+1).\end{cases}$$
其中 $m$ 为任意自然数.

12·15　求方程 $x^4+4y^4=2(z^4+4u^4)$　①

的整数解.

(波兰数学竞赛,1965 年)

[证 1]　显然,方程 ① 有解
$$x=y=z=u=0.$$

我们证明这是方程 ① 的惟一一组整数解.

为此,需要下面的引理:

如果 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 是互异的非负整数,而 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是不能被自然数 $c$ 整除的整数,那么

$$c^{k_1}x_1+c^{k_2}x_2+\cdots+c^{k_n}x_n\neq 0. \quad ②$$

事实上,若设 $k_1=\min\{k_1,k_2,\cdots,k_n\}$,则有

$$\begin{aligned}&c^{k_1}x_1+c^{k_2}x_2+\cdots+c^{k_n}x_n\\=&c^{k_1}(x_1+c^{k_2-k_1}x_2+\cdots+c^{k_n-k_1}x_n).\end{aligned}$$

因为当 $i\neq 1$ 时,$k_i-k_1>0$,因而 $c^{k_2-k_1}x_2+\cdots+c^{k_n-k_1}x_n$ 能被 $c$ 整除,而 $x_1$ 由已知不能被 $c$ 整除,于是 $x_1+c^{k_2-k_1}x_2+\cdots+c^{k_n-k_1}x_n\neq 0$.

又因为 $c^{k_1}\neq 0$,于是

$$c^{k_1}x_1+c^{k_2}x_2+\cdots+c^{k_n}x_n\neq 0.$$

下面证明问题本身.

设 $x,y,z,u$ 是方程 ① 的一组整数解.

则存在非负整数 $k,l,m,n$ 适合

$$x=2^kx_1,\quad y=2^ly_1,\quad z=2^mz_1,\quad u=2^nu_1.$$

其中 $x_1,y_1,z_1,u_1$ 是奇数或零.

把这些式子代入方程 ① 可得

$$2^{4k}x_1^4+2^{4l+2}y_1^4-2^{4m+1}z_1^4-2^{4n+3}u_1^4=0. \quad ③$$

然而,由 $4k,\ 4l+2,\ 4m+1,\ 4n+3$ 是互异的非负整数,若 $x_1,y_1,z_1$ 和 $u_1$ 都是奇数,则它们不能被 2 整除,由引理就有

$$2^{4k}x_1+2^{4l+2}y_1-2^{4m+1}z_1-2^{4n+3}u_1^4\neq 0. \quad ④$$

③ 和 ④ 矛盾.

因此只能有 $\qquad x_1=y_1=z_1=u_1=0,$

即 $\qquad x=y=z=u=0.$

**[证 2]** 设 $x,y,z,u$ 是方程 ① 的一组整数解.

则易知,$x$ 为偶数,设 $x=2x_1$, $x_1$ 为整数,则有

$$16x_1^4+4y^4=2(z^4+4u^4),$$

$$8x_1^4+2y^4=z^4+4u^4.$$

因而 $z$ 是偶数,设 $z=2z_1$, $z_1$ 为整数,则有

$$8x_1^4+2y^4=16z_1^4+4u^4,$$

$$4x_1^4+y^4=8z_1^4+2u^4.$$

因而 $y$ 是偶数,设 $y=2y_1$, $y_1$ 是整数,则有

$$4x_1^4+16y_1^4=8z_1^4+2u^4,$$

$$2x_1^4+8y_1^4=4z_1^4+u^4.$$

因而 $u$ 是偶数,设 $u=2u_1$, $u_1$ 是整数,则有

$$2x_1^4+8y_1^4=4z_1^4+16u_1^4,$$

$$x_1^4+4y_1^4=2(z_1^4+4u_1^4).$$

重复上面的讨论可得,$x_1,y_1,z_1,u_1$ 都是偶数,于是又可设

$$x_1=2x_2,\quad y_1=2y_2,\quad z_1=2z_2,\quad u_1=2u_2.$$

这样经过 $k$ 步,若 $x,y,z,u$ 都不等于0,则有

$$x_k=y_k=z_k=u_k=2,\text{但是}$$

$$2^4+4\cdot 2^4\neq 2(2^4+4\cdot 2^4).$$

所以必有 $\qquad x=y=z=u=0.$

12·16 求不定方程 $x_1^4+x_2^4+\cdots+x_{14}^4=1599$ 的一切(如果有的话)非负整数解$(x_1,x_2,\cdots,x_{14})$,不计排列顺序.

(第8届美国数学奥林匹克,1979年)

**[解1]** 由于 $6^4=1296,7^4=2401$,所以

$$6^4<1599<7^4.$$

于是 $\qquad 0\leqslant x_i\leqslant 6\quad (i=1,2,\cdots,14).$

设诸 $x_i$ 中取值为 $k$ 的有 $y_k$ 个$(k=0,1,2,\cdots,6)$,则原方程化为

$$\begin{cases}0^4\cdot y_0+1^4y_1+2^4y_2+3^4y_3+4^4y_4+5^4y_5+6^4y_6=1599,\\ y_0+y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6=14.\end{cases}$$

即 $\begin{cases}y_1+16y_2+81y_3+256y_4+625y_5+1296y_6=1599,\\ y_0+y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6=14.\end{cases}$

我们注意到1599是3的倍数,而不是 $3^4$ 的倍数,81和1296都是 $3^4$ 的倍数,并且 $1^4=1$, $2^4=16$, $4^4=256$, $5^4=625$ 均被3除余1,于是,$y_1+y_2+y_4+y_5$ 是3的倍数,即

$$y_1+y_2+y_4+y_5=3\text{ 或 }6\text{ 或 }9\text{ 或 }12,$$

相应地

$$y_0+y_3+y_6=11\text{ 或 }8\text{ 或 }5\text{ 或 }2.$$

于是我们得到关于 $y_i$ 的四个线性方程组:

$$(\text{Ⅰ})\begin{cases}y_1+16y_2+81y_3+256y_4+625y_5+1296y_6=1599,\\ y_1+y_2+y_4+y_5=3,\\ y_0+y_3+y_6=11.\end{cases}$$

$$(\text{Ⅱ})\begin{cases}y_1+16y_2+81y_3+256y_4+625y_5+1296y_6=1599,\\ y_1+y_2+y_4+y_5=6,\\ y_0+y_3+y_6=8.\end{cases}$$

$$(\text{Ⅲ})\begin{cases}y_1+16y_2+81y_3+256y_4+625y_5+1296y_6=1599,\\ y_1+y_2+y_4+y_5=9,\\ y_0+y_3+y_6=5.\end{cases}$$

$$(\text{Ⅳ})\begin{cases}y_1+16y_2+81y_3+256y_4+625y_5+1296y_6=1599,\\ y_1+y_2+y_4+y_5=12,\\ y_0+y_3+y_6=2.\end{cases}$$

下面我们设法求方程组(Ⅰ)-(Ⅳ)的非负整数解.

先求方程组(Ⅰ)的解.

$$\begin{cases}y_1=-\dfrac{517}{5}+\dfrac{27}{5}y_3+\dfrac{80}{5}y_4+\dfrac{203}{5}y_5+\dfrac{432}{5}y_6,\\ y_2=\dfrac{532}{5}-\dfrac{27}{5}y_3-\dfrac{85}{5}y_4-\dfrac{208}{5}y_5-\dfrac{432}{5}y_6,\\ y_0=11-y_3-y_6.\end{cases}$$

这里 $y_3,y_4,y_5,y_6$ 可自由取值,但是我们注意到,由(Ⅰ)的一个方程及非负整数解的约束,有 $y_6<2$, $y_5<3$,从而 $(y_6,y_5,y_4)$ 所可能取的值为

$$\begin{array}{lllll}(0,0,0), & (0,0,1), & (0,0,2), & (0,0,3), & (0,0,4),\\ (0,0,5), & (0,0,6), & (0,1,0), & (0,1,1), & (0,1,2),\\ (0,1,3), & (0,2,0), & (0,2,1), & (1,0,0), & (1,0,1),\end{array}$$

把这些取值代入上面的方程组,不论 $y_3$ 取何非负整数值,都不能使 $y_1,y_2,y_0$ 是非负整数,所以方程组(Ⅰ)没有非负整数解.

同理,方程组(Ⅱ),(Ⅲ),(Ⅳ)也没有非负整数解.

因此原方程没有非负整数解.

[**解 2**]　若 $x$ 为偶数,则

$$x^4 \equiv 0 \pmod{16}.$$

若 $x$ 为奇数,则

$$x^4 \equiv 1 \pmod{16}.$$

我们设　$a \equiv x_1^4 + x_2^4 + \cdots + x_{14}^4 \pmod{16}$,且 $0 \leqslant a < 16$,则 $0 \leqslant a \leqslant 14$,而

$$1599 = 1600 - 1 \equiv 15 \pmod{16},$$

故方程 $x_1^4 + x_2^4 + \cdots + x_{14}^4 = 1599$ 没有整数解.

12·17　对于每个正整数 $n$,以 $S(n)$ 表示满足如下条件的最大整数:对于每个正整数 $k \leqslant S(n)$, $n^2$ 都可以表为 $k$ 个正整数的平方之和.

(1) 证明对于每个 $n \geqslant 4$,都有 $S(n) \leqslant n^2 - 14$;

(2) 试找出一个正整数 $n$,使得 $S(n) = n^2 - 14$;

(3) 证明存在无限多个正整数 $n$,使得

$$S(n) = n^2 - 14.$$

(第 33 届国际数学奥林匹克,1992 年)

[**证**]　(1) 假设命题不成立,即对某个 $n \geqslant 4$,有 $S(n) > n^2 - 14$,即存在 $k = n^2 - 13$ 个正整数

$$a_1, a_2, \cdots, a_k$$

使得　$$n^2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_k^2.$$

所以　$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_k^2 = k + 13.$$

于是有　$$\sum_{i=1}^{k}(a_i^2 - 1) = 13.$$

由于 $a_i$ 为正整数,所以由上式可知,必有

$$0 \leqslant a_i^2 - 1 \leqslant 13.$$

从而 $a_i = 1,2,3$,即

$$a_i^2 - 1 \in \{0,3,8\}.$$

设在 $a_1^2 - 1$, $a_2^2 - 1$, $\cdots$, $a_k^2 - 1$ 中有 $a$ 个 0, $b$ 个 3, $c$ 个 8,于是就有

$$3b + 8c = 13.$$

要使这个不定方程有非负整数解,$c$ 只能为 0 或 1. 当 $c = 0$ 时,$3b$

$=13$,当 $c=1$ 时,$3b=5$,此时均不存在整数解 $b$.

因此上述假设不成立,所以对一切正整数 $n\geqslant 4$,都有

$$S(n)\leqslant n^2-14.$$

(2) 我们证明,对 $n=13$ 可以成立等式 $S(n)=n^2-14$.

首先证明:每一个大于 13 的正整数 $l$ 都可以表示为 $3s+8t$ 的形式,其中 $s$ 和 $t$ 为非负整数.

事实上,若 $l=3s_0$,则 $l=3s_0+8\cdot 0$;

若 $l=3s_1+1$,则 $s_1\geqslant 5$, $l=3(s_1-5)+8\cdot 2$;

若 $l=3s_2+2$,则 $s_2\geqslant 4$, $l=3(s_2-2)+8\cdot 1$.

于是可以对满足 $s+t\leqslant k\leqslant n^2-14$ 的 $k$,取 $s,t$ 使

$$3s+8t=n^2-k.$$

若 $s+t\leqslant k$,则有等式

$$\begin{aligned}&\underbrace{1^2+\cdots+1^2}_{(k-s-t)\text{个}}+\underbrace{2^2+\cdots+2^2}_{s\text{个}}+\underbrace{3^2+\cdots+3^2}_{t\text{个}}\\ =\ &k-s-t+4s+9t\\ =\ &3s+8t+k\\ =\ &n^2.\end{aligned}$$

即 $n^2$ 可以表为 $k$ 个平方数之和.

当 $k\geqslant \frac{1}{4}n^2$ 时,则

$$k\geqslant \frac{1}{4}n^2\geqslant \frac{1}{3}(n^2-k)\geqslant s+t.$$

此时每个 $n^2$ 都可表为

$$\left[\frac{1}{4}n^2\right]+1,\quad \left[\frac{1}{4}n^2\right]+2,\quad \cdots,\quad n^2-15,\quad n^2-14$$

个平方数之和.

令 $n=13$,由于 $\left[\frac{1}{4}n^2\right]+1=\left[\frac{169}{4}\right]+1=43$,所以 $13^2$ 可以表为 $43,44,\cdots,155$ 个平方数之和.

因此我们只要证明 $13^2$ 能表示为 $1,2,\cdots,42$ 个平方数之和即可.由于

$$\begin{aligned}n^2&=13^2=12^2+5^2=12^2+4^2+3^2=8^2+8^2+5^2+4^2\\&=8^2+8^2+4^2+4^2+3^2.\end{aligned}$$

因为 $8^2=4^2+4^2+4^2+4^2$,$4^2=2^2+2^2+2^2+2^2$,

$2^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$,

即 $8^2$ 可表为4个 $4^2$ 之和,$4^2$ 可表为4个 $2^2$ 之和,$2^2$ 可表为4个 $1^2$ 之和,所以对于 $n^2 = 8^2 + 8^2 + 5^2 + 4^2$ 可表为 $4,7,10,\cdots,43$ 个平方数之和.

对于 $n^2 = 8^2 + 8^2 + 4^2 + 4^2 + 3^2$ 又可表为 $5,8,11,\cdots,44$ 个平方数之和.

下面讨论 $n^2 = 12^2 + 4^2 + 3^2$.

因为 $12^2$ 可表为4个 $6^2$ 之和,$6^2$ 可表为4个 $3^2$ 之和,$4^2$ 可表为4个 $2^2$ 之和,$2^2$ 可表为4个 $1^2$ 之和,所以 $n^2 = 12^2 + 4^2 + 3^2$ 可表为 $3,6,9,\cdots,33$ 个平方数之和.

又因为 $n^2 = \underbrace{3^2 + 3^2 + \cdots + 3^2}_{17个} + 4^2, 3^2 = 2^2 + 2^2 + 1^2$.

所以 $n^2$ 又可表为 $18 + 2 \cdot 9 = 36, 18 + 2 \cdot 12 = 42$ 个平方数之和,再由 $4^2$ 可表为4个 $2^2$ 之和,则 $n^2$ 也可表为 $36 + 3 = 39$ 个平方数之和.

因此 $n^2$ 可以表为 $1,2,3,\cdots,42,43,44$ 个平方数之和.

由以上 $n^2 = 13^2$ 可表为 $1,2,\cdots,155$ 个平方数之和. $n = 13$ 满足要求.

(3) 我们证明　如果 $S(n) = n^2 - 14$,则 $S(2n) = (2n)^2 - 14$,其中 $n \geqslant 13$.

首先对任何正整数 $1 \leqslant k \leqslant n^2 - 14$,都存在 $k$ 个正整数 $a_1, a_2, \cdots, a_k$,使得

$$n^2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_k^2.$$

因此　$(2n)^2 = (2a_1)^2 + (2a_2)^2 + \cdots + (2a_k)^2$.

可见,对于这样的 $k$, $(2n)^2$ 都能表示成 $k$ 个平方数之和. 由此,由 $(2n)^2 = n^2 + n^2 + n^2 + n^2$ 可知,对 $1 \leqslant k \leqslant 4(n^2 - 14)$, $(2n)^2$ 都能表示为 $k$ 个平方数之和.

对于任何正整数 $4(n^2 - 14) \leqslant k \leqslant 4n^2 - 14$,

因为 $n \geqslant 13$,则有

$$4k \geqslant 16(n^2 - 14) = 4n^2 + 2(6n^2 - 112) > (2n)^2,$$

由(2)的证明可知,对于 $k \geqslant \frac{1}{4}(2n)^2$, $(2n)^2$ 可以表示为 $k$ 个平方数之和.

综上所述,对于 $n \geqslant 13$,只要有 $S(n) = n^2 - 14$,则必有 $S(2n) =$

$(2n)^2-14$,由(2)已存在 $n=13$,使 $S(13)=13^2-14$,所以存在无限多个正整数 $n$,使得 $S(n)=n^2-14$.

12·18　方程 $(x-a)(x-8)-1=0$ 有两个整数根,求 $a$.

(中国初中数学联赛,1990年)

[解]　设方程的两个整数根为 $x_1,x_2$,则

$$(x-a)(x-8)-1=(x-x_1)(x-x_2).$$

令 $x=8$,则上式化为

$$(8-x_1)(8-x_2)=-1.$$

所以　$x_1=7,\quad x_2=9$ 或 $x_1=9,\quad x_2=7$.

因而有　$(x-a)(x-8)-1=(x-7)(x-9)$.

再令 $x=9$,则上式化为

$$(9-a)-1=0.$$

于是　$a=8$.

12·19　试求出所有这样的自然数 $p$ 和 $q$,使得方程 $x^2-pqx+p+q=0$ 的两个根都是整数.

(第17届全俄数学奥林匹克,1991年)

[解]　设 $x_1,x_2$ 是已知方程的两个整数根.

由韦达定理知

$$x_1+x_2=pq,$$
$$x_1x_2=p+q.$$

由于 $p$ 和 $q$ 是自然数,因此整数 $x_1$ 和 $x_2$ 也都是自然数,由上两式可得

$$x_1x_2-x_1-x_2=p+q-pq,$$

从而得

$$(x_1-1)(x_2-1)+(p-1)(q-1)=2. \qquad ①$$

① 式仅在这样三种情况下成立:

第一种情况:① 的左边第一项为0,第二项为2,此时有

$$\begin{cases}p-1=1,\\ q-1=2,\end{cases} \text{或} \begin{cases}p-1=2,\\ q-1=1.\end{cases}$$

可得　$(p,q)=(2,3)$ 或 $(3,2)$.

对应的方程为　$x^2-6x+5=0$,

该方程具有整数根 $x_1 = 5,\quad x_2 = 1.$

第二种情况:① 的左边两项均为1,此时有

$$\begin{cases} p - 1 = 1, \\ q - 1 = 1. \end{cases}$$

可得 $(p,q) = (2,2).$

对应的方程为 $x^2 - 4x + 4 = 0.$

该方程具有(二重)整数根 $x_1 = x_2 = 2.$

第三种情况:① 的左边第一项为2,第二项为0,此时有

$$p - 1 = 0 \text{ 或 } q - 1 = 0.$$

由此知 $x_1 = 3,\quad x_2 = 2.$ 从而

$$x_1 + x_2 = 5,\quad x_1x_2 = 6.$$

于是可得 $p = 1$ 时, $q = 5$, $q = 1$ 时, $p = 5$.

即得 $(p,q) = (1,5)$ 或 $(5,1)$.

对应的方程为

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

由以上,所求的自然数 $p,q$ 有五组:

$$\begin{cases} p = 2, \\ q = 3, \end{cases} \quad \begin{cases} p = 3, \\ q = 2, \end{cases} \quad \begin{cases} p = 2, \\ q = 2, \end{cases} \quad \begin{cases} p = 1, \\ q = 5, \end{cases} \quad \begin{cases} p = 5, \\ q = 1. \end{cases}$$

12·20　求满足方程 $x^2 + 2xy + 3y^2 - 2x + y + 1 = 0$ 的所有有序整数对 $(x, y)$.

(中国北京市高二数学竞赛,1988年)

[解]　把已知方程化为关于 $x$ 的二次方程

$$x^2 + 2(y - 1)x + (3y^2 + y + 1) = 0.$$

若方程有整数解,则其必要条件是

$$\Delta = 4[(y - 1)^2 - (3y^2 + y + 1)] \geqslant 0,$$

由此解得 $-\dfrac{3}{2} \leqslant y \leqslant 0.$

由于 $y$ 是整数,则 $y = 0, -1.$

当 $y = 0$ 时, $x^2 - 2x + 1 = 0,$

$$x = 1.$$

当 $y = -1$ 时,

$$x^2 - 4x + 3 = 0,$$

$$x=1, x=3.$$

所以,满足已知方程的所有有序整数对为

$$(x,y)=(1,0),(1,-1),(3,-1).$$

12·21　已知方程 $x^2+bx+c=0$ 及 $x^2+cx+b=0$ 分别各有两个整数根 $x_1,x_2$ 和 $x'_1,x'_2$,且 $x_1x_2>0$, $x'_1x'_2>0$.

(1) 求证 $x_1<0$, $x_2<0$, $x'_1<0$, $x'_2<0$;

(2) 求证 $b-1\leqslant c\leqslant b+1$;

(3) 求 $b,c$ 所有可能的值.

(中国初中数学联赛,1993 年)

[解]　(1) 假如 $x_1>0$,则由 $x_1x_2>0$ 可得 $x_2>0$,

对于已知两个方程用韦达定理得

$$x_1+x_2=-b=-x'_1x'_2.$$

若 $x_1>0$, $x_2>0$,则 $x_1+x_2>0$,从而 $x'_1x'_2<0$ 与已知矛盾.

于是　$x_1<0$, $x_2<0$.

同理可证　$x'_1<0$, $x'_2<0$.

(2) 由韦达定理及 $x_1<0$, $x_2<0$ 得

$$\begin{aligned}c-(b-1)&=c-b+1\\&=x_1x_2+x_1+x_2+1\\&=(x_1+1)(x_2+1)\geqslant 0.\end{aligned}$$

所以　$b-1\leqslant c$.

再由 $x'_1<0$, $x'_2<0$ 得

$$\begin{aligned}b+1-c&=x'_1x'_2+1+x'_1+x'_2\\&=(x'_1+1)(x'_2+1)\geqslant 0.\end{aligned}$$

所以　$c\leqslant b+1$.

于是　$b-1\leqslant c\leqslant b+1$.

(3) 由(2)可知 $c$ 只有三种可能:$c=b+1$, $c=b$ 和 $c=b-1$.

当 $c=b+1$ 时,由韦达定理有

$$x_1x_2=-x_1-x_2+1,$$

从而　$(x_1+1)(x_2+1)=2$.

由于 $x_1$ 和 $x_2$ 都是负整数,故

$$\begin{cases}x_1+1=-1,\\x_2+1=-2,\end{cases}\quad \text{或} \quad \begin{cases}x_1+1=-2,\\x_2+1=-1.\end{cases}$$



由此算出 $b=5,\quad c=6.$

经检验,$b=5,\quad c=6$ 符合题意.

当 $c=b$ 时,有

$$x_1x_2=-x_1-x_2,$$

从而 $$(x_1+1)(x_2+1)=1.$$

由此得 $$x_1=x_2=-2.$$

由此算出 $$b=c=4.$$

经检验,$b=4,\quad c=4$ 符合题意.

当 $c=b-1$ 时,有

$$x'_1x'_2-1=-x'_1-x'_2,$$

从而 $$(x'_1+1)(x'_2+1)=2.$$

由此算出 $b=6,\quad c=5.$

经检验 $b=6,\quad c=5$ 符合题意.

综合以上,$b,c$ 所有可能的值有三组:

$$\begin{cases}b=5,\\c=6,\end{cases}\quad\begin{cases}b=4,\\c=4,\end{cases}\quad\begin{cases}b=6,\\c=5.\end{cases}$$

12·22 求方程 $\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}=\dfrac{3}{7}$ 的所有整数解.

(第 12 届全俄数学奥林匹克,1986 年)

**[解 1]** 由原方程得

$$7(x+y)=3(x^2-xy+y^2). \qquad ①$$

设 $x+y=p,\quad x-y=q$,则

$$x=\frac{p+q}{2},\quad y=\frac{p-q}{2},\quad xy=\frac{p^2-q^2}{4}.$$

代人 ① 式可得

$$28p=3(p^2+3q^2). \qquad ②$$

于是 $p\geqslant 0$,且 $p$ 是 3 的倍数.

设 $p=3k(k\in\overline{Z^-})$,代人 ② 得

$$28k=3(3k^2+q^2). \qquad ③$$

于是 $k\geqslant 0$,且 $k$ 是 3 的倍数.

设 $k = 3m(m \in \overline{Z^-})$，代入③得

$$28m = 27m^2 + q^2,$$

$$m(28 - 27m) = q^2 \geqslant 0.$$

于是 $28 - 27m > 0$，得

$$0 \leqslant m < \frac{28}{27},$$

即 $m = 0$ 或 1.

当 $m = 0$ 时，$k = 0$，$p = 0$，$q = 0$，于是 $x = y = 0$，

但 $x = 0$，$y = 0$ 不满足方程.

当 $m = 1$ 时，$k = 3$，$p = 9$，$q = \pm 1$，从而方程有两组解

$$\begin{cases} x = 5, \\ y = 4, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4, \\ y = 5. \end{cases}$$

**[解 2]** 已知方程可化为

$$3x^2 - 3xy + 3y^2 - 7x - 7y = 0,$$

$$3x^2 - (3y + 7)x + 3y^2 - 7y = 0.$$

这是关于 $x$ 的二次方程，其有整数解的必要条件是

$$\Delta = (3y + 7)^2 - 12(3y^2 - 7y) \geqslant 0,$$

$$27y^2 - 126y - 49 \leqslant 0,$$

$$\frac{21 - 14\sqrt{3}}{9} \leqslant y \leqslant \frac{21 + 14\sqrt{3}}{9}.$$

于是满足此不等式的整数 $y$ 只有

$$y = 0,1,2,3,4,5.$$

经验算：$y = 0,1,2,3$ 时，$x$ 均不是整数.

所求的整数解为

$$\begin{cases} x = 5, \\ y = 4, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4, \\ y = 5. \end{cases}$$

12·23 试求方程 $x + y = x^2 - xy + y^2$ 的整数解.

（第 7 届莫斯科数学奥林匹克，1941 年）

**[解 1]** 已知方程可化为

$$x^2 - (y + 1)x + y^2 - y = 0.$$

若方程有整数解，则其判别式

$$\Delta = (y + 1)^2 - 4(y^2 - y) \geqslant 0,$$

$$3y^2-6y-1\leqslant 0,$$

$$\frac{6-4\sqrt{3}}{6}\leqslant y\leqslant\frac{6+4\sqrt{3}}{6},$$

$$1-\frac{2}{3}\sqrt{3}\leqslant y\leqslant 1+\frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

由于 $y$ 是整数,则 $y=0,1,2.$

当 $y=0$ 时,已知方程化为

$$x=x^2,$$

解得 $x=0$ 或 $x=1$;

当 $y=1$ 时,已知方程化为

$$x^2-2x=0,$$

解得 $x=0$ 或 $x=2$;

当 $y=2$ 时,已知方程化为

$$x^2-3x+2=0,$$

解得 $x=1$ 或 $x=2$.

于是求得六组整数解:

$$(x,y)=(0,0),(1,0),(0,1),(2,1),(1,2),(2,2).$$

[解 2] 已知方程可化为

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(x-y)^2=2$$

的形式.

于是可得下面的方程组:

$$\begin{cases}(x-1)^2=1,\\(y-1)^2=1,\\(x-y)^2=0,\end{cases}\quad\begin{cases}(x-1)^2=1,\\(y-1)^2=0,\\(x-y)^2=1,\end{cases}\quad\begin{cases}(x-1)^2=0,\\(y-1)^2=1,\\(x-y)^2=1.\end{cases}$$

由以上可解得

$$(x,y)=(0,0),(1,0),(0,1),(2,1),(1,2),(2,2).$$

12·24 证明对于每个实数 $N$,方程

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4$$

有一解 $x_1,x_2,x_3,x_4$ 都是大于 $N$ 的整数.

(第 39 届美国普特南数学竞赛,1978 年)

[证] 显然,$(x_1,x_2,x_3,x_4)=(1,1,1,1)$ 是方程的一组解.

固定 $x_1,x_2,x_3$,则原式化为

$$x_4^2-(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x_4+x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2x_3=0.$$

这是一个关于 $x_4$ 的二次方程.

若 $x_4$ 是方程的一个解,则由韦达定理

$$x'_4=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3-x_4,$$

在 $x'_4\neq x_4$ 时,$x'_4$ 是方程的另一个解.

于是当$(x_1,x_2,x_3,x_4)=(1,1,1,1)$时,

$$x'_4=1+1+1-1=2,$$

即$(1,1,1,2)$是方程的一组解.

由对称性$(1,1,2,1)$也是方程的解,

进而$(1,1,2,1\cdot1+1\cdot2+1\cdot2-1)=(1,1,2,4)$是方程的解.

于是$(1,1,4,2)$是方程的解,下一个解是$(1,1,4,7)$,再由对称性得到解$(1,1,7,4)$,如此下去,即可得到符合题目要求的解.

12·25　证明对于每个实数 $R_0$,方程 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=x_1x_2x_3$ 必有一组解 $x_1,x_2,x_3$,它们都是大于 $R_0$ 的整数.

(第 1 届中国浙江省数学夏令营,1989 年)

[证]　显然 $x_1=x_2=x_3=3$ 是方程

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=x_1x_2x_3 \quad ①$$

的一组解.

把 ① 看成关于 $x_3$ 的二次方程

$$x_3^2-(x_1x_2)x_3+x_1^2+x_2^2=0. \quad ②$$

设 ② 的解为 $x_3$,　$x_3^{(1)}$,则由韦达定理

$$x_3+x_3^{(1)}=x_1x_2,$$

$$x_3^{(1)}=x_1x_2-x_3.$$

因为 $x_3=3$ 是方程 ② 的一个解,则

$$x_3^{(1)}=x_1x_2-x_3=3\cdot3-3=6>x_3$$

也是方程 ② 的解,且 $x_3^{(1)}$ 是整数,$x_3^{(1)}>x_3$.

同理可证,$x_1,x_2$ 的另一解 $x_1^{(1)},x_2^{(1)}$ 都满足

$$x_1^{(1)}>x_1,$$

$$x_2^{(1)}>x_2.$$

于是我们有

$$x_1^{(1)^2}+x_2^{(1)^2}+x_3^{(1)^2}=x_1^{(1)}x_2^{(1)}x_3^{(1)}. \qquad ③$$

从 ① 到 ③ 可以看作一次递推，于是经过有限次递推必能得到一组解($x_1^{(n)},x_2^{(n)},x_3^{(n)}$)，它们都是整数，且每一个都大于预先指定的实数 $R_0$.



12·26　求正整数 $x_1,x_2,\cdots,x_{29}$，其中至少有一个大于1988，使得 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{29}^2=29x_1x_2\cdots x_{29}$ 成立.

（第 29 届国际数学奥林匹克候选题，1988 年）

**[解 1]**　设($x_1,x_2,\cdots,x_{29}$)是方程

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{29}^2=29x_1x_2\cdots x_{29} \qquad ①$$

的一组整数解.

令
$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{28}^2=q,$$
$$29x_1x_2\cdots x_{28}=p.$$

则方程 ① 化为

$$q+x_{29}^2=px_{29},$$

即
$$x_{29}^2-px_{29}+q=0. \qquad ②$$

于是，由 ②，$x_{29}$ 与 $p-x_{29}$ 是方程

$$t^2-pt+q=0$$

的两个根.

这就表明，如果($x_1,x_2,\cdots,x_{29}$)是方程 ① 的一组整数解，那么($x_1,x_2,\cdots,x_{28},29x_1x_2\cdots x_{28}-x_{29}$)也是方程 ① 的一组整数解.

显然，(1,1,…,1)是 ① 的一组解，由上面的结论可知(1,1,…,1，$29\cdot1\cdot1\cdots1-1$) = (1,1,…,1,28)是 ① 的另一组解.

由对称性，$(\underbrace{1,1,\cdots,1}_{27个},28,1)$ 也是 ① 的一组解. 进而

$$\begin{aligned}&(1,1,\cdots,1,28,29\cdot28\cdot1^{27}-1)\\ =\ &(1,1,\cdots,1,28,811)\end{aligned}$$

是 ① 的一组解.

再由对称性，(1,1,…,1,811,28)是 ① 的一组解，从而

$$\begin{aligned}&(1,1,\cdots,1,811,29\cdot811\cdot1^{27}-28)\\ =\ &(1,1,\cdots,1,811,23491)\end{aligned}$$

也是 ① 的一组解.

于是，(1,1,…,1,811,23491) 就是符合题目要求的一组解. 同时由以上方法可以得出无穷多组符合题目要求的整数解.

**[解 2]** 设$(x_1,x_2,\cdots,x_{29})$是方程

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{29}^2=29x_1x_2\cdots x_{29} \quad ①$$

的一组整数解.

为了使其中一个大于 1988，考虑给 $x_1$ 一个增量 $h$.

为此设 $x'_1=x_1+h,\quad h>0$.

并设 $x'_1,x_2,\cdots,x_{29}$ 仍满足方程 ①，则

$$(x_1+h)^2+x_2^2+\cdots+x_{29}^2=29(x_1+h)x_2\cdots x_{29}. \quad ②$$

② − ① 得

$$2x_1h+h^2=29hx_2x_3\cdots x_{29}.$$

由 $h\neq 0$ 得

$$h=29x_2x_3\cdots x_{29}-2x_1. \quad ③$$

由$(x_1,x_2,\cdots,x_{29})=(1,1,\cdots,1)$ 是方程 ① 的解可得

$$h=27,\quad x'_1=28.$$

显然(28,1,1,…,1) 为方程 ① 的解.

由于 ③ 式对于任何 $x_i$ 都适合，则还有

$$\begin{aligned}h&=29x'_1x_3x_4\cdots x_{29}-2x_2\\&=812-2\\&=810.\end{aligned}$$

于是 $x'_2=x_2+h=811.$

再令

$$\begin{aligned}h&=29x'_2x_3\cdots x_{29}-2x'_1\\&=29\cdot 811-2\cdot 28\\&=23463.\end{aligned}$$

则 $x''_1=28+23463=23491.$

于是(23491,811,1,1,…,1) 为方程 ① 的一组解. 这组解符合题目的要求.

12·27 设有理数 $x,y$ 满足方程$x^5+y^5=2x^2y^2$. 证明 $1-xy$ 是有理数的平方.

（第 22 届全苏数学奥林匹克，1988 年）

**[证]** $x=0,\quad y=0$ 显然是已知方程的解.

此时，$1-xy=1$ 是有理数的平方.

若 $xy\neq 0$，将已知方程两边平方得

$$x^{10}+2x^5y^5+y^{10}=4x^4y^4,$$

即

$$x^{10}-2x^5y^5+y^{10}=4x^4y^4(1-xy).$$

于是

$$1-xy=\frac{x^{10}-2x^5y^5+y^{10}}{4x^4y^4},$$

$$1-xy=\left(\frac{x^5-y^5}{2x^2y^2}\right)^2.$$

12·28　试找出如下方程 $x^2-51y^2=1$ 的一组正整数解.

（第 14 届全俄数学奥林匹克，1988 年）

[**解**]　已知方程可化为

$$\begin{aligned}x^2&=51y^2+1\\&=49y^2+14y+1+2y^2-14y\\&=(7y+1)^2+2y(y-7).\end{aligned}$$

于是 $y-7=0$，即 $y=7$ 时，上式右边为平方数，此时，$x=50$.

即 $x=50$，　$y=7$ 是已知方程的一组正整数解.

12·29　求满足以下条件的正整数对 $(x,y)$：

(1) $x\leqslant y$；

(2) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{1992}$.

（澳大利亚数学通讯竞赛，1991 年）

[**解**]　因为　　$\sqrt{1992}=2\sqrt{498}$，

所以　$(x,y)=(498,498)$ 显然是方程的一组正整数解.

若 $(x,y)$ 是方程的一组正整数解，则由条件

$$x\leqslant y$$

有

$$x\leqslant 498.$$

但由

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{1992}$$

有

$$y=1992+x-2\sqrt{1992x},$$

可知 $2\sqrt{1992x}=4\sqrt{498x}$ 是整数，因为

$$498=2\cdot 3\cdot 83$$

无平方因子，所以

$$x\geqslant 498.$$

于是只能有

$$x=498.$$

即方程只有惟一一组正整数解 $(498,498)$.

12·30　证明对于任何正整数 $a$,方程 $x^2-y^2=a^3$ 总有整数解.

（第 14 届美国普特南数学竞赛,1954 年）

[证]　由 $(x+y)(x-y)=a^2\cdot a$,可令

$$\begin{cases}x+y=a^2,\\x-y=a.\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}x=\dfrac{a^2+a}{2},\\y=\dfrac{a^2-a}{2}.\end{cases}$$

由于 $a^2$ 与 $a$ 具有相同的奇偶性,所以 $x$ 和 $y$ 都是整数.

于是,对任一正整数 $a$,方程总有一整数解.

12·31　如图,一个圆的直径 $AB$ 的长度是一个十进制的两位整数,把两个数字颠倒一下,就是与直径 $AB$ 垂直的弦 $CD$ 的长度,从交点 $H$ 到圆心 $O$ 的距离是一个正的有理数,求 $AB$ 的长度.

（第 1 届美国数学邀请赛,1983 年）

[解]　设 $AB=10x+y$,其中 $x,y$ 为 $0,1,2,3,\cdots,9$ 中的数,且 $x\neq 0$.则

$$CD=10y+x.$$

由勾股定理,

$$\begin{aligned}OH^2&=OC^2-CH^2\\&=\left(\frac{10x+y}{2}\right)^2-\left(\frac{10y+x}{2}\right)^2\\&=\frac{9}{4}\cdot 11(x^2-y^2).\end{aligned}$$

由于 $OH$ 是有理数,而 $\frac{9}{4}=\left(\frac{3}{2}\right)^2$,则 $11(x^2-y^2)$ 必须为完全平方数.

设

$$11(x^2-y^2)=m^2.$$

因为 11 是素数,则 $m$ 是 11 的倍数,

再设 $m=11k$,则

$$x^2-y^2=(x+y)(x-y)=11k.$$

显然有

$$x+y\geqslant x-y,$$

$$0<x+y\leqslant 18,$$

$$0 < x - y \leqslant 8.$$

所以只能有

$$\begin{cases} x + y = 11, \\ x - y = 1. \end{cases}$$

解得 $x = 6$, $y = 5$,即 $AB = 65$.

12·32　求方程 $y^3 - x^3 = 91$ 的整数解.

（波兰数学竞赛,1949 年）

[解]　原方程可化为

$$(y - x)(y^2 + xy + x^2) = 13 \cdot 7.$$

因为对一切非零实数 $x$ 和 $y$,

$$y^2 + xy + x^2 > 0.$$

所以 $$y > x.$$

又因为 13 和 7 是素数,所以已知方程有如下几种情形:

Ⅰ. $\begin{cases} y - x = 91, \\ y^2 + xy + x^2 = 1. \end{cases}$　Ⅱ. $\begin{cases} y - x = 1, \\ y^2 + xy + x^2 = 91. \end{cases}$

Ⅲ. $\begin{cases} y - x = 13, \\ y^2 + xy + x^2 = 7. \end{cases}$　Ⅳ. $\begin{cases} y - x = 7, \\ y^2 + xy + x^2 = 13. \end{cases}$

方程组 Ⅰ 和 Ⅲ 无实数解,进而无整数解.

解方程组 Ⅱ 和 Ⅳ 共得四组解为

$\begin{cases} x = 5, \\ y = 6, \end{cases}$　$\begin{cases} x = -6, \\ y = -5, \end{cases}$　$\begin{cases} x = -3, \\ y = 4, \end{cases}$　$\begin{cases} x = -4, \\ y = 3. \end{cases}$

12·33　证明方程 $x^3 + 11^3 = y^3$ 没有正整数解.

（第 4 届加拿大数学竞赛,1972 年）

[证]　已知方程可化为

$$\begin{aligned} 11^3 &= y^3 - x^3 \\ &= (y - x)(y^2 + xy + x^2). \end{aligned}$$

因为 11 是素数,所以有

Ⅰ. $\begin{cases} y - x = 1, \\ y^2 + xy + x^2 = 11^3. \end{cases}$　Ⅱ. $\begin{cases} y - x = 11, \\ y^2 + xy + x^2 = 11^2. \end{cases}$

Ⅲ. $\begin{cases} y - x = 11^2, \\ y^2 + xy + x^2 = 11. \end{cases}$　Ⅳ. $\begin{cases} y - x = 11^3, \\ y^2 + xy + x^2 = 1. \end{cases}$

对于方程组 Ⅰ.

把 $y=x+1$ 代入第二个方程

$$(x+1)^2+x(x+1)+x^2=11^3.$$

$$3x^2+3x=1330.$$

由于1330不能被3整除,所以方程组 Ⅰ 没有整数解.

对于方程组 Ⅱ,Ⅲ,Ⅳ.

由于 $y>11$,所以有

$$y^2+xy+x^2>11^2.$$

因而方程组 Ⅱ,Ⅲ,Ⅳ 没有正整数解.

于是已知方程没有正整数解.

12·34　求出所有满足 $s_1-s_2=1989$ 的平方数 $s_1,s_2$.

（第30届国际数学奥林匹克候选题,1989年）

[解]　设 $s_1=a^2,\quad s_2=b^2,\quad a>b>0$,则

$$(a+b)(a-b)=1989=3^2\cdot 13\cdot 17.$$

于是
$$\begin{cases}a+b=m,\\ a-b=n.\end{cases}$$

其中 $mn=1989$,并且 $m>n$.

由上述方程组得

$$\begin{cases}a=\dfrac{m+n}{2},\\ b=\dfrac{m-n}{2}.\end{cases}$$

令　$(m,n)=(1989,1),\quad(663,3),\quad(221,9),$

$(153,13),\quad(117,17),\quad(51,39).$

$(a,b)=(995,994),\quad(333,330),\quad(115,106),$

$(83,70),\quad(67,50),\quad(45,6).$

$(s_1,s_2)=(995^2,994^2),\quad(333^2,330^2),\quad(115^2,106^2),$

$(83^2,70^2),\quad(67^2,50^2),\quad(45^2,6^2).$

12·35　满足 $n^2+(n+1)^2=m^4+(m+1)^4$ 的整数对 $(m,n)$ 共有多少组?

（中国北京市高中一年级数学竞赛,1988年）

[解]　原式可化为

$$n^2+(n+1)^2-2n(n+1)+2n(n+1)$$

$$= m^4 + (m+1)^4 - 2m^2(m+1)^2 + 2m^2(m+1)^2,$$
$$1 + 2n(n+1) = [m^2 - (m+1)^2]^2 + 2m^2(m+1)^2,$$
$$1 + 2n(n+1) = (2m+1)^2 + 2m^2(m+1)^2,$$
$$1 + 2n(n+1) = 4m^2 + 4m + 1 + 2m^2(m+1)^2,$$
$$n(n+1) = m(m+1)[m(m+1)+2].$$

令 $m(m+1) = k$,则原式化为

$$n(n+1) = k(k+2),$$

上式只有在左、右两边同时为0时才成立,即 $n = 0$ 或 $n = -1$, $k = 0$ 或 $k = -2$,进而求得 $m = 0$ 或 $m = -1$.

所以符合方程的整数对只有四组:

$$(m,n) = (0,0),(0,-1),(-1,0),(-1,-1).$$

12·36　求满足方程

$$2a^2 = 3b^3 \qquad ①$$

的一切正整数对 $(a,b)$.

(第 10 届加拿大数学竞赛,1978 年)

[解]　设 $(x,y)$ 是满足方程 ① 的正整数对,则

$$2x^2 = 3y^3.$$

因为 2 和 3 互素,所以 $x$ 是 3 的倍数.

设　$x = 3x_1$,则有

$$2 \cdot 3^2 x_1^2 = 3y^3,$$
$$2 \cdot 3x_1^2 = y^3.$$

从而 $y$ 是 $2 \cdot 3 = 6$ 的倍数.

设　$y = 6y_1$,则有

$$6x_1^2 = 6^3 y_1^3,$$
$$x_1^2 = 6^2 y_1^3.$$

于是 $x_1$ 又是 6 的倍数.

设 $x_1 = 6x_2$,则有

$$6^2 x_2^2 = 6^2 y_1^3,$$

从而

$$x_2^2 = y_1^3 = c.$$

于是 $c$ 既是完全平方数,又是完全立方数,因而 $c$ 是 6 次方数.

设 $c = d^6$,于是

$$x_2 = d^3, \quad y_1 = d^2.$$
$$x_1 = 6x_2 = 6d^3, \quad y = 6y_1 = 6d^2,$$
$$x = 3x_1 = 18d^3.$$

因此,所求的数对为

$$(a,b) = (18d^3, 6d^2)$$

其中 $d$ 是任何正整数.

12·37　在平面直角坐标系 $x-o-y$ 中,我们把横坐标为自然数,纵坐标为完全平方数(自然数的平方)的点都染成红点, 试将函数 $y=(x-36)(x-144)-1991$ 的图形所通过的"红点"都确定出来.

(中国北京市高中一年级数学竞赛,1991 年)

[解]　设 $y = m^2, \quad m \in N$,则

$$(x-36)(x-144)-1991 = m^2,$$
$$x^2 - 180x + 3193 = m^2,$$
$$(x-90)^2 - 4907 = m^2.$$

令 $x - 90 = k$,则

$$k^2 - m^2 = 4907 = 7 \cdot 701,$$

故
$$(k+m)(k-m) = 7 \cdot 701.$$

由于 7 和 701 都是素数,且

$$k - m < k + m.$$

则只可能得到下面四个方程组.

Ⅰ. $\begin{cases} k - m = 1, \\ k + m = 4907. \end{cases}$　　Ⅱ. $\begin{cases} k - m = 7, \\ k + m = 701. \end{cases}$

Ⅲ. $\begin{cases} k - m = -4907, \\ k + m = -1. \end{cases}$　　Ⅳ. $\begin{cases} k - m = -701, \\ k + m = -7. \end{cases}$

解方程组 Ⅲ 和 Ⅳ 可得 $x$ 是负整数,不合题目要求.

解方程组 Ⅰ,Ⅱ 得

$$\begin{cases} k = 2454, \\ m = 2453. \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} k = 354, \\ m = 347. \end{cases}$$

由此得 $x = 2544$ 或 $x = 444$,相应的 $y = 6017209$,或 $y = 120409$.

所以 $y = (x-36)(x-144)-1991$ 的图像只通过红点(2544, 6017209),(444,120409).

12·38　$x,y$ 是满足方程 $y^2+3x^2y^2=30x^2+517$ 的整数. 求 $3x^2y^2$ 的值.

（第 5 届美国数学邀请赛，1987 年）

［解］　由　$$y^2+3x^2y^2=30x^2+517$$

得　$$y^2+3x^2y^2-30x^2-10=507,$$

$$(y^2-10)(3x^2+1)=3\cdot169=3\cdot13^2.$$

由于 $x,y$ 是整数，所以

$$y^2-10=1,3,13,39,169,507,$$

$$y^2=11,13,23,49,179,517.$$

其中只有 49 为完全平方数，所以

$$y^2=49,\quad y^2-10=39.$$

从而　$$3x^2+1=13,$$

$$x^2=4.$$

于是　$$3x^2y^2=3\cdot4\cdot49=588.$$

12·39　设 $N$ 为自然数集，对 $a\in N$，$b\in N$，求出方程 $x^{a+b}+y=x^ay^b$ 的所有自然数解 $(x,y)$.

（澳大利亚数学竞赛，1983 年）

［解］　由已知方程可得

$$\begin{aligned}y&=x^ay^b-x^{a+b}\\&=x^a(y^b-x^b).\end{aligned}\qquad①$$

因此，$x^a$ 是 $y$ 的约数，令 $y=x^az$，其中 $z\in N$.

将　$y=x^az$　代入 ① 得

$$\begin{aligned}z&=x^{ab}z^b-x^b\\&=x^b(x^{ab-b}z^b-1).\end{aligned}\qquad②$$

因此，$x^b$ 是 $z$ 的约数，令 $z=x^bu$，其中 $u\in N$.

将 $z=x^bu$ 代入 ② 得

$$u=x^{ab-b}x^{b^2}u^b-1,$$

$$1=x^{ab+b^2-b}u^b-u.$$

因此，$u$ 是 1 的约数，

所以　$$u=1.$$

并且　$$x^{ab+b^2-b}=2,$$

从而 $$x=2,$$
$$ab+b^2-b=1,$$
于是 $$a=1,\quad b=1.$$
由此得出 $$y=x^a x^b u=4.$$
因而原方程仅对 $a=b=1$ 时有自然数解
$$x=2,\quad y=4.$$

12·40 求出方程 $a^2+b^2=n!$ 的所有解，这里 $a,b,n$ 为正整数，并且满足 $a\leqslant b,\quad n<14$.

（第19届加拿大数学竞赛，1987年）

**[解]** 当 $n=1$ 时，方程显然无解.

当 $n=2$ 时，$a^2+b^2=2$，可得解
$$a=1,\quad b=1,\quad n=2.$$
当 $n\geqslant 3$ 时，由于 $3\mid n!$，可得
$$3\mid a^2+b^2.$$
由于 $a$ 和 $b$ 都不能被 3 整除时，$a^2$ 和 $b^2$ 均为 $3k+1$ 型的数，从而 $a^2+b^2$ 为 $3k+2$ 型的数，因而 $a^2+b^2$ 不能被 3 整除.

又由于 $a$ 和 $b$ 只有一个能被 3 整除时，$a^2+b^2$ 为 $3k+1$ 型的数，同样不能被 3 整除.

因此，$a$ 和 $b$ 同时能被 3 整除，从而有
$$9\mid a^2+b^2.$$
于是 $n!$ 能被 9 整除，此时有 $n\geqslant 6$.

当 $n>6$ 时，则由于 $7\mid n!$，有
$$7\mid a^2+b^2.$$
注意到，$7\nmid a$ 时，则 $a^2$ 为 $7k+1,\quad 7k+2$ 或 $7k+4$ 型的一种，于是当 $7\nmid a$ 且 $7\nmid b$ 时，$a^2+b^2$ 必为 $7k+1,\quad 7k+2,\quad 7k+3,\quad 7k+4,\quad 7k+5,\quad 7k+6$ 型的一种，而不能被 7 整除.

于是，若 $7\mid a^2+b^2$ 成立，必须
$$7\mid a\quad 且\quad 7\mid b.$$
因而有 $$49\mid a^2+b^2.$$
此时有 $49\mid n!$，这样就必须有 $n\geqslant 14$，与题设矛盾.

因此，当 $7\leqslant n<14$ 时，方程无正整数解.

当 $n=6$ 时，$\quad a^2+b^2=6!=2^4\cdot 3^2\cdot 5.$

设 $a=3u,\quad b=3v$,则有

$$u^2+v^2=2^4\cdot 5.$$

由此可见,$u$ 和 $v$ 同为偶数.

设 $u=2p,\quad v=2q$,则有

$$p^2+q^2=2^2\cdot 5.$$

同样,$p$ 和 $q$ 同为偶数.

设 $p=2x,\quad q=2y$,则

$$x^2+y^2=5.$$

由 $a\leqslant b$ 得 $x\leqslant y$,于是

$$x=1,\quad y=2.$$

进而可得 $\qquad a=12,\quad b=24.$

于是方程只有两组正整数解

$$(a,b,n)=(1,1,2)\text{ 和 }(12,24,6).$$

12·41　求方程 $n!+1=(m!-1)^2$ 的正整数解.

（前苏联教委推荐试题,1991 年）

**[解]**　显然,$m=1,\quad m=2$ 时,已知方程没有正整数解.

即有 $\qquad m\geqslant 3.$

已知方程可改写为

$$n!=m!(m!-2).\qquad ①$$

于是 $n>m$.由 ① 可得

$$n(n-1)\cdots(m+1)=m!-2.\qquad ②$$

由于 $3\mid m$.则

$$3\nmid m!-2.$$

从而 ② 式的左端不会多于两个因子,否则,若有 3 个因子,连续 3 个自然数的乘积可被 3 整除.

所以 $\qquad n-m=1$ 或 $n-m=2$.

当 $n-m=1$ 时,$n=m+1$,有

$$m+1=m!-2,$$

$$m!=m+3,$$

即 $\qquad m=3,\quad n=4.$

当 $n-m=2$ 时,$n=m+2$,有

$$(m+2)(m+1)=m!-2,$$

$$m! = (m+1)(m+2)+2 \leqslant 4m(m-1).$$

于是 $m \leqslant 4$.

但 $m=4$, $n=6$ 时,

$$6!+1=721 \neq (4!-1)^2 = 23^2.$$

而 $m=3$, $n=4$ 时

$$4!+1=25=(3!-1)^2.$$

所以已知方程只有一组正整数解 $m=3$, $n=4$.

12·42 求满足方程 $w! = x! + y! + z!$的所有正整数 $w, x, y, z$.

(第15届加拿大数学竞赛,1983年)

**[解1]** 不妨设 $w > x \geqslant y \geqslant z$.

显然有 $w \geqslant x+1$,从而有

$$(x+1)! \leqslant w! = x! + y! + z! \leqslant 3x!,$$

即

$$(x+1)! \leqslant 3x!,$$

$$x+1 \leqslant 3,$$

$$x \leqslant 2.$$

(1) 若 $x=2$, $y=2$, $z=2$. 则

$$w! = 2!+2!+2! = 6 = 3!,$$

所以

$$w=3.$$

(2) 若 $x=2$, $y=2$, $z=1$,则

$$w! = 2!+2!+1! = 5.$$

由于5不等于任何一个正整数的阶乘,所以此时无解.

同理可证 $x=2$, $y=1$, $z=1$时, $x=1$, $y=1$, $z=1$时,方程均无解.

所以只有惟一一组解

$$x=2, \quad y=2, \quad z=2, \quad w=3.$$

**[解2]** 不妨设 $w > x \geqslant y \geqslant z$.

若 $y > z$,则用 $z!$除方程两边,得

$$\begin{aligned} & w(w-1)\cdots(z+1) \\ = {} & x(x-1)\cdots(z+1) + y(y-1)\cdots(z+1) + 1. \end{aligned}$$

由于 $z+1>1$ 能整除上式等式的左边,而不能整除等式的右边,所以等式显然不成立.

因此,必须 $\qquad y = z.$

若 $x > y = z$,则用 $y! = z!$除方程两边,得

$$w(w-1)\cdots(z+1) = x(x-1)\cdots(z+1)+2.$$

则 $z+1$ 应是 2 的约数,从而应有 $z+1=2$.

进一步再约去 $z+1=2$ 得

$$w(w-1)\cdots 3 = x(x-1)\cdots 3+1.$$

此时显然不能成立,所以必有

$$x = y = z.$$

即 $$w! = 3x!$$

所以 $$w = 3,\quad x = y = z = 2.$$

12·43　试求出满足下述等式 $x^2 = y^2+2y+13$ 的所有整数对 $(x,y)$.

(第 46 届莫斯科数学奥林匹克,1983 年)

[解]　已知方程可化为

$$x^2-(y+1)^2 = 12,$$

$$(x+y+1)(x-y-1) = 12.$$

因为 $x+y+1$ 与 $x-y-1$ 有相同的奇偶性,而 12 是偶数,则有

$$\begin{cases}x+y+1=2,\\x-y-1=6,\end{cases}\quad\begin{cases}x+y+1=6,\\x-y-1=2,\end{cases}$$

$$\begin{cases}x+y+1=-2,\\x-y-1=-6,\end{cases}\quad\begin{cases}x+y+1=-6,\\x-y-1=-2.\end{cases}$$

由以上可得四组整数解:

$$(x,y) = (4,-3),(4,1),(-4,1),(-4,-3).$$

12·44　求方程 $x^3-y^3 = xy+61$ 的自然数解 $x,y$.

(第 15 届全苏数学奥林匹克,1981 年)

[解]　由已知方程可知,若 $x,y$ 是方程的自然数解,则必有 $x > y$.

设 $x = y+d,\quad d\geqslant 1,\quad d\in N.$

则已知方程化为

$$3dy^2+3d^2y+d^3 = y^2+dy+61,$$

$$(3d-1)y^2+d(3d-1)y+d^3 = 61.$$

于是 $d^3<61$,即 $d = 1,2,3$.

(1) 若 $d=1$,则方程化为

$$2y^2+2y-60=0.$$

$$y_1=5,\quad y_2=-6\text{(舍去)}.$$

于是方程有自然数解 $x=6,\quad y=5.$

(2) 若 $d=2$,则方程化为

$$5y^2+10y-53=0.$$

此方程没有整数解 $y$,因而原方程也无自然数解.

(3) 若 $d=3$,则方程化为

$$8y^2+24y-34=0.$$

此方程也没有整数解 $y$,因而原方程也无自然数解.

于是,已知方程只有惟一一组自然数解:

$$\begin{cases}x=6,\\ y=5.\end{cases}$$

12·45　将两个整数的和、差、积及商相加得 450,求这两个数.

(基辅数学奥林匹克,1946 年)

[解]　设这两个整数分别为 $x$ 和 $y$.则

$$x+y+(x-y)+xy+\frac{x}{y}=450. \qquad ①$$

由于 $x$ 和 $y$ 是整数,则 $x+y,x-y,xy$ 都是整数,从而由 ①,$\frac{x}{y}$ 是整数.

① 式可化为

$$\frac{x}{y}+2x+xy=450,$$

$$\frac{x}{y}(1+2y+y^2)=450,$$

$$\frac{x}{y}(1+y)^2=450. \qquad ②$$

由于　$450=1\cdot 2\cdot 3^2\cdot 5^2.$

则 $\frac{x}{y}$ 只能为 2,18,50,450.

于是可由 ② 求得 $x$ 和 $y$ 的值为

$(x,y)=(28,14),(-32,-16),(72,4),(-108,-6),$

$(100,2),(-200,-4),(-900,-2).$

因此本题共有七组解.

12·46　$a_1,a_2,\cdots,a_{2n}$ 是 $2n$ 个互不相等的整数,如果方程 $(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{2n})+(-1)^{n-1}(n!)^2=0$ 有一个整数解 $r$,求证

$$r=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2n}}{2n}.$$

（第 2 届中国东北三省数学邀请赛,1987 年）

［证］　由题设可知

$$(r-a_1)(r-a_2)\cdots(r-a_{2n})=(-1)^n(n!)^2.$$

$r-a_1,\quad r-a_2,\quad \cdots,\quad r-a_{2n}$ 是 $2n$ 个互不相等的整数,对上式双方取绝对值,得

$$|r-a_1||r-a_2|\cdots|r-a_{2n}|=(n!)^2.$$

我们可以看出:$|r-a_1|,|r-a_2|,\cdots,|r-a_{2n}|$ 是 $2n$ 个正整数,而且其中至多有两个数相等.

若不然,设

$$|r-a_i|=|r-a_j|=|r-a_k|,\quad i\neq j\neq k.$$

那么,$r$ 必小于 $a_i,\quad a_j$ 和 $a_k$ 中的两个,或者 $r$ 必大于 $a_i,\quad a_j,\quad a_k$ 中的两个.不妨设 $r>a_i,\quad r>a_j$.这时有

$$r-a_i=|r-a_i|=|r-a_j|=r-a_j,$$

于是 $a_i=a_j$ 与已知矛盾.

由此可知,为使

$$|r-a_1||r-a_2|\cdots|r-a_{2n}|=1\cdot1\cdot2\cdot2\cdots n\cdot n,$$

必须且只须在 $|r-a_1|,|r-a_2|,\cdots,|r-a_{2n}|$ 中,正好有二个 1,二个 2,　$\cdots$,　二个 $n$.

如果有 $|r-a_i|=|r-a_j|$,也只能是

$$r-a_i=-(r-a_j),$$

否则,将有　$a_i=a_j$.

因此有

$$(r-a_1)+(r-a_2)+\cdots+(r-a_{2n})=0,$$

$$r=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2n}}{2n}.$$

12·47　证明在三个连续的自然数中,最大的数的立方不可能等于其他两个数的立方和.

（匈牙利数学奥林匹克，1909 年）

**[证]**　设 $n-1$，$n$，$n+1$ 是三个连续的自然数，如果最大数的立方等于其他两个数的立方和，那么

$$(n+1)^3=n^3+(n-1)^3,$$

即

$$n^3+3n^2+3n+1=n^3+n^3-3n^2+3n-1,$$

$$2=n^2(n-6).$$

上式左边的数仅当 $n>6$ 时，$n^2(n-6)>0$，而当 $n>6$ 时，

$$n^2(n-6)\neq 2.$$

于是，最大的数的立方不可能等于其他两个数的立方和.

12·48　求方程

$$4x^3+4x^2y-15xy^2-18y^3-12x^2+6xy+36y^2+5x-10y=0$$

的所有正整数解.

（第 30 届国际数学奥林匹克候选题，1989 年）

**[解]**　已知方程可化为

$$\begin{aligned}&4x^3+4x^2y-15xy^2-18y^3-12x^2+6xy+36y^2+5x-10y\\&=(x-2y)(4x^2+12xy+9y^2-12x-18y+5)\\&=(x-2y)(2x+3y-5)(2x+3y-1)\\&=0.\end{aligned}$$

则　$x-2y=0$ 或 $2x+3y-5=0$ 或 $2x+3y-1=0$.

方程

$$x-2y=0$$

的正整数解为 $(x,\ y)=(2y,\ y)$，$y\in N$.

方程

$$2x+3y-5=0$$

仅有一组正整数解　$(x,\ y)=(1,\ 1)$.

方程

$$2x+3y-1=0$$

没有正整数解.

于是，已知方程的全部正整数解为

$$\{(x,y)\}=\{(1,1)\}\cup\{(2y,y),y\in N\}$$

12·49　求方程 $2^x+3^y=z^2$ 的所有整数解 $(x,y,z)$.

（前联邦德国数学竞赛，1987 年）

**[解]**　设 $(x,y,z)$ 是方程

$$2^x+3^y=z^2 \qquad ①$$

的一组整数解.

数论卷

假定 $x$ 或 $y$ 是负数，则

$$0 < 2^x \leqslant \frac{1}{2} \text{ 或者 } 0 < 3^y \leqslant \frac{1}{3}.$$

此时，$2^x + 3^y$ 必定不是整数，而 $z^2$ 是整数，出现矛盾，于是

$$x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0.$$

此时 $$z \neq 0.$$

此外，若 $(x, y, z)$ 是方程 ① 的一组解，则 $(x, y, -z)$ 也是 ① 的一组解，反之亦然.

所以，求方程 ① 的所有整数解，只要求出使得 $z > 0$ 的整数解即可.

(1) 当 $x = 0$ 时，由 ① 有

$$1 + 3^y = z^2.$$

$$3^y = (z-1)(z+1).$$

因为 3 是素数，则

$$\begin{cases} z - 1 = 3^t, \\ z + 1 = 3^s. \end{cases}$$

其中 $t < s, \quad t + s = y.$

由于 $$3^s - 3^t = 2,$$

$$3^t(3^{s-t} - 1) = 2.$$

因为 2 是素数，所以 $3^t \neq 2$，从而 $3^t = 1$，即 $t = 0$，再由 $3^s - 1 = 2$ 得 $s = 1$.

于是 $$y = 1, \quad z = 2.$$

(2) 当 $y = 0$ 时，由 ① 有

$$2^x = (z-1)(z+1).$$

所以有 $$\begin{cases} z - 1 = 2^t, \\ z + 1 = 2^s. \end{cases} \quad t < s, \quad t + s = x.$$

消去 $z$ 得 $$2^s - 2^t = 2,$$

$$2^t(2^{s-t} - 1) = 2.$$

同样有 $$t = 1, \quad s = 2.$$

此时 $$x = 3, \quad z = 3.$$

(3) 当 $x$ 和 $y$ 都是正整数时，

我们首先证明：$x$ 和 $y$ 同为偶数.

假定 $x$ 是奇数，设 $x=2p+1$，$p$ 为非负整数，由 ① 有

$$2^{2p+1}+3^y=z^2,$$

$$2(3+1)^p+3^y=z^2.$$

由于
$$(3+1)^p\equiv 1 \pmod 3),$$

则
$$2(3+1)^p+3^y\equiv 2 \pmod 3).$$

然而，形如 $3k+2$ 的数不是完全平方数，所以 $2(3+1)^p+3^y$ 不是平方数，而 $z^2$ 是平方数，这是不可能的.

所以 $x$ 是偶数，并且设 $x=2p$.

假定 $y$ 是奇数，设 $y=2q+1$，其中 $q$ 是非负整数，由 ① 有

$$4^p+3(8+1)^q=z^2.$$

由于
$$(8+1)^q\equiv 1 \pmod 4),$$

则
$$4^p+3(8+1)^q\equiv 3 \pmod 4).$$

然而，形如 $4k+3$ 的数不是完全平方数，所以 $4^p+3(8+1)^q$ 不是平方数，而 $z^2$ 是平方数，这是不可能的.

所以 $y$ 是偶数，并且设 $y=2q$.

此时方程 ① 化为

$$2^{2p}+3^{2q}=z^2, \qquad ②$$

$$3^{2q}=(z-2^p)(z+2^p),$$

从而有
$$\begin{cases} z-2^p=3^t, \\ z+2^p=3^s, \quad t<s, \quad t+s=2q. \end{cases}$$

即
$$2^{p+1}=3^s-3^t=3^t(3^{s-t}-1).$$

于是 $t=0$，从而 $z=2^p+1$.

另一方面

$$2^{2p}=(z-3^q)(z+3^q),$$

$$2^{2p}=(1+2^p-3^q)(1+2^p+3^q).$$

于是可设

$$1+2^p-3^q=2^u,$$

$$1+2^p+3^q=2^v.$$

其中 $0\leqslant u<v$，且 $u+v=2p$.

两式相减得

$$2^v-2^u=2^u(2^{v-u}-1)=2\cdot 3^q.$$

所以
$$2^u=1 \text{ 或 } 2.$$

当 $2^u=1$ 时,有

$$1+2^p-3^q=1,$$
$$2^p=3^q.$$

这是不可能的.

所以 $2^u=2,\quad u=1$,且

$$2^p=3^q+1.$$

如果 $p$ 是奇数,则 $p=2k+1$,上式的两边

$$\text{左边}=2^p=2\cdot 4^k=2\cdot(3+1)^k\equiv 2\pmod 3,$$
$$\text{右边}=3^q+1\equiv 1\pmod 3,$$

这不可能,所以 $p$ 是偶数.

设 $p=2b$,则有

$$(2^b)^2=3^q+1,$$
$$3^q=(2^b-1)(2^b+1).$$

从而 $\quad 2^b-1=1,\quad b=1,\quad p=2,\quad q=1.$

所以 $\quad x=4,\quad y=2,\quad z=5.$

综合以上,方程的所有整数解共六组:

$$(0,1,2),(3,0,3),(4,2,5),$$
$$(0,1,-2),(3,0,-3),(4,2,-5).$$

12·50 设 $p$ 是素数,证明数列 $\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}$ 中没有两项之比为 $p^{2l}(l\geqslant 1,\quad l,n\in N)$.

(中国国家集训队训练题,1990年)

[证] 假设数列中有两项之比为 $p^{2l}$,即

$$\frac{\frac{x(x+1)}{2}}{\frac{y(y+1)}{2}}=p^{2l},\quad x,y\in N.$$

则本题等价于不定方程

$$x(x+1)=p^{2l}y(y+1)$$

无正整数解.

设 $p^l=k$,则不定方程化为

$$x^2+x=k^2y^2+k^2y,\qquad ①$$

即

$$(ky-x)(ky+x)=x-k^2y.$$

如果 $ky-x\geqslant 0$，则必有

$$x-k^2y\geqslant 0,$$

从而

$$(ky-x)+(x-k^2y)\geqslant 0,$$

$$ky(1-k)\geqslant 0.$$

然而 $k>1,\quad y\geqslant 1$，出现矛盾.因此必有

$$ky-x<0.$$

于是可令 $x=ky+a(a\geqslant 1)$，代入 ① 得

$$(ky+a)^2+(ky+a)=k^2y^2+k^2y,$$

$$a(a+1)=ky(k-2a-1). \quad ②$$

由于$(a,\quad a+1)=1,\quad k=p^l$ 及 $p$ 是素数，则由 ② 必有

$$k\mid a \quad 或 \quad k\mid a+1.$$

因此

$$a\geqslant k.$$

然而此时 ② 式右边 $k-2a-1<0$，出现矛盾.

所以不定方程 ① 无正整数解.即数列 $\left\{\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}$ 中没有两项之比为 $p^{2l}$，$p$ 是素数.

12·51 $n$ 为正整数，素数 $p>3$，求出$3(n+1)$组满足方程 $xyz=p^n(x+y+z)$ 的正整数 $x,y,z$(这些组不仅仅是排列次序不同).

(第 27 届国际数学奥林匹克候选题，1986 年)

[解] 设 $x,y,z$ 中素因数 $p$ 的幂指数分别为 $\alpha,\beta,\gamma$，且 $\alpha\geqslant\beta\geqslant\gamma$，则由

$$xyz=p^n(x+y+z) \quad ①$$

两边约去 $p^\gamma$ 得

$$xyzp^{-\gamma}=p^n(xp^{-\gamma}+yp^{-\gamma}+zp^{-\gamma}).$$

于是有

$$zp^{-\gamma}\mid p^n(xp^{-\gamma}+yp^{-\gamma}+zp^{-\gamma}).$$

由于 $zp^{-\gamma}$ 没有约数 $p$，所以

$$zp^{-\gamma}\mid xp^{-\gamma}+yp^{-\gamma}+zp^{-\gamma}.$$

于是

$$z\mid x+y.$$

设 $x+y=mz$，则由 ① 式得

$$xy=p^n(m+1).$$

(1) 取 $m=1$，即 $xy=2p^n$.

这时可得出 $n+1$ 组解：

$$\begin{cases}x=2p^i,\\y=p^{n-i},\\z=2p^i+p^{n-i}, \quad i=0,1,2,\cdots,n.\end{cases}$$

(2) 取 $m=2$，即

$$xy=3p^n.$$

这时又得出 $n+1$ 组解：

$$\begin{cases}x=3p^j,\\y=p^{n-j},\\z=\dfrac{1}{2}(3p^j+p^{n-j}), \quad j=0,1,2,\cdots,n.\end{cases}$$

当 $n$ 为奇数时，(1) 和(2) 的解互不相同，

当 $n$ 为偶数时，$i=\frac{n}{2}$，$j=\frac{n}{2}$ 时，第(1) 组解为 $x=2p^{\frac{n}{2}}$，$y=p^{\frac{n}{2}}$，$z=3p^{\frac{n}{2}}$，第(2) 组解为 $x=3p^{\frac{n}{2}}$，$y=p^{\frac{n}{2}}$，$z=2p^{\frac{n}{2}}$，因此第(1)，(2) 两组有一组公共的解$(2p^{\frac{n}{2}},p^{\frac{n}{2}},3p^{\frac{n}{2}})$，只是 $x,y,z$ 的顺序不同.

所以，(1)，(2) 两组共有 $2n+1$ 组不同的解.

(3) 取 $m=p^k+p^{n-k}$ 可得 $n+1$ 组解：

$$\begin{cases}x=p^k,\\y=p^n+p^{n-k}+p^{2n-2k},\\z=p^{n-k}+1, \qquad k=0,1,2,\cdots,n.\end{cases}$$

其中 $k=n$ 时，与(1) 中 $i=0$ 时的解相同，其余均不相同.

这样，实际得到了 $n$ 组解.

由(1)，(2)，(3) 共得到了 $3n+1$ 组不同的解.

(4) 取 $m=\dfrac{p^n+1}{2}$，令

$$\begin{cases}x=1,\\y=\dfrac{1}{2}p^n(p^n+3),\\z=p^n+2.\end{cases}$$

(5) 取 $m=p$，令

$$\begin{cases} x = p, \\ y = p^n + p^{n-1}, \\ z = p^{n-1} + p^{n-2} + 1. \end{cases}$$

这两组解是与上述 $3n+1$ 组解不同的解.

于是得到了 $3(n+1)$ 组解.

12·52　假设 $p$ 是大于 2 的素数,证明 $\frac{2}{p}$ 可以而且仅有一种办法表示成 $\frac{2}{p} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 的形式,这里 $x, y$ 是不同的正整数.

(匈牙利数学奥林匹克,1931 年)

**[证 1]**　关系式

$$\frac{2}{p} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y},$$

去掉分母可化为

$$2xy = p(x+y). \qquad ①$$

因为 ① 式的右边是大于 2 的素数 $p$ 的倍数,则 $2xy$ 也是 $p$ 的倍数.

又 $(p,2)=1$,则 $x$ 和 $y$ 中至少有一个是 $p$ 的倍数,不妨设 $x$ 是 $p$ 的倍数,记 $x = px'$. 这时 ① 式就可化为

$$(2x'-1)y = px'. \qquad ②$$

由于 $(2x'-1, x') = 1$,则由

$$x' \mid (2x'-1)y,$$

可得

$$x' \mid y.$$

设 $y = x'z$,则由 ② 式得

$$(2x'-1)z = p.$$

又由 $p$ 是素数,则有

$$\begin{cases} 2x'-1 = 1, \\ z = p, \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} 2x'-1 = p, \\ z = 1. \end{cases}$$

从而有

$$\begin{cases} x' = 1, \\ x = p, \\ y = p. \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} x' = \frac{p+1}{2}, \\ x = \frac{p(p+1)}{2}, \\ y = \frac{p+1}{2}. \end{cases}$$

因为 $x \neq y$,所以仅有 $x = \dfrac{p(p+1)}{2}$, $y = \dfrac{p+1}{2}$ 是符合题意的惟一的解.



[证 2] 将已知关系式去分母得

$$2xy = px + py.$$

则有

$$4xy - 2px - 2py + p^2 = p^2,$$
$$(2x - p)(2y - p) = p^2.$$

因为 $x$ 和 $y$ 不相等,则

$$2x - p \neq 2y - p,$$

又由 $p$ 是素数,则只能有

$$\begin{cases} 2x - p = p^2, \\ 2y - p = 1. \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x = \dfrac{p(p+1)}{2}, \\ y = \dfrac{p+1}{2}. \end{cases}$$

从而仅有惟一的一种表示方法,使

$$\frac{2}{p} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

12·53 考察方程 $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{p}$ 的解 $(x, y)$,其中 $x, y$ 和 $p$ 为自然数,$p > 1$. 证明当 $p$ 为素数时,该方程有 3 组解;当 $p$ 为合数时,该方程的解的组数大于 3.

(注:当 $a \neq b$ 时,将 $(a, b)$ 与 $(b, a)$ 算作不同的解.)

(第 36 届莫斯科数学奥林匹克,1973 年)

[证] 已知方程可化为

$$xy - px - py = 0,$$

即

$$(x - p)(y - p) = p^2.$$

当 $p$ 为素数时,可得到三个方程组

$$\begin{cases} x - p = 1, \\ y - p = p^2, \end{cases} \quad \begin{cases} x - p = p, \\ y - p = p, \end{cases} \quad \begin{cases} x - p = p^2, \\ y - p = 1. \end{cases}$$

即得到 $(x, y) = (p+1, p+p^2), (2p, 2p), (p^2+p, p+1)$.

即只有三组解.

当 $p$ 为合数时,可以得到多于三个方程组,因此方程的解的组数大于3.

12·54　是不是存在这样的奇自然数 $k,l,m$,使得方程

$$\frac{1}{1991}=\frac{1}{k}+\frac{1}{l}+\frac{1}{m}$$

成立.

（第17届全俄数学奥林匹克,1991年）

[解]　存在.例如

(1) $k=2183,\quad l=24013,\quad m=395123$,

(2) $k=2123,\quad l=34933,\quad m=384263$,

(3) $k=2353,\quad l=13937,\quad m=181181$,

(4) $k=3077,\quad l=5973,\quad m=101541$.

事实上,若已知方程成立,则

$$klm=1991(kl+lm+km),$$
$$klm=11\cdot181(kl+lm+km).$$

显然,$k,l,m$ 中至少有一个是11的倍数,一个是181的倍数.

从而可设

$$k=t,\quad l=11t,\quad m=181t.$$

这样就有

$$\begin{aligned}11\cdot181t^3&=11\cdot181(11t^2+1991t^2+181t^2)\\&=11\cdot181\cdot2183t^2.\end{aligned}$$

所以　$$t=2183.$$

于是得到第(1)组解.

又如设 $k=11t,\quad l=181t,\quad m=11\cdot181t$.

这样就得到第(2)组解.

12·55　求方程 $\frac{xy}{z}+\frac{xz}{y}+\frac{yz}{x}=3$ 的整数解.

（第26届莫斯科数学奥林匹克,1963年）

[解]　我们先求出已知方程的正整数解:$(x_0,y_0,z_0)$.

因为若 $(x_0,y_0,z_0)$ 是方程的一组自然数解,那么 $(x_0,-y_0,-z_0)$,$(-x_0,y_0,-z_0)$,$(-x_0,-y_0,z_0)$ 也是方程的整数解.

已知方程可化为

$$x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2=3xyz,$$

则

$$\begin{aligned}6xyz&=2x^2y^2+2x^2z^2+2y^2z^2\\&=(x^2y^2+x^2z^2)+(x^2y^2+y^2z^2)+(x^2z^2+y^2z^2)\\&\geqslant 2x^2yz+2xy^2z+2xyz^2\\&=2xyz(x+y+z).\end{aligned}$$

于是有

$$x+y+z\leqslant 3.$$

若 $x,y,z$ 是正整数,则只能有

$$x=y=z=1.$$

于是已知方程有四组解:

$(1,1,1),(1,-1,-1),(-1,1,-1),(-1,-1,1)$.

12·56　方程$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{1968}$有多少组整数解$(x,y)$?

(基辅数学奥林匹克,1968年)

**[解 1]**　已知方程可化为

$$\sqrt{x}=\sqrt{1968}-\sqrt{y},$$

方程两边平方得

$$x=y+1968-8\sqrt{123y}.$$

于是数 $123y$ 必须是完全平方数,设

$$123v^2=y,\quad v\in Z.$$

同理

$$123u^2=x,\quad u\in Z.$$

由此可得原方程为

$$|u|+|v|=4.$$

该方程的非负整数解为

$$(0,4),(1,3),(2,2),(3,1),(4,0).$$

于是可得到整数解$(x,y)$为

$(0,1968),(123,1107),(492,492),(1107,123),(1968,0)$.

**[解 2]**　已知方程可化为

$$\begin{aligned}\sqrt{x}+\sqrt{y}&=\sqrt{1968}=4\sqrt{123}=0+4\sqrt{123}\\&=\sqrt{123}+3\sqrt{123}=2\sqrt{123}+2\sqrt{123}\\&=3\sqrt{123}+\sqrt{123}=4\sqrt{123}+0.\end{aligned}$$

相应的$(x,y)$为$(0,1968)$,$(123,1107)$,$(492,492)$,$(1107,123)$,$(1968,0)$.

12·57　对正整数$n$,令$S_n$为$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(2k-1)^2+a_k^2}$的最小值,其中$a_1,a_2,\cdots,a_n$为正实数,其和为17,存在惟一的$n$,使$S_n$也是整数.求$n$.

(第9届美国数学邀请赛,1991年)

**[解]**　把每一项$t_k=\sqrt{(2k-1)^2+a_k^2}$都看作为是一个直角三角形的斜边,其两直角边边长为$2k-1$和$a_k$.

把这些直角三角形放在一起形成一个梯子,记$A,B$分别为其始点和终点.

从$A$到$B$的距离为

$$\sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2+\left[\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\right]^2}=\sqrt{17^2+n^4}.$$

而$\sum_{k=1}^{n}t_k$是从$A$到$B$沿斜边走的长度,所以

$$\sum_{k=1}^{n}t_k\geqslant\sqrt{17^2+n^4},$$

且可选取$a_k$使等号成立.

故　　$$S_n=\sqrt{17^2+n^4}.$$

当$S_n$为整数时,我们求

$$S_n^2=17^2+n^4$$

的正整数解.

$$17^2=S_n^2-n^4=(S_n-n^2)(S_n+n^2).$$

因为17是素数,所以

$$\begin{cases}S_n-n^2=1,\\S_n+n^2=17^2.\end{cases}$$

解得　　$$S_n=145,\quad n=12.$$

12·58　求使前$n$个自然数$(n>1)$的平方平均数是一个整数的最小正整数$n$.

$\left(注：n 个数 a_1, a_2, \cdots, a_n 的平方平均数是\sqrt{\dfrac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}.\right)$

（第15届美国数学奥林匹克，1986年）

**［解］** 设$\sqrt{\dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n}}=m,\quad m\in Z$，则

$$\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n}=m^2,$$

$$\frac{(n+1)(2n+1)}{6}=m^2,$$

$$(n+1)(2n+1)=6m^2.$$

因为$6m^2$为偶数，$2n+1$为奇数，所以$n+1$是偶数，从而$n$是奇数.

设$n=6p+3$或$n=6p-1$或$n=6p+1$.

(1) 当$n=6p+3$时，则

$$(6p+4)(12p+7)=6m^2,$$

$$72p^2+90p+28=6m^2.$$

由于 $\qquad 6\mid 72,\quad 6\mid 90,\quad 6\nmid 28.$

所以此时无解.

(2) 当$n=6p-1$时，则

$$6p(12p-1)=6m^2,$$

即 $\qquad m^2=p(12p-1).$

由于$p$和$12p-1$互质，则为使上式成立，$p$和$12p-1$必须都是完全平方数.

设 $\qquad p=s^2,\quad 12p-1=t^2.$

消去$p$得

$$t^2=12s^2-1=4(3s^2-1)+3.$$

因为一个平方数被4除只能余0或1，所以上式不可能成立.

此时亦无解.

(3) 当$n=6p+1$时，则

$$(6p+2)(12p+3)=6m^2,$$

即 $\qquad m^2=(3p+1)(4p+1).$

由于 $3p+1$ 和 $4p+1$ 互质,则 $3p+1$ 与 $4p+1$ 必须都是完全平方数.

设 $$3p+1=u^2,\quad 4p+1=v^2.$$

消去 $p$ 得 $$4u^2-3v^2=1.$$

显然,$u=v=1$ 是其中的一组解,但此时

$$p=0,\quad n=1$$

与 $n>1$ 矛盾.

由 $4u^2-3v^2=1$ 可知,$v$ 必为奇数.

设 $v=2q+1$,则方程化为

$$u^2-3q(q+1)-1=0.$$

由于 $q(q+1)$ 为偶数,可知 $u$ 也为奇数.

设 $u=2j+1$,则上面的方程化为

$$4j(j+1)=3q(q+1).$$

显然,方程左边为 8 的倍数,为使方程右边为 8 的倍数,又使 $n$ 最小,可设 $q+1=8$.

此时, $$q=7,j=6,j+1=7.$$

于是有 $$u=2j+1=13,\quad v=2q+1=15,$$

$$u^2=3p+1=169,\quad p=56.$$

从而 $$n=6p+1=337.$$

12·59　在 $\triangle ABC$ 中,$AB=c$,$BC=a$ 和 $CA=b$,其中 $a,b,c$ 是正整数,且 $\angle A=2(\angle B-\angle C)$.求出所有这样的三元数组 $(a,b,c)$.

（加拿大数学奥林匹克训练题,1992 年）

[**解**]　设 $\angle BAC$ 的平分线与 $BC$ 交于 $D$,则

$$\begin{aligned}\angle ADB&=\frac{1}{2}\angle A+\angle C\\&=\angle B.\end{aligned}$$

所以 $\triangle ABD$ 为等腰三角形.

从 $A$ 引 $AE\perp BD$ 于 $E$,则 $BE=DE$.

设 $BE=DE=x$,则

$$CD=a-2x.$$

由勾股定理

$$AE^2 = AC^2 - CE^2 = AB^2 - BE^2.$$

即 $$b^2 - (a - x)^2 = c^2 - x^2,$$

$$x = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a}. \quad ①$$

又因为 $AD$ 平分 $\angle BAC$，所以有

$$\frac{b}{a - 2x} = \frac{c}{2x},$$

即 $$x = \frac{ac}{2(b + c)}. \quad ②$$

从 ①，② 中消去 $x$ 得

$$ba^2 = (b - c)(b + c)^2.$$

若 $m$ 和 $n$ 是互素的正整数，且满足

$$\frac{a}{b + c} = \frac{m}{n}.$$

所以 $$\frac{b - c}{b} = \frac{a^2}{(b + c)^2} = \frac{m^2}{n^2}.$$

此时有 $$m < n.$$

从而有 $$c = b \cdot \frac{n^2 - m^2}{n^2},$$

$$a = b \cdot \frac{m(2n^2 - m^2)}{n^3}.$$

因为 $$(m, n) = 1,$$

所以，对于某个正整数 $k$，必有

$$b = kn^3.$$

从而 $$c = kn(n - m)(n + m),$$

$$a = km(2n^2 - m^2).$$

都是正整数.

于是下式给出所有的解：

$$(a, b, c) = (km(2n^2 - m^2), kn^3, kn(n^2 - m^2)),$$

其中 $k, m, n$ 都是正整数，且 $n > m$ 及 $(m, n) = 1$.

12·60　一个直角三角形的边长都是正整数，它的一条直角边比斜边小 1575，另一条直角边小于 1991，求这个直角三角形斜边的长.

（中国北京市高中一年级数学竞赛，1991 年）

**[解]**　设直角边长为 $a, b$，斜边长为 $c$，$a, b$ 和 $c$ 为正整数. 由题意

$$\begin{cases}a^2+b^2=c^2,\\c-b=1575,\\a<1991.\end{cases}$$

$$\begin{aligned}a^2&=c^2-b^2=(c-b)(c+b)\\&=1575(c+b)\\&=3^2\cdot5^2\cdot7(c+b).\end{aligned}$$

所以 $3\cdot5\cdot7\mid a$,

即 $105\mid a$.

设 $a=105k$, $k$ 为正整数,则由

$$105k<1991,\quad k<18.9.$$

又 $a>c-b=1575$, $105k>1575$, $k>15$.

于是 $k=16,17,18$.

由 $c-b=1575$ 是奇数,则 $c$ 和 $b$ 的奇偶性不同,从而 $c+b$ 是奇数,于是 $a$ 是奇数.

再由 $a=105k$ 是奇数知, $k=17$.

即 $a=105\cdot17=1785$.

于是 $\begin{cases}c+b=2023,\\c-b=1575.\end{cases}$

解得斜边 $c=1799$.

12·61 有一群儿童,他们的年龄之和是50岁.其中最大的13岁,有一个是10岁,除去10岁的儿童之外,其余儿童的年龄恰好组成一个等差级数.问有几个儿童,每个儿童几岁?

(中国北京市高中数学竞赛,1956年)

[解] 把最大儿童的年龄记作 $a$,即 $a=13$.

设除去10岁的那个儿童外,还有 $b+1$ 个儿童,并设他们年龄的公差为 $d$,则这 $b+1$ 个儿童的年龄为

$$a,\quad a-d,\quad a-2d,\quad\cdots,\quad a-bd,$$

并且他们年龄之和为 $50-10=40$,于是

$$a+(a-d)+\cdots+(a-bd)=40,$$

$$(b+1)a-\frac{b(b+1)}{2}d=40,$$

$$(b+1)(2a-bd)=80.$$

于是 $b+1$ 能整除 80.

又 $$2a-bd=a+(a-bd)>13,$$

因此 $$b+1<\frac{80}{13}.$$

又 $$2a-bd<2a=26,$$

从而又有 $$b+1>\frac{80}{26},$$

即 $$\frac{80}{26}<b+1<\frac{80}{13}.$$

则 $b+1$ 只能是 4,5 和 6,又因为 6 不是 80 的约数,所以 $b+1$ 可能等于 4 或 5.

当 $b+1=4$ 时, $b=3$.

$$(b+1)(2a-bd)=4(26-3d)=80.$$

所以 $$d=2.$$

从而 $a-d=11$, $a-2d=9$, $a-3d=7$.

所以一共有 $4+1=5$ 个儿童,他们的年龄分别是 13,11,10,9,7.

当 $b+1=5$ 时, $b=4$.

$$(b+1)(2a-bd)=5(26-4d)=80,$$

得 $d=2.5$ 不是整数.

所以 $b+1=5$ 不可能.

于是只有惟一一组解.

12·62　有一长、宽、高分别为正整数 $m,n,r(m\leqslant n\leqslant r)$ 的长方体,表面涂上红色后切成棱长为 1 的正方体,已知不带红色的正方体个数与两面带红色的正方体个数之和,减去一面带红色的正方体个数得 1985,求 $m,n,r$ 的值.

(中国初中数学联赛,1985 年)

**[解]**　(1).设 $m>2$.

依题意,不带红色的正方体个数为

$$k_0=(m-2)(n-2)(r-2);$$

一面带红色的正方体个数为

$$k_1=2(m-2)(n-2)+2(m-2)(r-2)+2(n-2)(r-2);$$

两面带红色的正方体个数为

$$k_2=4(m-2)+4(n-2)+4(r-2).$$

于是,由题意有

$$k_0 + k_2 - k_1 = 1985,$$

即 $$(m-2)(n-2)(r-2)+4[(m-2)+(n-2)+(r-2)]$$
$$-2[(m-2)(n-2)+(m-2)(r-2)+(n-2)(r-2)]$$
$$=1985.$$

经整理可得

$$[(m-2)-2][(n-2)-2][(r-2)-2]=1985-8=1977,$$

即 $$(m-4)(n-4)(r-4)=1977.$$

鉴于 $$\begin{aligned}1977 &= 1\cdot 3\cdot 659\\ &= 1\cdot 1\cdot 1977\\ &= (-1)\cdot(-1)\cdot 1977,\end{aligned}$$

则有

$$\begin{cases}m-4=1,\\ n-4=3,\\ r-4=659,\end{cases}\quad \begin{cases}m-4=1,\\ n-4=1,\\ r-4=1977,\end{cases}\quad \begin{cases}m-4=-1,\\ n-4=-1,\\ r-4=1977.\end{cases}$$

因此可得

$$\begin{cases}m=5,\\ n=7,\\ r=663,\end{cases}\quad \begin{cases}m=5,\\ n=5,\\ r=1981,\end{cases}\quad \begin{cases}m=3,\\ n=3,\\ r=1981.\end{cases}$$

(2). 设 $m=1$,当 $n=1$ 时无解,所以 $n\geqslant 2$.

依题意,不带红色的正方形个数为 $k_0=0$;

一面带红色的正方形个数为 $k_1=0$;

两面带红色的正方形个数为

$$k_2=(n-2)(r-2).$$

于是由 $$k_0+k_2-k_1=1985,$$

得 $$k_2=1985.$$

即 $$(n-2)(r-2)=1985=5\cdot 397=1\cdot 1985.$$

$$\begin{cases}n-2=5,\\ r-2=397,\end{cases}\quad \begin{cases}n-2=1,\\ r-2=1985.\end{cases}$$

因此可得

$$\begin{cases} m = 1, \\ n = 7, \\ r = 399, \end{cases} \quad \begin{cases} m = 1, \\ n = 3, \\ r = 1987. \end{cases}$$

(3). 再设 $m = 2$,则 $\qquad k_0 = 0.$

于是有 $$k_2 - k_1 = 1985.$$

由于 $k_1$ 和 $k_2$ 均为偶数,上式不可能成立.

综合(1),(2),(3),符合题意的 $m,n,r$ 有五组:

$$m_1 = 5,\quad n_1 = 7,\quad r_1 = 663;$$
$$m_2 = 5,\quad n_2 = 5,\quad r_2 = 1981;$$
$$m_3 = 3,\quad n_3 = 3,\quad r_3 = 1981;$$
$$m_4 = 1,\quad n_4 = 7,\quad r_4 = 399;$$
$$m_5 = 1,\quad n_5 = 3,\quad r_5 = 1987.$$

12·63 能同时表示成连续 9 个整数之和,连续 10 个整数之和以及连续 11 个整数之和的最小正整数是多少?

(第 11 届美国数学邀请赛,1993 年)

[**解**] 设 $a$ 能表示成连续 9 个,10 个和 11 个整数之和,则

$$a = l + (l+1) + \cdots + (l+8) = 9l + 36,$$
$$a = m + (m+1) + \cdots + (m+9) = 10m + 45,$$
$$a = n + (n+1) + \cdots + (n+10) = 11n + 55,$$

其中 $l, m, n \in N$. 则

$$\begin{cases} 9l + 36 = 11n + 55, \\ 10m + 45 = 11n + 55. \end{cases}$$

所以 $$9l = 11n + 19,\quad 10m = 11n + 10.$$

$$\begin{cases} l = n + 2 + \dfrac{2n+1}{9}, \\ m = n + 1 + \dfrac{n}{10}. \end{cases}$$

于是 $$\begin{cases} 2n + 1 \equiv 0 \pmod 9, \\ \qquad n \equiv 0 \pmod{10}. \end{cases}$$

满足上式的最小的 $n = 40$.

所以 $a$ 的最小值为

$$40 + 41 + \cdots + 50 = 495.$$

12·64　甲、乙二人同时解根式方程 $\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}=7$. 抄题时,甲错抄成: $\sqrt{x-a}+\sqrt{x+b}=7$,结果解得其一根为 12. 乙错抄成 $\sqrt{x+a}+\sqrt{x+d}=7$,结果解得其一根为 13.

已知二人除抄错题之外,解题过程都是正确的,又 $a,b,d$ 都是整数. 试求 $a,b$ 之值.

(中国广州、重庆、洛阳、福州、武汉初中数学竞赛,1986 年)

[解]　由题设条件可得

$$\begin{cases}\sqrt{12-a}+\sqrt{12+b}=7,\\ \sqrt{13+a}+\sqrt{13+d}=7.\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}\sqrt{12-a}=7-\sqrt{12+b}, & ①\\ \sqrt{13+a}=7-\sqrt{13+d}. & ②\end{cases}$$

由 ① 得　$12-a=7+12+b-14\sqrt{12+b}$.

$$a+b+7=14\sqrt{12+b}.$$

上式中左端为整数,因而右端亦为整数,于是 $\sqrt{12+b}$ 为有理数,由于 $b$ 为整数,所以 $12+b$ 为完全平方数,亦即 $\sqrt{12+b}$ 为整数.

同理可证 $\sqrt{13+d}$ 也为整数.

设 $p=7-\sqrt{12+b}$,　$q=7-\sqrt{13+d}$,则由题设,$p$ 和 $q$ 均为非负整数,由 ①,② 消去 $a$ 得

$$p^2+q^2=25.$$

解得　$(p,q)=(0,5),(3,4),(4,3),(5,0)$.

相应的 $a,b$ 有

$$(a,b)=(12,37),(3,4),(-4,-3),(-13,-8).$$

12·65　有多少个整数的有序四数组 $(a,b,c,d)$ 满足:

$0<a<b<c<d<500$, $a+d=b+c$ 和 $bc-ad=93$.

(第 11 届美国数学邀请赛,1993 年)

[解]　由 $a+d=b+c$ 及 $0<a<b<c<d$ 可知,存在 $\delta\in N$,使得

$$\begin{cases}b=a+\delta, & ①\\ c=d-\delta. & ②\end{cases}$$

将 ①,② 代入 $bc-ad=93$ 得

$$(a+\delta)(d-\delta)-ad=93.$$

$$\delta(d-a-\delta)=1\cdot 93=3\cdot 31.$$

由此可得到四个方程组:

Ⅰ. $\begin{cases}\delta=1,\\ d-a-\delta=93.\end{cases}$ Ⅱ. $\begin{cases}\delta=3,\\ d-a-\delta=31.\end{cases}$

Ⅲ. $\begin{cases}\delta=93,\\ d-a-\delta=1.\end{cases}$ Ⅳ. $\begin{cases}\delta=31,\\ d-a-\delta=3.\end{cases}$

由 ①,② 及方程组 Ⅰ 得

$$\begin{cases}b=a+1,\\ c=d-1=93+a+1-1=93+a,\\ d=c+1=94+a.\end{cases}$$

因为 $a+94<500$,

所以 $0<a<406$.

于是有 405 组 $(a,b,c,d)$.

由 ①,② 及方程组 Ⅱ 得

$$\begin{cases}b=a+3,\\ c=d-3=a+31,\\ d=c+3=a+34.\end{cases}$$

所以 $a+34<500$,

$0<a<466$.

于是有 465 组 $(a,b,c,d)$.

由 ①,② 及方程组 Ⅲ 得

$$\begin{cases}b=a+93,\\ c=a+1,\\ d=a+94.\end{cases}$$

不满足 $a<b<c<d$.

由 ①,② 及方程组 Ⅳ 得

$$\begin{cases}b=a+31,\\ c=a+31,\\ d=a+62.\end{cases}$$

不满足 $a<b<c<d$.

因此共有 $405+465=870$ 组 $(a,b,c,d)$.

12·66 在区间 $1\leqslant n\leqslant 10^6$ 中,使得方程 $n=x^y$ 有非负整数解

$x, y$,且 $x \neq n$ 的整数 $n$ 共有多少个.

（中国上海市高三数学竞赛,1990 年）

[解]　设 $N(x^y)$ 表示整数 $x^y$ 的个数.若

$$1 < x^y \leqslant 10^6.$$

由于　$2^{19} = 524288 < 10^6$,　$2^{20} > 10^6$,则由容斥原理得

$$\begin{aligned} N(x^y) = & N(x^2) + N(x^3) + N(x^5) + N(x^7) + N(x^{11}) + N(x^{13}) \\ & + N(x^{17}) + N(x^{19}) - N(x^6) - N(x^{10}) - N(x^{14}) \\ & - N(x^{15}) \end{aligned}$$

由于大于 1 且不大于 $10^6$ 的平方数有 $10^3 - 1$ 个,所以

$$N(x^2) = 999.$$

大于 1 且不大于 $10^6$ 的平方数有 $10^2 - 1$ 个,即 $N(x^3) = 99$ 个.

因为　　$15^5 = 819375 < 10^6$,

所以大于 1 不大于 $10^6$ 的 5 次方数有 $15 - 1$ 个,即 $N(x^5) = 14$.

以此类推可得,$1 < x^y \leqslant 10^6$ 时

$$\begin{aligned} N(x^y) & = 999 + 99 + 14 + 6 + 2 + 1 + 1 - 9 - 2 - 1 - 1 \\ & = 1110 \text{ 个}. \end{aligned}$$

又 $n = 1$ 时有非负整数解 $x > 1$ 且 $y = 0$.

于是满足题意的整数 $n$ 有 1111 个.

12·67　试求方程 $2x^4 + 1 = y^2$ 的一切整数解.

（中国国家集训队选拔试题,1993 年）

[解]　(1) 当 $y = 0$ 时,方程无整数解.

(2) 当 $x = 0$ 时,$y = \pm 1$,因此方程有解

$$x = 0, \quad y = 1. \text{和 } x = 0, \quad y = -1.$$

(3) 若$(x_0, y_0)$ 是方程的解,则$(x_0, \pm y_0)$ 以及$(-x_0, \pm y_0)$ 也是方程的解,因此只需考虑方程的自然数解.

我们证明方程

$$2x^4 + 1 = y^2, \qquad ①$$

无自然数解.

若 ① 有自然数解$(x, y)$,则 $y$ 是奇数,设 $y = 2z + 1$,于是 ① 化为

$$x^4 = 2z(z + 1).$$

因此 $x$ 为偶数,记作 $x = 2u$.从而有

$$8u^4 = z(z + 1).$$

由$(z,z+1)=1$,可有

$$\text{Ⅰ}.\begin{cases} z=8v^4, \\ z+1=w^4, \\ vw=u. \end{cases} \quad (v,w)=1.$$

$$\text{Ⅱ}.\begin{cases} z=v^4, \\ z+1=8w^4, \\ vw=u. \end{cases} \quad (v,w)=1.$$

对于情形 Ⅱ,有方程

$$8w^4=v^4+1.$$

由于

$$v^4\equiv 0,1 \pmod 8,$$

$$8w^4\equiv 0 \pmod 8.$$

于是情形 Ⅱ 无解.

对于情形 Ⅰ,有

$$w^4=8v^4+1.$$

从而 $w$ 是奇数,设 $w=2q+1$,则

$$(2q+1)^4=8v^4+1,$$

$$\begin{aligned} v^4 &= 2q^4+4q^3+3q^2+q \\ &= q(q+1)(2q^2+2q+1). \end{aligned}$$

显然

$$(q,q+1,2q^2+2q+1)=1,$$

所以应有

$$\begin{cases} q=\alpha^4, \\ q+1=\beta^4. \end{cases}$$

即

$$\beta^4-\alpha^4=1.$$

此方程无自然数解,于是 ① 无自然数解.

综合(1),(2),(3),已知方程的所有整数解$(x,y)=(0,1),(0,-1)$.

12·68　求方程$(a^2+b)(a+b^2)=(a-b)^2$的所有非零整数解 $a,b$.

(第 16 届美国数学奥林匹克,1987 年)

[解]　我们分情况进行讨论.

(1) 当 $a=b$ 时,有　$(a^2+a)(a+a^2)=0,$

解得　$a=-1$　或 $a=0,$

即 $\begin{cases} a=-1, \\ b=-1. \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=0, \\ b=0. \end{cases}$(舍去).

(2) 当 $a=0$ 时,有 $b^3=b^2$.

当 $b\neq 0$ 时,$b=1$,因此有解

$$\begin{cases} a=0, \\ b=1. \end{cases}$$

(3) 当 $b=0$ 时,同样有解 $\begin{cases} a=1, \\ b=0. \end{cases}$

(4) 当 $a\neq b$,且 $a$ 和 $b$ 都不为 0 时.

我们首先证明 $a$ 和 $b$ 异号.

若 $a,b$ 都大于 0,由对称性及 $a,b$ 是整数,不妨设 $a>b\geqslant 1$.

由原方程得

$$a^2<(a^2+b)(b^2+a)=(a-b)^2<a^2.$$

出现矛盾.

若 $a,b$ 都小于 0,不妨设 $b<a\leqslant -1$.

于是 $b^2+a\geqslant 1$,由原方程 $a^2+b\geqslant 1$.从而

$$b^2+a\leqslant (a^2+b)(b^2+a)=(a-b)^2,$$

即 $$a\leqslant a^2-2ab.$$

则 $$2b+1\geqslant a,$$

即 $$(b-a)+b+1\geqslant 0.$$

而由 $b<a\leqslant -1$ 得

$$b-a<0,\quad b+1<0,$$

从而 $$(b-a)+b+1<0.$$

出现矛盾.

于是 $a$ 和 $b$ 异号.

不妨设 $a>0,\quad b<0$.

用 $-b$ 代替 $b$ 得

$$(a^2-b)(a+b^2)=(a+b)^2. \qquad ①$$

这样,① 中的字母 $a,b$ 均为正整数.

设 $(a,b)=d$,记 $a=a_1d,b=b_1d$,则

$$(a_1,b_1)=1.$$

把 $a,b$ 代入 ① 可化为

$$(da_1^2 - b_1)(db_1^2 + a_1) = (a_1 + b_1)^2. \quad ②$$

$$a_1b_1(d^2a_1b_1 - 3) + a_1^2(da_1 - 1) = b_1^2(db_1 + 1).$$

因为$(a_1, b_1) = 1$,则必有

$$b_1 \mid da_1 - 1, \quad a_1 \mid db_1 + 1.$$

下面再分几种情况讨论:

(i) 若 $da_1 - 1 = 0$,即 $da_1 = 1 = a$,代入原方程得 $b = 0$;由对称性还有 $a = 0$, $b = 1$.而这两组解在(2) 和(3) 中已经得出.

(ii) 若 $da_1 - 1 = 1$,即 $da_1 = 2 = a$,代入原方程得 $b = -1$;由对称性还有 $a = -1$, $b = 2$.因而又得到两组解:

$$\begin{cases} a = 2, \\ b = -1. \end{cases} \quad \begin{cases} a = -1, \\ b = 2. \end{cases}$$

(iii) 若 $da_1 - 1 \geqslant 2$,即 $da_1 = a \geqslant 3$,则

$$\begin{aligned} &(da_1^2 - b_1)(db_1^2 + a_1) - (a_1 + b_1)^2 \\ &= d^2a_1^2b_1^2 + da_1^3 - (a_1 + b_1)^2 - db_1^3 - a_1b_1. \end{aligned}$$

由 $b_1 \mid da_1 - 1$ 得 $b_1 \leqslant da_1 - 1, da_1 \geqslant b_1 + 1$,于是

$$\begin{aligned} &d^2a_1^2b_1^2 + da_1^3 - (a_1 + b_1)^2 - db_1^3 - a_1b_1 \\ &\geqslant (b_1 + 1)da_1b_1^2 + a_1^2(da_1 - 1) - b_1^2 - db_1^3 - 3a_1b_1 \\ &= da_1b_1^3 + da_1b_1^2 - db_1^3 + a_1^2(da_1 - 1) - b_1^2 - 3a_1b_1 \\ &= db_1^3(a_1 - 1) + b_1^2(da_1 - 1) + a_1^2(da_1 - 1) - 3a_1b_1 \\ &= db_1^3(a_1 - 1) + (da_1 - 1)(a_1^2 + b_1^2) - 3a_1b_1 \\ &\geqslant 2(a_1^2 + b_1^2) - 3a_1b_1 + db_1^3(a_1 - 1) \\ &\geqslant a_1b_1 + db_1^3(a_1 - 1) \\ &> 0. \end{aligned}$$

然而由 ② 式

$$(da_1^2 - b_1)(db_1^2 + a_1) - (a_1 + b_1)^2 = 0.$$

出现矛盾.

即 $da_1 - 1 \geqslant 2$ 时无解.

于是原方程只有五组解:

$$\begin{cases} a = 0, \\ b = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1, \\ b = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} a = -1, \\ b = -1, \end{cases} \quad \begin{cases} a = 2, \\ b = -1, \end{cases} \quad \begin{cases} a = -1, \\ b = 2. \end{cases}$$

**12·69** 证明如果 $x + y$ 为素数,则对奇数 $n$,方程 $x^n + y^n = z^n$ 不

可能有整数解.

（第 26 届莫斯科数学奥林匹克，1963 年）

[证] 由于 $n$ 是奇数，则

$$x+y \mid x^n+y^n=z^n,$$

又因为 $x+y$ 是素数，

于是 $$x+y \mid z.$$

从而有 $$z \geqslant x+y.$$

即 $$z^n \geqslant (x+y)^n > x^n+y^n.$$

于是 $z^n=x^n+y^n$ 不成立.

12·70 试求方程 $x^5-x^3-x^2+1=y^2$ 的整数解.

（前苏联教委的推荐试题，1990 年）

[解] 已知方程可化为

$$x^2(x^3-1)-(x^3-1)=y^2,$$

$$(x^3-1)(x^2-1)=y^2,$$

$$(x-1)^2(x+1)(x^2+x+1)=y^2. \qquad ①$$

当 $x=0$ 时， $y^2=1$， $y=\pm 1$.

当 $x=\pm 1$ 时， $y=0$.

设 $x,y$ 是方程的整数解，且 $x \neq -1,0,1$.

由 ① 式，$y^2$ 能被 $(x-1)^2$ 整除，因此，$y$ 能被 $x-1$ 整除，由此可得

$$(x+1)(x^2+x+1)=\left(\frac{y}{x-1}\right)^2.$$

因为 $\frac{y}{x-1}$ 是整数，则 $(x+1)(x^2+x+1)$ 应是完全平方数. 由于

$$x^2+x+1=x(x+1)+1,$$

可知 $x+1$ 与 $x^2+x+1$ 没有大于 1 的公约数，即 $x+1$ 与 $x^2+x+1$ 互素.

所以，$x+1$ 与 $x^2+x+1$ 都是完全平方数.

从而 $x+1 \geqslant 0$，又 $x \neq 1,-1,0$，所以 $x \geqslant 2$.

因此就有 $$x^2 < x^2+x+1 < (x+1)^2,$$

而 $x^2+x+1$ 在 $x^2$ 和 $(x+1)^2$ 之间，即在两个相邻平方数之间，不可能是平方数.

这个矛盾表明，方程没有 $x \neq -1,0,1$ 的整数解.

于是,方程仅有四组整数解:

$$(x,y)=(0,1),(0,-1),(1,0),(-1,0).$$

12·71　求自然数 $m$ 和 $n$,使得 $m^m+(mn)^n=1984$.

（基辅数学奥林匹克,1983 年）

[解]　由于 $$5^5=3125>1984,$$

所以 $$m^m<5^5,\quad n^n<5^5,$$

$$m\leqslant 4,\quad n\leqslant 4.$$

当 $n=4$ 时,

$$(mn)^n=(4m)^4=256m^4.$$

当 $m=2$ 时,有

$$256m^4>256\cdot 16>1984.$$

所以若 $n=4$,只能 $m=1$,但此时

$$1^1+(1\cdot 4)^4\neq 1984.$$

所以 $$m\leqslant 4,\quad n\leqslant 3.$$

又 $m<4$, $n<3$ 时,

$$m^m+(mn)^n<4^4+12^3=1984.$$

因而只有 $m=4,n=3$.此时

$$m^m+(mn)^n=4^4+12^3=1984.$$

所以方程有惟一一组自然数解 $m=4$, $n=3$.

12·72　有四个不相等的正整数,它们的和等于最大数乘以最小数的积加上其余两数的积.求这四个数.

（基辅数学奥林匹克,1955 年）

[解]　设正整数 $x,y,z,u$,且

$$1\leqslant x<y<z<u,$$

由题意得不定方程

$$x+y+z+u=xu+yz. \quad ①$$

因为 $x\geqslant 1$,所以

$$x+y+z+u=xu+yz\geqslant u+yz,$$

由此得 $$x+y+z\geqslant yz. \quad ②$$

又 $$x+y+z<3z, \quad ③$$

从而由②,③得 $$3z>yz,$$

即 $$1<y<3.$$

于是 $y = 2.$

从而只能有 $x = 1.$

把 $x = 1,\quad y = 2$ 代入 ① 得

$$1 + 2 + z + u = u + 2z,$$

$$z = 3.$$

于是本题的解为

$$x = 1,\quad y = 2,\quad z = 3,\quad u \text{ 是大于 } 3 \text{ 的任何整数}.$$

12·73　假设 $x,y,z$ 是三个不同的自然数.按上升的次序排列,且它们的倒数之和仍然是自然数,求这三个自然数 $x,y,z$.

(匈牙利数学奥林匹克,1918 年)

[解]　设这三个自然数的倒数和为 $a$,且 $x < y < z$,则有

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = a.$$

由于 $x,y,z$ 为自然数,且互不相等,则有

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} < \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2.$$

即 $a < 2.$

又由 $a$ 是自然数,则 $a = 1.$

于是已知方程化为 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1.$

又因为

$$\frac{1}{x} < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} < \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{3}{x},$$

就得到 $\frac{1}{x} < a = 1 < \frac{3}{x}.$

即 $1 < x < 3.$

从而必有 $x = 2.$

已知方程又化为

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1,$$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}.$$

又由 $\frac{1}{y} < \frac{1}{y} + \frac{1}{z} < \frac{1}{y} + \frac{1}{y} = \frac{2}{y},$

则 $$\frac{1}{y}<\frac{1}{2}<\frac{2}{y},$$

即 $$2<y<4.$$

从而必有 $$y=3.$$

再由已知方程可得 $$z=6.$$

于是本题有惟一解：$(x,y,z)=(2,3,6)$.

**12·74** 设 $a,b$ 是正整数，当 $a^2+b^2$ 被 $a+b$ 除时，商为 $q$，余数为 $r$，求所有数对 $(a,b)$，使 $q^2+r=1977$.

（第 19 届国际数学奥林匹克，1977 年）

**[解]** 由 $r\geqslant 0$ 及 $q^2+r=1977$ 知

$$q^2\leqslant 1977,\ q\leqslant\sqrt{1977}=44.4\cdots.$$

于是，数对 $(q,r)$ 的取值为

$$(44,41),(43,128),(42,213),\cdots$$

因为 $$a^2+b^2=(a+b)q+r,\quad 0\leqslant r<a+b,$$

以及 $$a^2+b^2\geqslant\frac{1}{2}(a+b)^2,$$

所以 $$\frac{a^2+b^2}{a+b}\geqslant\frac{1}{2}(a+b)>\frac{1}{2}r.$$

由于 $$q=\frac{a^2+b^2}{a+b}-\frac{r}{a+b}>\frac{1}{2}r-1,$$

则 $q\leqslant 43$ 时，$r\geqslant 128$，从而

$$\frac{1}{2}r-1\geqslant 63>43\geqslant q.$$

所以 $q\leqslant 43$ 时不可能.

即 $(q,r)$ 只能取值 $(44,41)$.

于是 $$a^2+b^2=44(a+b)+41,$$
$$(a-22)^2+(b-22)^2=1009.$$

设 $x=|a-22|,\quad y=|b-22|$，则

$$x^2+y^2=1009.$$

解得 $$\begin{cases}x=28,\\y=15,\end{cases}\quad\begin{cases}x=15,\\y=28.\end{cases}$$

从而可得

$$\begin{cases} a_1 = 50, \\ b_1 = 37, \end{cases} \quad \begin{cases} a_2 = 50, \\ b_2 = 7, \end{cases} \quad \begin{cases} a_3 = 37, \\ b_3 = 50, \end{cases} \quad \begin{cases} a_4 = 7, \\ b_4 = 50. \end{cases}$$

即所求数对$(a,b)$只有四组:

$$(50,37),(50,7),(37,50),(7,50).$$

12·75　求方程$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}=\left(1+\frac{1}{1988}\right)^{1988}$的整数解$m$.

(第22届全苏数学奥林匹克,1988年)

[解]　(1)若$m>0$,则已知方程化为

$$\frac{(m+1)^{m+1}}{m^{m+1}}=\frac{1989^{1988}}{1988^{1988}}.$$

由于$(m,m+1)=1$,　$(1988,1989)=1$,则此方程的两边都是既约分数,于是其分母相等.

$$m^{m+1}=1988^{1988}.$$

如果$m\geqslant 1988$,则　$m^{m+1}>1988^{1988}$,

如果$0<m<1988$,　则$m^{m+1}<1988^{1988}$.

因此方程没有正整数解.

(2)若$m<0$,

当$m=-1$时,方程不成立.

如果$m<-1$,设$n=-(m+1)$,则$n>0$,　$m=-(n+1)$.

已知方程化为

$$\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-n}=\left(1+\frac{1}{1988}\right)^{1988},$$

$$\frac{(n+1)^n}{n^n}=\frac{1989^{1988}}{1988^{1988}}.$$

于是　$n=1988$,　$m=-1989$.

12·76　证明如果自然数$x,y,z$满足方程$x^n+y^n=z^n$,那么$\min(x,y)\geqslant n$.

(波兰数学竞赛,1970年)

[证]　设自然数$x,y,z,n$适合方程

$$x^n+y^n=z^n. \qquad ①$$

不失一般性,我们设$x\leqslant y$.

因为　$z^n=x^n+y^n>y^n$,

所以　$z\geqslant y+1$.

将此不等式两边 $n$ 次方得

$$z^n \geqslant (y+1)^n = y^n + C_n^1 y^{n-1} + \cdots + 1 \geqslant y^n + ny^{n-1} \quad ②$$

由 ①,② 可得 $x^n \geqslant ny^{n-1}$.

但因 $x \leqslant y$,所以

$$x^n \geqslant ny^{n-1} \geqslant nx^{n-1}.$$

即 $$x \geqslant n.$$

于是 $$\min(x,y) = x \geqslant n.$$

12·77　证明方程 $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{xy}+\frac{1}{y^2}=1$ 没有正整数解.

（基辅数学奥林匹克,1952 年）

[证]　设 $x,y$ 是满足方程

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{xy}+\frac{1}{y^2}=1 \quad ①$$

的正整数.

不失一般性,设 $x \geqslant y > 0$,则

$$1 = \frac{1}{x^2}+\frac{1}{xy}+\frac{1}{y^2} \leqslant \frac{1}{y^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{y^2}.$$

于是 $$y^2 \leqslant 3,\quad 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{3}.$$

从而可得 $y=1$,这时已知方程 ① 化为

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}=0.$$

此式显然不能成立.

因此原方程没有正整数解.

12·78　求满足方程 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{4}{5}$ 的正整数 $x,y$ 和 $z$.

（第 26 届国际数学奥林匹克候选题,1985 年）

[解]　设 $x \leqslant y \leqslant z$,则

$$\frac{3}{x} \geqslant \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{4}{5} > \frac{1}{x}.$$

从而 $$5 < 4x \leqslant 15,$$

$$2 \leqslant x \leqslant 3.$$

如果 $x=2$,则

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{10},$$

$$\frac{2}{y}\geqslant\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{10}>\frac{1}{y},$$

$$10<3y\leqslant 20,$$

$$4\leqslant y\leqslant 6.$$

把 $y=4,5,6$ 代入已知方程可得到方程的两组解：

$$\begin{cases}x=2,\\y=4,\\z=20.\end{cases}\qquad\begin{cases}x=2,\\y=5,\\z=10.\end{cases}$$

如果 $x=3$,则

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{7}{15},$$

$$\frac{2}{y}\geqslant\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{7}{15}>\frac{1}{y},$$

$$15<7y\leqslant 30,$$

$$3\leqslant y\leqslant 4.$$

把 $y=3$, $y=4$ 代入方程,此时 $z$ 不是整数.

因此,已知方程仅有上面的两组解.

12·79 证明不存在这样的整数 $x,y,z$,可使等式 $x^k+y^k=z^k$ 在条件 $z>0$, $0<x<k$, $0<y<k$ 之下成立,其中 $k$ 是自然数.

(第 22 届莫斯科数学奥林匹克,1959 年)

[证] 不失一般性,设 $x\leqslant y$.则有

$$x^k+y^k=z^k\leqslant 2y^k=y^k+y^k.$$

又 $0<y<k$,则上式继续有

$$z^k\leqslant 2y^k\leqslant y^k+ky^{k-1}<(y+1)^k,$$

从而 $$z^k<(y+1)^k,\quad z<y+1.$$

这样就有 $$y<z<y+1.$$

由于 $z$ 位于两个相邻整数之间,所以 $z$ 不是整数.

于是不存在符合题目要求的整数.

12·80 求出满足方程 $x^2=1+4y^3(y+2)$ 的所有整数 $x$ 和 $y$.

(加拿大数学奥林匹克训练题,1992 年)

[解] (1) 若 $y=0$ 或 $y=-2$,则 $x^2=1$, $x=\pm 1$.

(2) 若 $y=-1$,则 $x^2=-3$,无整数解.

(3) 若 $y\geqslant 1$,则 $\quad 4y^2>1>1-4y$.

$$
\begin{aligned}
(2y^2+2y)^2 &= 4y^4+8y^3+4y^2 \\
&> 4y^4+8y^3+1>4y^4+8y^3-4y+1 \\
&= (2y^2+2y-1)^2.
\end{aligned}
$$

于是有 $\quad (2y^2+2y-1)^2<x^2<(2y^2+2y)^2$.

因为 $x^2$ 介于两个连续平方数之间,所以 $x$ 不可能是整数.

(4) 若 $y\leqslant -3$,则 $1-4y>1>4[1-y(y+2)]$,

$$
\begin{aligned}
(2y^2+2y-1)^2 &= 4y^4+8y^3-4y+1>4y^4+8y^3+1 \\
&> 4y^4+8y^3-4y^2-8y+4 \\
&= (2y^2+2y-2)^2,
\end{aligned}
$$

即 $\quad (2y^2+2y-2)^2<x^2<(2y^2+2y-1)^2$.

所以 $x$ 不是整数.

由(1),(2),(3),(4) 可知,方程只有四组解:

$$(x,y)=(1,0),(1,-2),(-1,0),(-1,-2).$$

12·81 已知 $x=-2272,\quad y=10^3+10^2c+10b+a,\quad z=1$ 适合方程 $ax+by+cz=1$,这里 $a,b,c$ 是正整数,$a<b<c$.求 $y$.

(第 28 届国际数学奥林匹克候选题,1987 年)

[解] 由已知

$$b(1000+100c+10b+a)+c-2272a-1=0.$$

若 $b\geqslant a+2$,则 $c\geqslant a+3$,于是

$$
\begin{aligned}
0 &\geqslant (a+2)[1000+100(a+3)+10(a+2)+a] \\
&\quad +(a+3)-2272a-1 \\
&= 111a^2-729a+2642.
\end{aligned}
$$

记 $u=111a^2-729a+2642$,则

$$u\geqslant\frac{4\cdot 111\cdot 2642-729^2}{4\cdot 111}>0.$$

于是出现 $0>0$ 的矛盾.

所以 $\quad b=a+1$.

设 $\quad c=a+2+t,\quad t\geqslant 0$,则

$$
\begin{aligned}
0 &= (a+1)[1000+100(a+2+t)+10(a+1)+a] \\
&\quad +a+2+t-2272a-1,
\end{aligned}
$$

即有 $\qquad 111a^2+(100t-950)a+(1211+101t)=0.$

若 $t\geqslant 2$,则

$$\begin{aligned}0&\geqslant 111a^2+(200-950)a+(1211+202)\\&=111a^2-750a+1413.\end{aligned}$$

记 $v=111a^2-750a+1413$,则

$$v\geqslant\frac{4\cdot 111\cdot 1413-750^2}{4\cdot 111}>0.$$

同样出现 $0>0$ 的矛盾.

所以 $t=0$ 或 1.

当 $t=1$ 时, $b=a+1,\quad c=a+3$,则

$$111a^2-850a+1312=0.$$

此方程无整数解.

当 $t=0$ 时, $b=a+1,\quad c=a+2$,则

$$111a^2-950a+1211=0,$$

$$(a-7)(111a-173)=0,$$

所以 $$a=7,\quad b=8,\quad c=9.$$

于是 $$y=1987.$$

12·82 某人有一块长方形木料,尺寸为 $m\cdot n\cdot r$ 立方英寸($m$,$n$,$r$ 为整数).他将表面漆上油漆,然后切成 1 立方英寸一个的小块,发现恰好有半数小块完全没有油漆.求证具有这种特性而实质上不同的木块的数目是有限的(不必将它们都列举出来).

(第 12 届美国普特南数学竞赛,1952 年)

[证] 完全没有油漆的立方块砌成尺寸为

$$(m-2)(n-2)(r-2)$$

的长方块,由题意有

$$mnr=2(m-2)(n-2)(r-2).\qquad ①$$

本题等价于证明方程 ① 仅有有限组整数解.

方程 ① 可化为

$$\frac{1}{2}=\frac{m-2}{m}\cdot\frac{n-2}{n}\frac{r-2}{r}.$$

设 $m\leqslant n\leqslant r$,则

$$\left(\frac{m-2}{m}\right)^3 \leqslant \frac{1}{2} < \frac{m-2}{m},$$

$$\frac{1}{2} < \frac{m-2}{m} \leqslant \sqrt[3]{\frac{1}{2}},$$

即
$$4 < m < 10.$$

因此，$m$ 只能取几个可能的值.

固定 $m$，方程 ① 化为

$$\frac{m}{2(m-2)} = \frac{n-2}{n} \cdot \frac{r-2}{r}.$$

于是有
$$\left(\frac{n-2}{n}\right)^2 \leqslant \frac{m}{2(m-2)} < \frac{n-2}{n},$$

$$\frac{m}{2(m-2)} < \frac{n-2}{n} \leqslant \sqrt{\frac{m}{2(m-2)}} < \sqrt{\frac{5}{6}} < 1.$$

因而，对于一个固定的整数 $m$，只有有限个 $n$ 适合上面的不等式.

显然，对于固定的 $m$ 和 $n$，至多有一个 $r$ 满足方程 ①.

因此，对 $m \leqslant n \leqslant r$，方程 ① 的解是有限的，去掉 $m \leqslant n \leqslant r$ 的约定，仍为有限组解.

12·83 已知一个长方形盒子，可用单位立方体填满. 如果改放尽可能多的体积为两个单位的立方体，而且使其与盒子的棱平行，则盒子的容积恰被填满 40%，试求出具有此种性质的长方形盒子的容积 ($\sqrt[3]{2} = 1.2599\cdots$).

（第 18 届国际数学奥林匹克，1976 年）

**[解]** 设长方形盒子的长、宽、高分别为 $x_1, x_2, x_3$，且 $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3$.

由题设，$x_i (i = 1,2,3)$ 都是正整数.

因为体积为 2 的立方体的棱长为 $\sqrt[3]{2}$，所以用长为 $\sqrt[3]{2}$ 的线段去量 $x_i$，只能量 $\left[\frac{x_i}{\sqrt[3]{2}}\right]$ 次.

现设
$$a_i = \left[\frac{x_i}{\sqrt[3]{2}}\right], \quad i = 1,2,3. \qquad ①$$

其中记号 $[\alpha]$ 表示不超过 $\alpha$ 的最大整数.

则由题设可得

$$2a_1a_2a_3 = \frac{40}{100} \cdot x_1x_2x_3,$$

即
$$\frac{a_1a_2a_3}{x_1x_2x_3} = \frac{1}{5},$$

即
$$\frac{x_1}{\left[\frac{x_1}{\sqrt[3]{2}}\right]} \cdot \frac{x_2}{\left[\frac{x_2}{\sqrt[3]{2}}\right]} \cdot \frac{x_3}{\left[\frac{x_3}{\sqrt[3]{2}}\right]} = 5.$$

构造函数

$$\varphi(x) = \frac{x}{\left[\frac{x}{\sqrt[3]{2}}\right]} \qquad (x > 1).$$

于是本题相当于解方程

$$\varphi(x_1) \cdot \varphi(x_2) \cdot \varphi(x_3) = 5. \qquad ①$$

下面计算 $\varphi(x)$ 当 $x = 2,3,\cdots,7,8$ 时的值.

$$\varphi(2) = 2, \quad \varphi(3) = \frac{3}{2}, \quad \varphi(4) = \frac{4}{3},$$

$$\varphi(5) = \frac{5}{3}, \quad \varphi(6) = \frac{3}{2}, \quad \varphi(7) = \frac{7}{5},$$

$$\varphi(8) = \frac{4}{3}.$$

由
$$\left[\frac{x}{\sqrt[3]{2}}\right] > \frac{x}{\sqrt[3]{2}} - 1,$$

可得
$$\frac{x}{\left[\frac{x}{\sqrt[3]{2}}\right]} < \sqrt[3]{2} + \frac{\sqrt[3]{2}}{\left[\frac{x}{\sqrt[3]{2}}\right]},$$

$$\varphi(x) = \frac{x}{\left[\frac{x}{\sqrt[3]{2}}\right]} < \sqrt[3]{2}\left(1 + \frac{1}{\left[\frac{x}{\sqrt[3]{2}}\right]}\right).$$

由于当 $x \geqslant 8$ 时, $\left[\frac{x}{\sqrt[3]{2}}\right] \geqslant 6,$

则
$$\varphi(x) < 1.26\left(1 + \frac{1}{6}\right) < 1.5 = \frac{3}{2}.$$

由以上可知,函数 $\varphi(x)$ 的最大值为 $\varphi(2) = 2$,其次是 $\varphi(5) = \frac{5}{3}$,其他为 $\varphi(x) \leqslant \frac{3}{2}$.

若 $x_1>2$,则更有 $x_2>2$, $x_3>2$,则由 $\varphi(x)$ 的最大值为 2,次大值为 $\frac{5}{3}$ 可知

$$\varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3)\leqslant\left(\frac{5}{3}\right)^3<5,$$

与 ① 矛盾.

于是 $$x_1=2.$$

此时 $$\varphi(x_2)\cdot\varphi(x_3)=\frac{5}{2}.$$

为满足这个等式只有三种可能:

$$\varphi(x_2)=2,\quad \varphi(x_3)=\frac{5}{4};$$

或 $$\varphi(x_2)=\frac{5}{3},\quad \varphi(x_3)=\frac{3}{2};$$

或 $$\varphi(x_2)=\frac{3}{2},\quad \varphi(x_3)=\frac{5}{3}.$$

由 $$\varphi(x)>\frac{x}{\frac{x}{\sqrt[3]{2}}}=\sqrt[3]{2}>\frac{5}{4},$$

所以不可能有 $\varphi(x_3)=\frac{5}{4}$.

对 $\varphi(x_2)=\frac{5}{3}$, $\varphi(x_3)=\frac{3}{2}$ 由上面所求的函数值可得 $x_2=5$, $x_3=6$.

同样对 $\varphi(x_2)=\frac{3}{2}$, $\varphi(x_3)=\frac{5}{3}$ 可得 $x_2=3$, $x_3=5$.

**12·84** 确定(并加以证明)方程 $a^2+b^2+c^2=a^2b^2$ 所有的整数解.

(第 5 届美国数学奥林匹克,1976 年)

**[解]** 我们可以只考虑非负整数的情形.

(1) 若 $c=0$,则方程化为

$$a^2+b^2=a^2b^2.$$

于是 $a$ 是 $b$ 的倍数,$b$ 也是 $a$ 的倍数,因而有 $a=b$.

这样有 $$a^2+a^2=a^4,$$

解得 $$a=0 \quad 或\ a=\pm\sqrt{2}.$$

由题设要求只能有 $a=0$,从而 $b=0$.

此时 $a=0,\quad b=0,\quad c=0$,经验证这是方程的一组整数解.

(2) 若 $c\neq 0$,此时必有

$$a\neq 0 \text{ 且 } b\neq 0.$$

否则,若 $a=0$,则有 $\qquad b^2+c^2=0,$

从而 $\qquad b=0,\quad c=0.$

同样,若 $b=0$,也可得 $\quad a=0,\quad c=0.$

这都与 $c\neq 0$ 矛盾.

下面对 $c$ 分为奇数和偶数进行分析.

(i) 如果 $c$ 是正奇数,则 $a,b$ 不可能都是偶数,否则若 $a,b$ 都是偶数,则

$$a^2+b^2+c^2\equiv 1 \pmod 4.$$

而 $$a^2b^2\equiv 0 \pmod 4,$$

这是不可能的.

因而 $a,b$ 或同为奇数,或一为奇数一为偶数.

若 $a,b$ 同为奇数,则由 $a,b,c$ 同为奇数,有

$$a^2+b^2+c^2\equiv 3 \pmod 4.$$

而 $$a^2b^2\equiv 1 \pmod 4,$$

这是不可能的.

若 $a,b$ 一为奇数一为偶数,则由 $a,b,c$ 为两个奇数一个偶数可得

$$a^2+b^2+c^2\equiv 2 \pmod 4.$$

而 $$a^2b^2\equiv 0 \pmod 4,$$

这也是不可能的.

所以 $c$ 为正奇数时,方程没有整数解.

(ii) 如果 $c$ 是正偶数,则 $a,b$ 必定都是偶数.

否则,若 $a,b$ 同为奇数,则由 $a,b,c$ 为两个奇数一个偶数可得

$$a^2+b^2+c^2\equiv 2 \pmod 4.$$

而 $$a^2b^2\equiv 1 \pmod 4,$$

这是不可能的.

若 $a,b$ 一为奇数,一为偶数,则由 $a,b,c$ 为两个偶数一个奇数可得

$$a^2+b^2+c^2\equiv 1 \pmod 4,$$

$$a^2b^2\equiv 0 \pmod 4,$$

这也是不可能的.

于是 $a,b,c$ 同为偶数.

设 $$a=2^k a_0,\quad b=2^m b_0,\quad c=2^n c_0.$$
其中 $a_0,b_0,c_0$ 为奇数,$k,m,n$ 为正整数,于是

$$2^{2k}a_0^2+2^{2m}b_0^2+2^{2n}c_0^2=2^{2k+2m}a_0^2b_0^2.$$

显然,不可能有 $m=n=k$,所以 $m,n,k$ 中必有一个最小的.但不管哪一个最小,则两边的式子约去因式 $2^{\min(2k,2m,2n)}$ 之后,左边必有一项是奇数,从而左边不是 4 的倍数,而右边是 4 的倍数.这是不可能的.

所以 $c$ 是正偶数时,方程没有整数解.

综上所证,方程只有一组整数解:$a=b=c=0$.

12·85　证明方程 $x^3+2y^3+4z^3-6xyz=0$ 没有不全为零的整数解.

(基辅数学奥林匹克,1948 年)

[证]　首先指出,若$(x,y,z)$是方程的一组整数解,则对任意的整数 $k$,

$$(kx)^3+2(ky)^3+4(kz)^3-6(kx)(ky)(kz)=0,$$
因而$(kx,ky,kz)$也是方程的解.

因此,只要证明方程

$$x^3+2y^3+4z^3-6xyz=0\qquad①$$
没有互素的整数解即可.

设$(x,y,z)$是方程 ① 的整数解,且 $x,y,z$ 没有大于 1 的公约数.由 ① 可知,$x$ 为偶数.

设 $x=2x_0$,则 ① 代为

$$8x_0^3+2y^3+4z^3-12x_0yz=0,$$
$$4x_0^3+y^3+2z^3-6x_0yz=0.\qquad②$$

于是 $y$ 是偶数,设 $y=2y_0$,则 ② 化为

$$4x_0^3+8y_0^3+2z^3-12x_0y_0z=0,$$
$$2x_0^3+4y_0^3+z^3-6x_0y_0z=0.$$

于是 $z$ 是偶数,设 $z=2z_0$.

这样 $x=2x_0,\quad y=2y_0,\quad z=2z_0$ 是方程的解,且有公约数 2,与假设矛盾.

从而,已知方程没有不同时为零的整数解.

12·86　求不定方程

$$x^4+y^4+z^4=2x^2y^2+2y^2z^2+2z^2x^2+24$$

的所有整数解.

(加拿大数学奥林匹克训练题,1988年)

[解]　原方程可化为

$$(x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(x-y-z)=24.$$

上式左边的四个因式的奇偶性完全相同.

若四个因式全为奇数,则乘积为奇数,不可能等于24.

若四个因式全为偶数,则乘积为16的倍数,而24不是16的倍数.

所以已知方程无整数解.

12·87　确定不定方程

$$x^3+x^2y+xy^2+y^3=8(x^2+xy+y^2+1)$$

的所有整数解.

(卢森堡等五国国际数学竞赛,1980年)

[解]　已知方程可化为

$$(x^2+y^2)(x+y-8)=8xy+8. \qquad ①$$

若 $x$ 和 $y$ 一为奇数,一为偶数,则①的左边为奇数,右边为偶数,这是不可能的.

因此 $x$ 和 $y$ 有相同的奇偶性.

于是 $x+y-8$ 为偶数.

(1) 若 $x+y-8\geqslant 6$,则

$$x^2+y^2\geqslant\frac{(x+y)^2}{2}\geqslant\frac{14^2}{2}>4,$$

$$\begin{aligned}(x^2+y^2)(x+y-8)&\geqslant 6(x^2+y^2)\\&\geqslant 2(x^2+y^2)+8xy\\&>8+8xy.\end{aligned}$$

此时①式不成立,方程无整数解.

(2) 若 $x+y-8\leqslant -4$,则

$$(x^2+y^2)(x+y-8)\leqslant -4(x^2+y^2)\leqslant 8xy<8xy+8.$$

同样①式不成立,方程无整数解.

(3) 若 $x+y-8=4$,则由①得

$$(x-y)^2=2.$$

方程无整数解.

(4) 若 $x+y-8=2$,则由 ① 得

$$x^2+y^2=4xy+4,$$

从而解得

$$\begin{cases}x=8,\\y=2,\end{cases}\quad\begin{cases}x=2,\\y=8.\end{cases}$$

(5) 若 $x+y-8=0$,则有

$$8xy+8=0.$$

显然无整数解.

(6) 若 $x+y-8=-2$,则由 ① 式得

$$x^2+y^2+4xy+4=0.$$

从而有 $x+y=6,\quad xy=-20.$

仍无整数解.

因此已知方程只有两组整数解:

$$(x,y)=(8,2)\text{或}(2,8).$$

12·88　求出所有的正整数 $m,n$,使得 $(m+n)^m=n^m+1413$.

(第 2 届中国东北三省数学邀请赛,1987 年)

[解]　当正整数 $m,n$ 满足 $(m+n)^m=n^m+1413$ 时,由于不等式

$$(m+n)^m\geqslant m^m+n^m,$$

所以必有 $m^m\leqslant 1413.$

由于 $4^4=256,\quad 5^5=3125>1413,$

所以 $m\leqslant 4.$

当 $m$ 为偶数时,若 $n$ 是奇数,则 $(m+n)^m$ 是奇数, $n^m+1413$ 是偶数,这不可能.

若 $n$ 是偶数,则 $(m+n)^m$ 是偶数, $n^m+1413$ 是奇数也不可能.

于是 $m$ 必为奇数.

当 $m=1$ 时,对任何正整数 $n$,不可能有

$$(m+n)^m=n+1=n^m+1413=n+1413.$$

当 $m=3$ 时,则由 $(3+n)^3=n^3+1413$

解得 $n^2+3n-154=0,$

$$n = 11, \quad n = -14(\text{不合题意}).$$

于是,所求的所有的正整数 $m,n$ 为

$$m = 3, \quad n = 11.$$

12·89　试证边长为整数而面积在数值上等于周长的两倍的直角三角形,正好有三个.

(第 26 届美国普特南数学竞赛,1965 年)

[证]　设直角三角形的三边长为 $x,y$ 和 $z$,其中 $z$ 为斜边的长,且 $x,y$ 和 $z$ 为整数.

由题意,有不定方程组

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2, & ① \\ \frac{1}{2}xy = 2(x + y + z). & ② \end{cases}$$

由 ① 可得

$$x = \lambda(p^2 - q^2),$$
$$y = 2\lambda pq,$$
$$z = \lambda(p^2 + q^2).$$

其中 $(p,q) = 1, \quad p \not\equiv q(\bmod 2)$,$\lambda$ 为任意自然数.

将 $x,y,z$ 的值代入 ② 得

$$\lambda^2(p^2 - q^2)pq = 2\lambda(p^2 - q^2 + 2pq + p^2 + q^2).$$

化简可得

$$\lambda(p - q)q = 4.$$

由 $p \not\equiv q(\bmod 2)$ 可得 $p - q$ 是奇数,于是

$$q = 1,2 \text{ 或 } 4.$$

当 $q = 1$ 时, $p = 2$, $\lambda = 4$, $x = 12$, $y = 16$, $z = 20$;

当 $q = 2$ 时, $p = 3$, $\lambda = 2$, $x = 10$, $y = 24$, $z = 26$;

当 $q = 4$ 时, $p = 5$, $\lambda = 1$, $x = 9$, $y = 40$, $z = 41$.

因而正好有三组解.

12·90　求出所有边长为整数,内切圆半径为 1 的三角形.

(第 29 届国际数学奥林匹克候选题,1988 年)

[解]　设三角形的三边满足

$$a \geqslant b \geqslant c, \quad a,b,c \in N.$$

又设 $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$,内切圆半径 $r=1$.

由面积公式得

$$pr=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

即

$$p=(p-a)(p-b)(p-c),$$

$$4(a+b+c)=(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c).\quad ①$$

由 ① 的左边为偶数,则 ① 的右边也为偶数.

再由 $b+c-a$, $c+a-b$, $a+b-c$ 有相同的奇偶性,因此一定都是偶数.

令 $x=\frac{b+c-a}{2}$, $y=\frac{c+a-b}{2}$, $z=\frac{a+b-c}{2}$.

则 $x,y,z$ 均为正整数,且 $x\leqslant y\leqslant z$.

由 ① 式有

$$xyz=x+y+z.\quad ②$$

因为

$$x\leqslant y\leqslant z,$$

所以

$$xyz=x+y+z\leqslant 3z,$$

$$xy\leqslant 3.$$

(1) 若 $xy=3$,则 $xyz=3z$,

于是

$$x=y=z.$$

然而由 $xy=3$ 得 $x=1$, $y=3$,出现矛盾.

(2) 若 $xy=2$,则 $x=1$, $y=2$,代入 ② 得

$$z=3.$$

此时

$$a=5,\quad b=4,\quad c=3.$$

(3) 若 $xy=1$,则 $x=1$, $y=1$,代入 ② 得

$$2+z=z,$$

出现矛盾.

于是只有惟一一组解:$a=5$, $b=4$, $c=3$.

12·91　试求方程 $7^x-3\cdot 2^y=1$ 的所有自然数解.

(第 16 届全俄数学奥林匹克,1990 年)

[解]　已知方程可化为

$$\frac{7^x-1}{7-1}=2^{y-1}.$$

亦即

$$7^{x-1}+7^{x-2}+\cdots+1=2^{y-1}.\quad ①$$

如果 $y=1$,则 $x=1$,从而得到方程的第一组自然数解 $(x,y)=$

$(1,1)$.

设 $y>1$,此时,方程①的右端为偶数,左端是 $x$ 个奇数之和,因而 $x$ 是偶数.

于是方程①可化为

$$7^{x-2}(7+1)+7^{x-4}(7+1)+\cdots+(7+1)=2^{y-1},$$

$$(7+1)(7^{x-2}+7^{x-4}+\cdots+1)=2^{y-1},$$

$$7^{x-2}+7^{x-4}+\cdots+1=2^{y-4}. \quad ②$$

由此可知,应有 $\qquad y\geqslant 4.$

如果 $y=4$,则 $x=2$,从而得到方程的第二组自然数解 $(x,y)=(2,4)$.

如果 $y>4$,则方程②的右边是偶数,而左边是 $\frac{x}{2}$ 个奇数之和,因此,$x$ 应是 4 的倍数.

于是方程②可化为

$$7^{x-4}(7^2+1)+7^{x-8}(7^2+1)+\cdots+(7^2+1)=2^{y-4},$$

$$(7^2+1)(7^{x-4}+7^{x-8}+\cdots+1)=2^{y-4}, \quad ③$$

由③可得 $2^{y-4}$ 能被 $7^2+1=50$ 整除,这是不可能的.

因此,$y>4$ 时,方程无自然数解.

由以上,方程只有两组自然数解:

$$(x,y)=(1,1),(2,4).$$

12·92　求方程 $2^n-1=x^m$ 的所有整数解,其中 $m$ 和 $n$ 为自然数.

(基辅数学奥林匹克,1974年)

**[解]** (1) 当 $n=1$ 时,方程化为 $x^m=1$.

当 $m$ 是偶数时, $\qquad x=\pm 1$,

当 $m$ 是奇数时, $\qquad x=1$.

(2) 当 $m=1$ 时,有 $\qquad x=2^n-1$.

(3) 我们证明当 $n>1$, $m>1$ 时,方程

$$2^n-1=x^m \quad ①$$

没有整数解.

显然,$x^m$ 为奇数,从而 $x$ 为奇数.

当 $x$ 为奇数,$m$ 为偶数时,

数论卷

$$x^m + 1 \equiv 2 \pmod 4,$$
$$2^n \equiv 0 \pmod 4.$$

所以 ① 无整数解.

当 $m$ 为奇数时,若 $x \neq \pm 1$,则

$$x^m + 1 = (x+1)(x^{m-1} - x^{m-2} + \cdots - x + 1).$$

上式右边的第二个因式为奇数,因此 $x^m + 1$ 有奇因数,于是 $x^m + 1$ 不可能等于 $2^n$,即 ① 无整数解.

若 $x = 1$,则 $x^m + 1 = 2$, $n = 1$.

若 $x = -1$,则 $x^m + 1 = 0$,此时 ① 无整数解.

由以上可得,$n = 1$, $m$ 为偶数时,$x = \pm 1$; $n = 1$, $m$ 为奇数时,$x = 1$; $m = 1$ 时,$x = 2^n - 1$.

**12·93** 求方程 $x^{2y} + (x+1)^{2y} = (x+2)^{2y}$ 的正整数解.

(第 21 届莫斯科数学奥林匹克,1958 年)

[解] 当 $y = 1$ 时,已知方程化为

$$x^2 + (x+1)^2 = (x+2)^2,$$

即

$$x^2 - 2x - 3 = 0.$$

解得 $x = 3$, $x = -1$(舍去).

于是 $x = 3, y = 1$ 是已知方程的一组正整数解.

当 $y > 1$ 时,由于 $x$ 与 $x + 2$ 的奇偶性相同,则 $x + 1$ 是偶数,设 $x + 1 = 2k$, $k$ 为正整数.

从而可得

$$(2k-1)^{2y} + (2k)^{2y} = (2k+1)^{2y}. \qquad ①$$

按牛顿二项式展开得

$$(2k)^{2y} = 2[C_{2y}^1(2k)^{2y-1} + C_{2y}^3(2k)^{2y-3} + \cdots + C_{2y}^{2y-1}(2k)].$$

由此不难看出 $y$ 是 $k$ 的倍数.

另一方面,在 ① 的两边同时除以 $(2k)^{2y}$ 可得

$$2 > \left(1 - \frac{1}{2k}\right)^{2y} + 1 = \left(1 + \frac{1}{2k}\right)^{2y} > 1 + \frac{2y}{2k}.$$

于是

$$\frac{2y}{2k} < 1, \quad y < k.$$

由此又得 $y$ 不能被 $k$ 整除.出现矛盾.

所以,$y > 1$ 时,没有整数解.

于是,已知方程有惟一正整数解:$x = 3$, $y = 1$.

12·94　方程 $x^n+(2+x)^n+(2-x)^n=0$ 有有理数解，关于正整数 $n$ 的充分必要条件是什么？

（第 15 届美国普特南数学竞赛，1955 年）

[解]　充分必要条件是 $n=1$.

当 $n=1$ 时，方程

$$x^n+(2+x)^n+(2-x)^n=0. \quad ①$$

显然有有理数解　　　　$x=-4$.

下面证明 $n=1$ 也是必要的.

首先，因为 $x$，$2+x$，$2-x$ 不能同时为 0，故 $n$ 不能是偶数.

当 $n$ 是奇数时，设 $x=\frac{p}{q}$ 是方程①的一个解，其中 $p,q$ 是互素的整数，则由①得

$$p^n+(2q+p)^n+(2q-p)^n=0,$$

$$p^n+2[(2q)^n+C_n^2(2q)^{n-2}p^2+\cdots+C_n^{n-1}(2q)p^{n-1}]=0.$$

因为上式除第一项外，每一项都能被 $2q$ 整除，所以 $p^n$ 也能被 $2q$ 整除，因为 $p$ 和 $q$ 互素，则 $q=\pm 1$.

不妨设 $q=1$，否则同时改变 $p,q$ 的符号，$x$ 的值不变. 由 $p^n$ 能被 $2q=2$ 整除可知 $p$ 是偶数，令 $p=2r$，代入①，得

$$(2r)^n+(2+2r)^n+(2-2r)^n=0,$$

$$r^n+(1+r)^n+(1-r)^n=0. \quad ②$$

当 $n\geqslant 3$ 时，有

$$r^n+2(1+C_n^2r^2+C_n^4r^4+\cdots)=0,$$

$$2=-r^n-2(C_n^2r^2+C_n^4r^4+\cdots),$$

所以 2 能被 $r^2$ 整除，从而 $r=\pm 1$，但 $r=\pm 1$ 时，不满足②，因而 $n\geqslant 3$ 不可能.

所以 $n$ 只可能取值 1.

12·95　求满足下述方程 $x^{2n+1}-y^{2n+1}=xyz+2^{2n+1}$ 的所有正整数解 $(x,y,z,n)$，这里 $n\geqslant 2$，$z\leqslant 5\cdot 2^{2n}$.

（第 6 届中国中学生数学冬令营，1991 年）

[解]　设正整数组 $(x,y,z,n)$ 满足方程

$$x^{2n+1}-y^{2n+1}=xyz+2^{2n+1}. \quad ①$$

显然，$x-y>0$，且 $x$ 与 $y$ 的奇偶性相同.

否则,若 $x$ 与 $y$ 一为奇数,一为偶数,则方程的左边为奇数,右边为偶数.这是不可能的.

于是
$$x-y\geqslant 2.$$

(1) 当 $y=1,\quad x=3$ 时,方程 ① 化为

$$3^{2n+1}-1=3z+2^{2n+1}.$$

$$z=3^{2n}-\frac{1}{3}(1+2^{2n+1}).$$

由于 $z\leqslant 5\cdot 2^{2n}$,可得不等式

$$3^{2n}-\frac{1}{3}(1+2^{2n+1})\leqslant 5\cdot 2^{2n},$$

$$\begin{aligned}3^{2n}&\leqslant 5\cdot 2^{2n}+\frac{1}{3}(1+2^{2n+1})\\&\leqslant 2^{2n}\left[5+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^{2n}}+2\right)\right]\\&\leqslant 6\cdot 2^{2n}.\end{aligned}$$

即
$$\left(\frac{3}{2}\right)^{2n}\leqslant 6,$$

$$n\leqslant\frac{\lg 6}{\lg 9-\lg 4}<3.$$

于是 $n\leqslant 2$,又由已知 $n\geqslant 2$,

所以 $n=2$,此时

$$z=3^4-\frac{1}{3}(1+2^5)=70.$$

经检验 $x=3,\quad y=1,\quad z=70,\quad n=2$ 是方程 ① 的一组解.

(2) 当 $y=1,\quad x\geqslant 4$ 时,方程 ① 化为

$$x^{2n+1}-1=xz+2^{2n+1},$$

$$x(x^{2n}-z)=2^{2n+1}+1, \qquad ②$$

由 $z\leqslant 5\cdot 2^{2n}$ 和 $n\geqslant 2$ 得

$$\begin{aligned}x(x^{2n}-z)&\geqslant 4(4^{2n}-5\cdot 2^{2n})=2^{4n+2}-5\cdot 2^{2n+2}\\&=2^{2n+1}(2^{2n+1}-5\cdot 2)>2^{2n+1}+1, \qquad ③\end{aligned}$$

② 和 ③ 矛盾.

从而,当 $y=1,\quad x\geqslant 4$ 时,方程无解.

(3) 当 $y\geqslant 2$ 时,由于 $x-y\geqslant 2,\quad z\leqslant 5\cdot 2^{2n}$ 和 $n\geqslant 2$,则有

$$x^{2n+1}-xyz$$

$$= x(x^{2n} - yz)$$
$$\geqslant x[(y+2)^{2n} - yz]$$
$$\geqslant x[y^{2n} + 4ny^{2n-1} + 4n(2n-1)y^{2n-2} + \cdots + 2^{2n} - 5 \cdot 2^{2n}y]$$
$$> xy^{2n} + x \cdot 2^{2n} + y[4ny^{2n-2} + 4n(2n-1)y^{2n-3} - 5 \cdot 2^{2n}]$$
$$> y^{2n+1} + 2^{2n+1} + 2^{2n-3}y[8n + 4n(2n-1) - 40]$$
$$\geqslant y^{2n+1} + 2^{2n+1}.$$

即 $$x^{2n+1} - xyz > y^{2n+1} + 2^{2n+1}. \quad ④$$

④ 与 ① 矛盾.

所以,当 $y \geqslant 2$ 时,方程无解.

综上所述,原方程只有惟一一组正整数解:

$$(x,y,z,n) = (3,1,70,2).$$

12·96　求方程

$$|p^r - q^s| = 1 \quad ①$$

的整数解.其中 $p,q$ 为素数,$r,s$ 是大于1的正整数,并证明你所得到的解是全部解.

（第 37 届美国普特南数学竞赛,1976 年）

**[解]**　由 $p,q,r,s$ 的对称性,不妨设 $p^r > q^s$,即不妨只考虑方程

$$p^r - q^s = 1 \quad ②$$

的整数解.

显然,$p$ 和 $q$ 不能全为奇素数,否则 $p^r - q^s$ 是偶数,不满足方程②.

于是 $p$ 和 $q$ 中必有一个等于 2.

(1) $p = 2$ 时,

如果 $s = 2s'$ 是偶数,设奇数 $q = 2q' + 1$,则

$$q^s + 1 = (2q'+1)^{2s'} + 1 \equiv 2 \pmod 4$$

不能被 4 整除,而 $$q^s + 1 = p^r = 2^r,$$

当 $r > 1$ 时, $$2^r \equiv 0 \pmod 4,$$

所以 $s$ 不能是偶数,即 $s$ 只能是奇数.

由 $s > 1$ 可得 $s \geqslant 3$.

$$p^r = 2^r = q^s + 1$$
$$= (q+1)(q^{s-1} - q^{s-2} + \cdots - q + 1).$$

所以 $q+1$ 只含素因子 2,设

$$q + 1 = 2^t \quad (t \geqslant 2),$$

数论卷

$$2^r = q^s + 1 = (2^t - 1)^s + 1$$
$$= -1 + 2^t s - C_s^2(2^t)^2 + \cdots + 1$$
$$= 2^t(s - C_s^2 2^t + \cdots).$$

由于 $s - C_s^2 2^t + \cdots$ 与 $s$ 有相同的奇偶性.由 $s$ 是奇数,可知 $s - C_s^2 2^t + \cdots$ 是奇数,故只能为 1,于是 $t = r$.

从而方程化为 $$2^r = (2^r - 1)^s + 1.$$

于是 $s = 1$,与 $s > 1$ 矛盾.

所以 $p = 2$ 时,方程 ② 无解.

(2)$q = 2$ 时,则由 ② 得

$$2^s = p^r - 1 = (p-1)(p^{r-1} + p^{r-2} + \cdots + 1).$$

若 $r > 1$ 是奇数,则

$$p^{r-1} + p^{r-2} + \cdots + 1 > 1$$

是 $r$ 个奇数的和,故是奇数,这是不可能的.所以 $r$ 是偶数.

设 $r = 2r_1$,则

$$2^s = p^r - 1 = p^{2r_1} - 1 = (p^{r_1} - 1)(p^{r_1} + 1).$$

此时,$p^{r_1} - 1$ 和 $p^{r_1} + 1$ 是两个相邻的偶数,它们都是 2 的正整数次幂,则必有

$$\begin{cases} p^{r_1} - 1 = 2, \\ p^{r_1} + 1 = 4. \end{cases}$$

因此 $$p = 3, \quad r_1 = 1.$$

此时 $$r = 2, \quad s = 3.$$

于是得到解

$$p = 3, \quad q = 2, \quad r = 2, \quad s = 3.$$

考虑到对称性,方程 ① 有两组解

$$p = 3, \quad q = 2, \quad r = 2, \quad s = 3.$$

和 $$p = 2, \quad q = 3, \quad r = 3, \quad s = 2.$$

12·97　证明方程 $19x^3 - 17y^3 = 50$ 没有整数解.

(第 30 届莫斯科数学奥林匹克,1967 年)

[证]　已知方程可化为

$$18x^3 - 18y^3 + x^3 + y^3 = 50.$$

考虑以 9 为模,则

$$x^3\equiv 0,1,8\pmod 9.$$

于是方程左边有

$$19x^3-17y^3\equiv x^3+y^3.$$

$$\equiv 0,1,2,7,8\pmod 9.$$

而方程右边有

$$50\equiv 5\pmod 9.$$

因此方程没有整数解.

**12·98** 证明任何四个自然数 $x,y,z,t$ 都不能满足等式 $3x^4+5y^4+7z^4=11t^4$. ①

（第 51 届莫斯科数学奥林匹克，1988 年）

**[证]** 假设自然数 $x,y,z,t$ 满足等式 ①.

(1) 若 $t$ 为奇数，则有

$$11t^4\equiv 3\pmod 8,$$

则 ① 式左边应为两个字母为偶数，一个字母为奇数.

若 $x$ 和 $y$ 为偶数，$z$ 为奇数，则

$$3x^4+5y^4+7z^4\equiv 7\pmod 8.$$

若 $x$ 和 $z$ 为偶数，$y$ 为奇数，则

$$3x^4+5y^4+7z^4\equiv 5\pmod 8.$$

若 $x$ 为奇数，$y$ 和 $z$ 为偶数，则

$$3x^4+5y^4+7z^4\equiv 3\pmod 8.$$

由此可知，$y$ 和 $z$ 为偶数，$x$ 为奇数.

将 ① 式化为

$$5y^4+7z^4=3(t^4-x^4)+8t^4. \quad ②$$

考察 $t^4-x^4=(t+x)(t-x)(t^2+x^2)$.

若奇数 $t$ 和 $x$ 对模 4 同余，则 $t-x$ 能被 4 整除，此时 $t+x$，$t^2+x^2$ 均能被 2 整除，于是 $t^4-x^4$ 能被 16 整除.

若奇数 $t$ 和 $x$ 对模 4 不同余，即余数为 1 和 3，则 $t+x$ 能被 4 整除，同样有 $t^4-x^4$ 能被 16 整除.

由 $y$ 和 $z$ 是偶数，则 ② 式左边

$$5y^4+7z^4\equiv 0\pmod{16}.$$

而 ② 式右边

$$3(t^4-x^4)+8t^4\equiv 8\pmod{16}.$$

于是 ② 式不可能成立.

从而,$t$ 为奇数时,不满足等式 ①.

(2) 若 $t$ 为偶数,且 $x,y,z$ 中二奇一偶.

若 $x$ 为偶数,$y$ 和 $z$ 为奇数,则

$$3x^4+5y^4+7z^4\equiv 4 \pmod 8,$$

$$11t^4\equiv 0 \pmod 8.$$

若 $y$ 为偶数,$x$ 和 $z$ 为奇数,则

$$3x^4+5y^4+7z^4\equiv 2 \pmod 8.$$

若 $z$ 为偶数,$x$ 和 $y$ 为奇数,则考察模 16.

$$3x^4+5y^4\equiv 8 \pmod{16},$$

$$11t^4-7z^4\equiv 0 \pmod{16}.$$

从而,$t$ 为奇数,$x,y,z$ 为二奇一偶时,不满足等式 ①.

(3) 若 $t$ 为偶数,$x,y,z$ 均为偶数时,只要在 ① 式两边同除以 2 的适当的幂即可化为(1),(2).

由以上,不存在自然数 $x,y,z,t$ 满足 ①.

12·99　求出满足 $|12^m-5^n|=7$ 的全部正整数 $m,n$.

(加拿大数学奥林匹克训练题,1989 年)

[解]　若 $5^n-12^m=7$.

由于

$$5^n\equiv 1 \pmod 4,$$

$$12^m\equiv 0 \pmod 4,$$

$$7\equiv 3 \pmod 4,$$

则

$$5^n-12^m\equiv 1 \pmod 4.$$

从而 $5^n-12^m=7$ 不可能成立.

若

$$12^m-5^n=7,$$

显然 $m=1,\quad n=1$ 是它的一组解.

又若 $m>1$,则必有 $n>1$,反之由 $n>1$,则必有 $m>1$.

当 $m>1,\quad n>1$ 时,

考虑模 3.

有

$$12^m-5^n\equiv(-1)^{n+1} \pmod 3.$$

又

$$7\equiv 1 \pmod 3,$$

所以为使 $12^m-5^n=7$ 成立,应有

$$(-1)^{n+1}\equiv 1 \pmod 3.$$

因而 $n$ 为奇数，则有

$$12^m-5^n\equiv-5 \quad (\bmod 8),$$

而 $$7\equiv-1(\bmod 8).$$

于是有 $$-5\equiv-1(\bmod 8).$$

这是不可能的.

从而 $12^m-5^n=7$ 没有大于 1 的正整数解 $m$ 和 $n$.

从而本题有 $m=1,\quad n=1$ 惟一的解.

12·100 证明方程 $6(6a^2+3b^2+c^2)=5n^2$ 除去 $a=b=c=n=0$ 之外，没有整数解.

（亚洲太平洋地区数学竞赛，1989 年）

［证］ 不妨设非零解 $a,b,c,n$ 的最大公约数 $(a,b,c,n)=1$. 方程

$$6(6a^2+3b^2+c^2)=5n^2, \qquad ①$$

由 $(6,5)=1$ 可得 $$6\mid n^2,$$

从而 $$6\mid n.$$

进而又有 $$6^2\mid 6(6a^2+3b^2+c^2),$$

$$6\mid 6a^2+3b^2+c^2.$$

于是 $$3\mid c.$$

令 $n=6m,c=3d$，其中 $m$ 和 $d$ 都是整数，则方程 ① 可化为

$$6(6a^2+3b^2+9d^2)=5\cdot 6^2m^2,$$

即 $$2a^2+b^2+3d^2=10m^2. \qquad ②$$

由于 $$m^2\equiv 0,1,4 \quad (\bmod 8),$$

则 $$10m^2\equiv 0,2 \quad (\bmod 8). \qquad ③$$

又由 ②，$b^2+3d^2$ 一定为偶数，则 $b$ 和 $d$ 的奇偶性相同.

由于 $$2a^2\equiv 0,2 \quad (\bmod 8),$$

则当 $b$ 和 $d$ 都为奇数时，

$$2a^2+b^2+3d^2\equiv 2+1+3\equiv 6 \quad (\bmod 8),$$

或 $$2a^2+b^2+3d^2\equiv 0+1+3\equiv 4 \quad (\bmod 8). \qquad ④$$

③ 和 ④ 矛盾，所以 $b$ 和 $d$ 都为偶数.

由于 $b,d,n$ 均为偶数，且 $(a,b,c,n)=1$，则 $a$ 为奇数，此时

$$2a^2+b^2+3d^2\equiv 2,6 \quad (\bmod 8).$$

于是由 ③ 知，$m$ 是奇数.

令 $b=2b_1$, $d=2d_1$,则 ② 化为

$$a^2+2b_1^2+6d_1^2=5m^2.$$

$$b_1^2+3d_1^2=\frac{5m^2-a^2}{2}.$$

因为 $a$ 和 $m$ 是奇数,则

$$5m^2-a^2\equiv 5-1=4 \pmod 8,$$

$$\frac{5m^2-a^2}{2}\equiv 2 \pmod 4.$$

于是 $$b_1^2+3d_1^2\equiv 2 \pmod 4. \quad ⑤$$

然而 $$b_1^2\equiv 0,1 \pmod 4,$$

$$3d_1^2\equiv 0,3 \pmod 4,$$

则 $$b_1^2+3d_1^2\equiv 0,1,3 \pmod 4. \quad ⑥$$

⑤ 和 ⑥ 矛盾.

因此,方程 ① 仅有 $a=b=c=n=0$ 一组解.

12·101 证明不存在不同时为零的整数 $x,y,z$,使得

$$2x^4+y^4=7z^4.$$

(基辅数学奥林匹克,1962 年)

[证] 首先可以看出,$y$ 与 $z$ 具有相同的奇偶性.

若 $y$ 与 $z$ 同为奇数,$x$ 为奇数,则由

$$2x^4\equiv 2 \pmod 8,$$

$$y^4\equiv 1 \pmod 8,$$

$$7z^4\equiv 7 \pmod 8.$$

显然方程此时无解.

若 $y$ 与 $z$ 同为奇数,$x$ 为偶数,则由

$$2x^4\equiv 0 \pmod 8,$$

$$y^4\equiv 1 \pmod 8,$$

$$7z^4\equiv 7 \pmod 8.$$

此时方程也无解.

若 $y$ 和 $z$ 同为偶数,并设 $y>0$, $z>0$,设 $y=2y_1$, $z=2z_1$,则

$$2x^4+16y_1^4=7\cdot 16z_1^4,$$

$$x^4+8y_1^4=7\cdot 8z_1^4.$$

于是 $x$ 也是偶数,设 $x=2x_1$,则

$$16x_1^4+8y_1^4=7\cdot 8z_1^4,$$

$$2x_1^4+y_1^4=7z_1^4.$$

于是 $x_1,y_1,z_1$ 也为方程的解,显然 $y_1$ 和 $z_1$ 同为偶数,由此又推得 $x_1$ 是偶数,进而设

$$x_1=2x_2,\quad y_1=2y_2,\quad z_1=2z_2,$$

代入原方程得 $$2x_2^4+y_2^4=7z_2^4.$$

于是 $x_2,y_2,z_2$ 也为方程的解,并且 $x_2,y_2,z_2$ 也是偶数.

由此继续下去,因为

$$x>x_1>x_2>x_3>\cdots>0,$$

$$y>y_1>y_2>y_3>\cdots>0,$$

$$z>z_1>z_2>z_3>\cdots>0,$$

则必有一个时刻,使得 $y_k$ 或 $z_k$ 为奇数,这时,方程显然无解.

由以上,已知方程没有不同时为零的整数解 $x,y,z$.

12·102　求出满足方程 $3\cdot 2^x+1=y^2$ 的所有整数对$(x,y)$.

(第 41 届莫斯科数学奥林匹克,1978 年)

[解]　当 $x=0$ 时,

$$y^2=4,\quad y=\pm 2.$$

若$(x,y)$是已知方程的解,则$(x,-y)$也是方程的解,又当 $x<0$ 时,已知方程无整数解,因此只需考虑已知方程的正整数解.

设 $y=2u+1$,$u$ 是非负整数,则有

$$3\cdot 2^x=4u^2+4u,$$

$$3\cdot 2^{x-2}=u(u+1).$$

由于$(u,\ u+1)=1$,且 $u$ 与 $u+1$ 两数中一为奇数,一为偶数,则必有

$$\text{I}\begin{cases}u=3,\\u+1=2^{x-2},\end{cases}\qquad \text{II}\begin{cases}u=2^{x-2},\\u+1=3.\end{cases}$$

由 I 得 $x=4,\quad y=7$,由 II 得 $x=3,\quad y=5$,

于是已知方程有解$(4,7)$,$(4,-7)$,$(3,5)$,$(3,-5)$和$(0,2)$,$(0,-2)$共六组.

数论卷

12·103　求方程 $2^x+3^y=5^z$ 的自然数解.

(全苏数学冬令营,1991 年)

[解]　$x=1,\quad y=1,\quad z=1$ 显然是它的解.

当 $x=1,\quad y\geqslant 2$ 时,

$$2^x+3^y\equiv 2 \pmod 9,$$

所以
$$5^z\equiv 2 \pmod 9.$$

由于
$$5^5=3125\equiv 2 \pmod 9,$$
$$5^6=15625\equiv 1 \pmod 9,$$

于是
$$5^{6k+5}\equiv 2 \pmod 9,$$

即
$$z=6k+5.$$

所以
$$3^y=5^{6k+5}-2\equiv 1 \pmod 7.$$

于是
$$6\mid y.$$

由此得

$$2=5^z-3^y\equiv 0 \pmod 4.$$

这是不可能的.

当 $x=2$ 时,则

$$3^y=5^z-4\equiv 1 \pmod 4.$$

所以 $y$ 是偶数,设 $y=2y_1$,故

$$5^z=4+3^y\equiv 4 \pmod 9.$$

由此可得
$$z=6k+4,$$

因此
$$4=5^z-3^y=5^{6k+4}-9^{y_1}\equiv 0 \pmod 8.$$

这也是不可能的,所以 $x=2$ 时,方程无自然数解.

当 $x\geqslant 3$ 时,由

$$3^y=5^z-2^x\equiv 1 \pmod 4,$$

知 $y=2y_1$ 是偶数,于是

$$5^z=2^x+9^{y_1}\equiv 1 \pmod 8,$$

知 $z=2z_1$ 是偶数,所以

$$2^x=(5^{z_1}+3^{y_1})(5^{z_1}-3^{y_1}).$$

可设
$$5^{z_1}+3^{y_1}=2^{x_1},$$
$$5^{z_1}-3^{y_1}=2^{x_2}.$$

其中 $x_1>x_2\geqslant 0,\quad x_1+x_2=x$. 消去 $5^{z_1}$,得

$$3^{y_1}=2^{x_1-1}-2^{x_2-1}.$$

由此得 $$x_2 = 1,$$

$$3^{y_1} = 2^{x-2} - 1 \equiv 0 \pmod 3.$$

所以 $x - 2 = 2x_3$ 为偶数，

$$3^{y_1} = (2^{x_3} + 1)(2^{x_3} - 1).$$

又可设 $$2^{x_3} + 1 = 3^{y_2},$$

$$2^{x_3} - 1 = 3^{y_3},$$

则 $$3^{y_2} - 3^{y_3} = 2,$$

于是 $$y_2 = 1, \quad y_3 = 0.$$

进而 $x_3 = 1, \quad x = 4, \quad y = 2, \quad z = 2.$

综上，有两组自然数解(1,1,1),(4,2,2).

**12·104** 求方程 $3^x + 4^y = 5^z$ 的所有正整数解 $x,y,z$.

（第32届国际数学奥林匹克预选题，1991年）

**[解]** 显然 $x = y = z = 2$ 是方程的正整数解.

下面我们证明方程

$$3^x + 4^y = 5^z \qquad ①$$

除去 $x = y = z = 2$ 之外，没有其他正整数解.

设正整数 $x,y,z$ 满足方程 ①，则

$$5^z \equiv 1 \pmod 3.$$

由 $5^z = (3+2)^z$，则

$$2^z \equiv 1 \pmod 3.$$

于是 $z$ 为偶数. 令 $z = 2z_1$，则 ① 化为

$$5^{2z_1} - 2^{2y} = 3^x,$$

$$(5^{z_1} + 2^y)(5^{z_1} - 2^y) = 3^x.$$

由此可得

$$\begin{cases} 5^{z_1} + 2^y = 3^x, & ② \\ 5^{z_1} - 2^y = 1. & ③ \end{cases}$$

由 $5 = 6 - 1, \quad 2 = 3 - 1$ 可得

$$\begin{cases} (-1)^{z_1} + (-1)^y \equiv 0 \pmod 3, \\ (-1)^{z_1} - (-1)^y \equiv 1 \pmod 3. \end{cases}$$

于是，$z_1$ 为奇数，$y$ 为偶数，令 $y = 2y_1$，

再由 ② 得

$$(4+1)^{z_1}+4^{y_1}=(4-1)^x,$$

$$1\equiv(-1)^x \pmod 4.$$

所以 $x$ 也是偶数.

如果 $y>2$,则由 ② 得

$$5\equiv 1 \pmod 8,$$

这是不可能的.

所以,只能有 $y=2$.

再由 ③ 得 $5^{z_1}=1+2^2=5$,

于是 $z_1=1,\quad z=2$.

从而由 ② $x=2$.

于是 $x=y=z=2$ 是 ① 的仅有的正整数解.

12·105　求出满足方程 $8^x+15^y=17^z$ 的正整数解 $(x,y,z)$.

(加拿大数学奥林匹克训练题,1992 年)

[解]　考虑 $8^x,15^y,17^z$ 被 4 除的余数,

对所有 $x$, $8^x\equiv 0 \pmod 4$.

对所有 $z$, $17^z\equiv 1 \pmod 4$.

于是由已知方程可知

$$15^y\equiv 1 \pmod 4.$$

从而 $y$ 必定为偶数.

再考虑 $8^x,15^y,17^z$ 被 7 除的余数.

对所有 $x$, $8^x\equiv 1 \pmod 7$.

对所有 $y$, $15^y\equiv 1 \pmod 7$.

于是由已知方程得

$$17^z\equiv 2 \pmod 7.$$

从而 $z$ 必定为偶数.

考虑 $8^x,15^y,17^z$ 被 3 除的余数,

对所有 $y$, $15^y\equiv 0 \pmod 3$.

对偶数 $z$, $17^z\equiv 1 \pmod 3$.

于是由已知方程得

$$8^x\equiv 1 \pmod 3.$$

从而 $x$ 亦为偶数.

因此,$x,y,z$ 均为偶数.

令 $x=2k,\quad y=2m,\quad z=2n$,则有

$$2^{6k}=(17^n-15^m)(17^n+15^m).$$

从而有

$$17^n-15^m=2^t, \tag{1}$$

$$17^n+15^m=2^{6k-t}. \tag{2}$$

由 $t<6k-t$ 得

$$1\leqslant t<3k. \tag{3}$$

① + ② 得

$$2\cdot 17^n=2^t(2^{6k-2t}+1). \tag{4}$$

由 ③ 可知 $\qquad 6k-2t>0$,

所以 $2^{6k-2t}+1$ 为奇数.

因此由 ④ 式得 $\qquad t=1.$

由 ① 有

$$17^n-15^m=2. \tag{5}$$

考虑 $17^n,15^m$ 被 9 除的余数,

当 $m\geqslant 2$ 时,

$$15^m\equiv 0 \pmod 9,$$

当 $n$ 为奇数时, $\qquad 17^n\equiv 8 \pmod 9,$

当 $n$ 为偶数时, $\qquad 17^n\equiv 1 \pmod 9.$

所以当 $m\geqslant 2$ 时,⑤ 式不成立.

因此仅当 $m=1,\quad n=1$ 时,⑤ 有解.

此时由 ② 知 $k=1$.

于是已知方程有惟一一组解:

$$(x,y,z)=(2,2,2).$$

12·106 解方程 $28^x=19^y+87^z$,这里 $x,y,z$ 为整数.

(第 28 届国际数学奥林匹克候选题,1987 年)

**[解]** 如果 $x,y$ 和 $z$ 中有负整数,则易知 $x,y,z$ 都是负整数,用 $28^{-x},19^{-y}$ 和 $87^{-z}$ 的最小公倍数乘方程

$$28^x=19^y+87^z \tag{1}$$

的两边,由于 $3\mid 87$,则左边所得的整数能被 3 整除,而右边的第二项不能被 3 整除,第一项能被 3 整除,方程 ① 不成立.

所以若方程 ① 有解,则 $x,y$ 和 $z$ 都需是非负整数,并且显然有

$$x>z\geqslant 0.$$

考虑方程 ① 的两边以 4 为模的余数,则

$$0 \equiv (-1)^y + (-1)^z \pmod 4.$$

所以 $y$ 和 $z$ 的奇偶性不同.

考虑方程 ① 的两边以 29 为模的余数,则

$$\pm 1 = (-1)^x \equiv 19^y \pmod{29}.$$

于是 $14 \mid y$,从而 $y$ 是偶数,$z$ 是奇数.

若 $y = 0$,则

$$\begin{aligned} 28^x &= 1 + 87^z \\ &= 88(87^{z-1} + 87^{z-2} + \cdots + 1). \end{aligned}$$

此式右端被 11 整除,而左端不能被 11 整除,所以 $y \neq 0$,即 $y$ 是正偶数.

由 ① 又有 $$1^x \equiv 1^y + 87^z \pmod 9,$$

即 $$87^z \equiv 0 \pmod 9,$$

所以 $z \geqslant 2$,又 $z$ 是奇数,则 $z \geqslant 3$.

仍由 ① $$1^x \equiv 19^y \pmod{27},$$

于是 $3 \mid y$,由 $y$ 是正偶数,则 $6 \mid y$.

从而 $$19^y \equiv 1 \pmod 7.$$

由 ① 得 $$0 \equiv 1 + 87^z \pmod 7,$$

即 $$3^z \equiv -1 \pmod 7.$$

则 $$3 \mid z.$$

再由 $$11^3 \equiv 1 \pmod{19},$$

则由 ① 得

$$9^x \equiv 87^z \equiv 11^z \equiv 1 \pmod{19},$$

从而有 $$9 \mid x.$$

由以上,$x$,$y$ 和 $z$ 均是 3 的倍数,且为正整数,则方程 ① 可化为

$$(28^{\frac{x}{3}})^3 + (19^{\frac{y}{3}})^3 = (87^{\frac{z}{3}})^3.$$

设 $x_1 = 28^{\frac{x}{3}}$, $y_1 = 19^{\frac{y}{3}}$, $z_1 = 87^{\frac{z}{3}}$,则 $x_1$,$y_1$ 和 $z_1$ 都是正整数,且方程化为

$$x_1^3 + y_1^3 = z_1^3.$$

由于当 $n = 3$ 时,费马大定理成立,故此方程无正整数解.

于是方程 ① 无整数解.

12·107 试求方程 $19x^3 - 84y^2 = 1984$ 的整数解.

(第 47 届莫斯科数学奥林匹克,1984 年)

［解］　已知方程可化为

$$19(x^3-100)=84(1+y^2).$$

由于 $84=7\cdot 12$，且 $(19,7)=1$，则 $7\mid x^3-100$，即

$$7\mid x^3-98-2,$$

$$7\mid x^3-2. \qquad ①$$

令 $x=7k+r,\quad r\in\{0,1,2,\cdots,6\}$．则

$$x^3=7^3k^3+3\cdot 7^2k^2r+3\cdot 7kr^2+r^3,$$

因而

$$x^3\equiv r^3\pmod 7.$$

又

$$r^3\equiv 0,1,6\pmod 7,$$

从而

$$x^3-2\equiv 5,6,4\pmod 7.$$

即 $x^3-2$ 不能被7整除，与①矛盾．因此，方程 $19x^3-84y^2=1984$ 没有整数解．

12·108　证明方程 $x^2+3xy-2y^2=122$ 没有整数解．

（第14届美国普特南数学竞赛，1954年）

［证］　已知方程可化为

$$4x^2+12xy-8y^2=488,$$

$$(2x+3y)^2-17y^2=488. \qquad ①$$

令 $u=2x+3y$，则由①式有

$$u^2\equiv 12\pmod{17}. \qquad ②$$

设 $u=17k+r,\quad r\in\{0,1,2,\cdots,16\}$，则 $u^2$ 除以17的余数依次为

$$0,1,4,9,16,8,2,15,13,13,15,2,8,16,9,4,1.$$

因而②式不成立．

于是原方程没有整数解．

12·109　是否有整数 $m$ 和 $n$ 使得 $5m^2-6mn+7n^2=1985$．

（第26届国际数学奥林匹克候选题，1985年）

［解］　已知方程可化为

$$25m^2-30mn+35n^2=5\cdot 1985,$$

$$(5m-3n)^2+26n^2=5\cdot 1985,$$

$$(5m-3n)^2=-26n^2+5\cdot 1985$$

$$\equiv 6\pmod{13}. \qquad ①$$

注意到,对于

$$x \equiv 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6 \pmod{13},$$

$$x^2 \equiv 0,1,4,9,3,12,10 \pmod{13}.$$

于是对平方数$(5m-3n)^2$,

$$(5m-3n)^2 \not\equiv 6 \pmod{13}. \qquad ②$$

由 ① 与 ② 的矛盾可知,已知方程没有整数解 $m$ 和 $n$.

12·110　证明不存在不同时为零,且满足方程 $x^2+y^2=3z^2$ 的整数 $x,y,z$.

(基辅数学奥林匹克,1962 年)

[证]　首先证明若方程

$$x^2+y^2=3z^2 \qquad ①$$

有整数解$(x,y,z)\neq(0,0,0)$,那么它有 $x$ 和 $y$ 互素的解.

假设$(x,y,z)$是 ① 的整数解,且 $x$ 和 $y$ 不互素,并设$(x,y)=d$,则

$$x=dx_1,\quad y=dy_1.$$

且$(x_1,y_1)=1$,这时 ① 化为

$$(dx_1)^2+(dy_1)^2=3z^2,$$

$$d^2(x_1^2+y_1^2)=3z^2.$$

由此得 $3z^2$ 能被 $d^2$ 整除,又由于 3 是素数,可得 $z^2$ 能被 $d^2$ 整除,所以 $z$ 能被 $d$ 整除.设 $z=dz_1$,于是

$$d^2(x_1^2+y_1^2)=3d^2z_1^2,$$

$$x_1^2+y_1^2=3z_1^2.$$

因此$(x_1,y_1,z_1)$也是方程 ① 的整数解,且 $x_1$ 和 $y_1$ 互素.

因此,只要证明方程 ① 没有 $x$ 和 $y$ 互素的整数解即可.

若 $x$ 和 $y$ 互素,则 $x$ 和 $y$ 不能同时被 3 整除.

如果 $x$ 和 $y$ 都不能被 3 整除,则

$$x^2+y^2\equiv 2 \pmod 3.$$

于是方程 ① 没有整数解.

如果 $x$ 和 $y$ 一个能被 3 整除,一个不能被 3 整除.则

$$x^2+y^2\equiv 1 \pmod 3.$$

此时,方程 ① 也没有整数解.

于是,已知方程没有不同时为零的整数解.

12·111　已知整数 $m,n$ 满足 $m,n\in\{1,2,\cdots,1981\}$ 及

$$(n^2-mn-m^2)^2=1. \qquad ①$$

求 $m^2+n^2$ 的最大值.

（第 22 届国际数学奥林匹克,1981 年）

[解]　若 $m=n$,由 ① 可得 $(mn)^2=1$,又由 $m,n\in\{1,2,\cdots,1981\}$,所以 $m=n=1$.

若 $m\neq n$,并约定 $n>m$.

令 $n=m+u_k$,于是由 ① 式有

$$[(m+u_k)^2-m(m+u_k)-m^2]^2=1,$$

即

$$(m^2-u_km-u_k^2)^2=1.$$

再令 $m=u_k+u_{k-1}$,同样有

$$(u_k^2-u_{k-1}u_k-u_{k-1}^2)^2=1.$$

如果 $u_k\neq u_{k-1}$,则以上步骤可继续下去,直至

$$(u_{k-i-1}^2-u_{k-i}u_{k-i-1}-u_{k-i}^2)^2=1,$$

且

$$u_{k-i}=u_{k-i-1}=1.$$

这样就得到数列

$$n,\ m,\ u_k,\ u_{k-1},\ \cdots,\ u_{k-i}(=1),\quad u_{k-i-1}(=1).$$

此数列任意相邻两项均满足方程①,并且满足 $u_j=u_{j-1}+u_{j-2}$,这恰好是裴波那契数列.

容易求出,集合 $\{1,2,\cdots,1981\}$ 中的裴波那契数为

1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,

89,144,233,377,610,987,1597.

由此可知,当 $m=987$,　$n=1597$ 时,$m^2+n^2$ 的值最大,最大值为 $987^2+1597^2=3524578$.

12·112　设 $a$ 是给定的正整数,$A$ 和 $B$ 是两个实数.试确定方程组

$$x^2+y^2+z^2=(13a)^2,$$

$$x^2(Ax^2+By^2)+y^2(Ay^2+Bz^2)+z^2(Az^2+Bx^2)$$
$$=\frac{1}{4}(2A+B)(13a)^4$$

有正整数解的充分必要条件(用 $A,B$ 的关系式表示,并予以证明).

（第 5 届中国中学生数学冬令营,1990 年）

[解]　第一个方程平方得

$$x^4+y^4+z^4+2x^2y^2+2y^2z^2+2z^2x^2=(13a)^4,$$

乘以$\frac{1}{2}B$得

$$\frac{1}{2}B(x^4+y^4+z^4)+B(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)=\frac{1}{2}B(13a)^4, \text{①}$$

① 式与第二个方程相减得

$$(A-\frac{1}{2}B)(x^4+y^4+z^4)=\frac{1}{2}(A-\frac{1}{2}B)(13a)^4. \quad \text{②}$$

下面分两种情况讨论.

(1) 当 $A\neq\frac{1}{2}B$ 时,

$$A-\frac{1}{2}B\neq 0.$$

则方程 ② 等价于

$$2(x^4+y^4+z^4)=(13a)^4. \quad \text{③}$$

设原方程组有正整数解$(x,y,z)$,则正整数 $x,y,z$ 必定满足方程③.

显然,$a$ 必为偶数.

设 $a=2a_1$,则方程 ③ 等价于

$$x^4+y^4+z^4=8(13a_1)^4. \quad \text{④}$$

由方程 ④ 可知,$x,y,z$ 必定全为偶数. 否则,如果 $x,y,z$ 都为奇数,或者一个为奇数,两个为偶数,则方程 ④ 的左边为奇数,右边为偶数;如果两个为奇数,一个为偶数,则方程 ④ 的左边为 $8k+2$ 型的数,右边为 $8k$ 型的数,这都不可能.

设　　$x=2x_1,\quad y=2y_1,\quad z=2z_1.$

则方程 ④ 等价于

$$2(x_1^4+y_1^4+z_1^4)=(13a_1)^4.$$

显然,$a_1$ 必为偶数.

设 $a_1=2a_2$,利用类似的推理可知:$x_1,y_1,z_1$ 也都是偶数.

设　$x_1=2x_2,\quad y_1=2y_2,\quad z_1=2z_2$,则有

$$2(x_2^4+y_2^4+z_2^4)=(13a_2)^4.$$

由于 $a$ 为给定的正整数,所以上述推理过程经过有限次可得到整

数 $x_k, y_k, z_k$，且满足

$$2(x_k^4 + y_k^4 + z_k^4) = 13^4.$$

这显然是不可能的.

从而当 $A \neq \frac{1}{2}B$ 时，原方程没有正整数解.

(2) 当 $A = \frac{1}{2}B$ 时，

若 $A = B = 0$，则第二个方程为恒等式.

若 $B \neq 0$，则 $A \neq 0$，于是第二个方程即为

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = (13a)^4,$$

即

$$x^2 + y^2 + z^2 = (13a)^2.$$

这就是说，无论何种情况，如果 $(x, y, z)$ 满足第一个方程也必定满足第二个方程，从而方程组显然有解

$$x = 3a, \quad y = 4a, \quad z = 12a.$$

于是方程组有正整数解的充分必要条件是

$$A = \frac{1}{2}B.$$

12·113　已知正整数 $a$ 和 $b$ 使得 $ab + 1$ 整除 $a^2 + b^2$，求证 $\frac{a^2 + b^2}{ab + 1}$ 是某个正整数的平方.

（第 29 届国际数学奥林匹克，1988 年）

**[证 1]**　当 $a = b$ 时，有正整数 $q$，使得

$$\frac{2a^2}{a^2 + 1} = q.$$

$$(2 - q)a^2 = q.$$

显然，$q = 1 = 1^2$，此时结论成立.

由对称性，不妨设 $a > b$.

设 $s$ 与 $t$ 是满足下列条件的整数：

$$\begin{cases} a = bs - t, \\ s \geqslant 2, 0 \leqslant t < b. \end{cases} \quad ①$$

将①代入 $\frac{a^2 + b^2}{ab + 1}$ 得

$$\frac{a^2 + b^2}{ab + 1} = \frac{b^2 s^2 - 2bst + t^2 + b^2}{b^2 s - bt + 1}.$$

考察这个数与 $s-1$ 的差

$$\frac{b^2s^2-2bst+t^2+b^2}{b^2s-bt+1}-(s-1)$$

$$=\frac{b^2s-bst+b^2+t^2-s-bt+1}{b(bs-t)+1}.$$

$$=\frac{s(b^2-bt-1)+b(b-t)+t^2+1}{b(bs-t)+1}. \quad ②$$

因为 $t<b$,所以 $b-t\geqslant 1$,从而

$$b^2-bt-1\geqslant 0,\quad b-t>0,\quad t^2+1>0,$$

于是 ② 式大于 0,即

$$\frac{b^2s^2-2bst+t^2+b^2}{b^2s-bt+1}>s-1. \quad ③$$

同理
$$\frac{b^2s^2-2bst+t^2+b^2}{b^2s-bt+1}<s+1. \quad ④$$

由于 $\frac{a^2+b^2}{ab+1}=\frac{b^2s^2-2bst+t^2+b^2}{b^2s-bt+1}$ 是整数,所以由 ③,④ 可得

$$\frac{b^2s^2-2bst+t^2+b^2}{b^2s-bt+1}=s,$$

由此得
$$b^2+t^2=bts+s.$$

即
$$\frac{b^2+t^2}{bt+1}=s=\frac{a^2+b^2}{ab+1}.$$

因为 $a>b>t$,所以 $t=0$ 时,$s=b^2$ 为平方数,若 $t\neq 0$,可仿此继续下去,经过有限步之后,总可以使最小的数变为 0,所以 $s$ 是平方数,即 $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ 是某个正整数的平方.

[**证 2**] 令 $A=\{(a,b)\mid a,b\in N, a\geqslant b, ab+1\mid a^2+b^2\}$.

本题的结论是:对所有 $(a,b)\in A$,都有

$$f(a,b)=\frac{a^2+b^2}{ab+1}=k^2,\quad (k\in N). \quad ①$$

记 $B=\{(a,b)\mid(a,b)\in A$,且 $f(a,b)\neq k^2,\quad k\in N\}$.

我们只需证明 $B=\varnothing$.

若 $B\neq\varnothing$,则不妨设 $B$ 中使 $a+b$ 最小的数对为 $(a,b)$.

令 $f(a,b)=\frac{a^2+b^2}{ab+1}=t(\neq k^2)$,则有

$$a^2-tba+b^2-t=0. \quad ②$$

把 ② 看作是关于 $a$ 的二次方程,显然 $a$ 是方程 ② 的一个根,设 $c$ 为 ② 的另一根,则由韦达定理有

$$\begin{cases} a + c = tb, & ③ \\ ac = b^2 - t. & ④ \end{cases}$$

由 ③ 知 $c$ 是整数,由 ④ 知 $c \neq 0$.

若 $c < 0$,则由 $t > 0$, $b > 0$ 知

$$-tcb - t \geqslant 0.$$

由 $c$ 是 ② 的根得

$$c^2 - tcb + b^2 - t = 0, \quad ⑤$$

于是
$$c^2 + b^2 = tcb + t \leqslant 0.$$

出现矛盾.

因而 $c > 0$.由 ④ 知

$$0 < ac = b^2 - t < b^2 \leqslant a^2,$$

所以
$$0 < c < a.$$

由 ⑤ 得
$$t = \frac{c^2 + b^2}{cb + 1}.$$

于是$(b, c)$ 或$(c, b) \in B$,但此时

$$b + c < a + b.$$

与$(a, b)$ 的选择,即 $a + b$ 最小相矛盾.

所以 $B = \varnothing$,从而命题得证.

12·114　求满足方程 $x^2 - 2y^2 = 1$ 的所有素数 $x$ 和 $y$.

(基辅数学奥林匹克,1966 年)

[解]　由　$x^2 = 2y^2 + 1$ 可知

$x^2$ 是奇数,因而 $x$ 是奇数.

设 $x = 2n + 1$,$(n \in N)$.则原方程化为

$$(2n + 1)^2 = 2y^2 + 1,$$

$$y^2 = 2(n^2 + n).$$

于是 $y^2$ 是偶数,因为 $y$ 是偶数.

又因为 $y$ 是素数,　则 $y = 2$.

将 $y = 2$ 代入原方程得 $x = 3$.

因此,原方程只有惟一的素数解 $x = 2$,　$y = 3$.

12·115　求方程 $2^{x+1} + y^2 = z^2$ 的素数解.

（第 18 届全俄数学奥林匹克，1992 年）

［解］ 由已知方程得

$$2^{x+1}=(z-y)(z+y),$$

即
$$\begin{cases} z-y=2^k, \\ z+y=2^{x-k+1}. \end{cases}$$

其中 $k\in Z$，且 $0\leqslant k<x-k+1$.

上面二式相加得 $z=2^{k-1}+2^{x-k}$.

二式相减得 $y=2^{x-k}-2^{k-1}$.

若 $k-1\geqslant 1$，则 $y$ 与 $z$ 不可能同时是素数.

若 $k=1$，则

$$y=2^{x-1}-1,$$
$$z=2^{x-1}+1.$$

由于 $y=2^{x-1}-1, 2^{x-1}$ 与 $z=2^{x-1}+1$ 是三个相邻的自然数，因而其中的一个数能被 3 整除，又因为 $2^{x-1}$ 不能被 3 整除，则或者 $z$，或者 $y$ 能被 3 整除.

若 $z$ 能被 3 整除，则 $z=3$，此时 $y=1$， $y$ 不是素数.

若 $y$ 能被 3 整除，则 $y=3$，此时 $z=5$， $x=3$.

因此，方程的素数解为

$$x=3,\quad y=3,\quad z=5.$$

12·116 关于 $x,y,z$ 的方程 $x^2+y^3=z^4$ 有素数解吗？

（第 14 届全苏数学奥林匹克，1980 年）

［解］ 假设素数 $x,y,z$ 是方程 $x^2+y^3=z^4$ 的一组解. 则

$$y^3=z^4-x^2=(z^2+x)(z^2-x).$$

因为 $z^2-x<z^2+x$，并且 $y$ 是素数，则

$$\text{I}.\begin{cases} z^2-x=1, \\ z^2+x=y^3, \end{cases}\qquad \text{II}.\begin{cases} z^2-x=y, \\ z^2+x=y^2. \end{cases}$$

对于方程组 I，由于 $z^2$ 与 $x$ 之差为 1（奇数），所以 $z$ 与 $x$ 一为奇素数，一为偶素数.

若 $z=2$，则 $x=3$，此时 $y^3=z^2+x=7$ 不可能.

若 $x=2$，则 $z^2=3$ 不可能.

所以方程组 I 没有素数解.

对于方程组 II，由 $z^2-x=y$ 可知，$x,y$ 和 $z$ 中必有一偶素数 2.

若 $x=2$,则有

$$\begin{cases}z^2-y=2,\\y^2-z^2=2.\end{cases}$$

即 $\quad y^2-y-4=0$ 没有素数解.

若 $y=2$,则有

$$\begin{cases}z^2-x=2,\\z^2+x=4.\end{cases}$$

此时 $x=1$ 不是素数.

若 $z=2$,则有

$$\begin{cases}x+y=4,\\y^2-x=4.\end{cases}$$

即 $\quad y^2+y-8=0$ 也没有素数解.

因此方程组 Ⅱ 也没有素数解.

于是已知方程没有素数解.

12·117　求出所有使得 $C_m^2-1=p^n$ 成立的正整数 $m,n$ 和素数 $p$.

（加拿大数学奥林匹克训练题,1992 年）

[解]　已知方程可化为

$$\frac{m(m-1)}{2}-1=p^n,$$

$$\frac{(m+1)(m-2)}{2}=p^n.$$

(1) 若 $m$ 为奇数. 由 $p$ 是素数,

则对某个整数 $t,0\leqslant t\leqslant n$,有

$$\begin{cases}\dfrac{m+1}{2}=p^t, & ①\\ m-2=p^{n-t}. & ②\end{cases}$$

从 ①,② 中消去 $m$ 得

$$p^{n-t}+3=2p^t. \quad ③$$

当 $t=0$ 时,有 $\quad p^n+3=2.$

此时显然无解.

所以 $\quad t>0.$

当 $n-t>0$ 时,由 ③,素数 $p$ 是 3 的约数,因此 $p=3$.

这时 ③ 式化为

$$3^{n-t-1}+1=2\cdot 3^{t-1}. \quad ④$$

若 $t-1>0$,则 ④ 式右边是 3 的倍数,左边不能被 3 整除,这不可能.

若 $t-1=0$,则有

$$3^{n-t-1}+1=2,$$

从而

$$n-t-1=0.$$

由此可得 $t=1,\ n=2,\ m=p^{n-t}+2=5.$

当 $n-t=0$ 时,③ 式化为

$$1+3=2p^{t}.$$

从而 $p=2,\ n=t=1,\ m=3.$

(2) 若 $m$ 为偶数,由 $p$ 是素数,

则对于某个整数 $t$,$0\leqslant t\leqslant n$,有

$$\begin{cases} m+1=p^{t}, & ⑤\\ \dfrac{m-2}{2}=p^{n-t}. & ⑥\end{cases}$$

从 ⑤,⑥ 中消去 $m$ 得

$$p^{t}-3=2p^{n-t}. \quad ⑦$$

显然 $t>0$,否则等式左边为负数,右边为正数,⑦ 式不可能成立.

若 $n-t>0$,于是由 ⑦ 式,$p$ 是 3 的约数,又 $p$ 是素数,所以 $p=3$.此时 ⑦ 式化为

$$3^{t-1}-1=2\cdot 3^{n-t-1}.$$

从而有 $n-t-1=0$,$t-1=1$,即

$$t=2,\ n=3,\ m=8.$$

若 $n-t=0$,则 ⑦ 式化为

$$p^{t}-3=2.$$

从而有

$$p=5.$$

此时 $t=1$,$n=t=1$,$m=4$.

由以上,此方程仅有四组解:

$$\begin{cases} m=3,\\ n=1,\\ p=2,\end{cases}\quad \begin{cases} m=5,\\ n=2,\\ p=3,\end{cases}\quad \begin{cases} m=8,\\ n=3,\\ p=3,\end{cases}\quad \begin{cases} m=4,\\ n=1,\\ p=5.\end{cases}$$

12·118　试找出满足等式 $p^q+q^p=r$ 的所有素数 $p,q$ 和 $r$.

（第 53 届莫斯科数学奥林匹克，1990 年）

[解]　不妨设
$$p<q.$$
显然，若 $r$ 为素数，则 $p$ 和 $q$ 不能都为奇素数，否则 $r$ 为偶数，只能 $r=2$. 这时等式不可能成立.

因此，$p$ 和 $q$ 必一为偶素数，一为奇素数.

由 $p<q$ 得
$$p=2.$$
当 $q\geqslant 5$ 时，
$$\begin{aligned}2^q+q^2&=(2^q+1)+(q^2-1)\\&=3(2^{q-1}-2^{q-2}+\cdots+1)+(q^2-1).\end{aligned}$$
由于　$3\mid q^2-1$，则
$$3\mid 2^q+q^2,$$
从而 $r$ 是 3 的倍数，这不可能.

于是只能有
$$q=3.$$
此时　$p^q+q^p=2^3+3^2=17$ 是素数.

因此 $p<q$ 时只有一组素数解：
$$p=2,\ q=3,\ r=17.$$
同样，$q<p$ 时，也只有一组素数解：
$$q=2,\ p=3,\ r=17.$$

12·119　求方程组
$$\begin{cases}x+y+z=0, & ①\\ x^3+y^3+z^3=-18. & ②\end{cases}$$
的整数解.

（中国高中数学联赛，1978 年）

[解]　由 ① 得
$$z=-(x+y).\qquad ③$$
将 ③ 代入 ② 得　$x^3+y^3-(x+y)^3=-18$，

化简得
$$xy(x+y)=6.$$
再由 ③
$$xyz=-6.\qquad ④$$
由 ④ 知，$x,y,z$ 是 6 的约数，且要满足方程 ① 和 ②，所以 $x,y,z$ 中有且只有一个为负数，而且这个负数的绝对值应该最大.

令 $x=-3$，则得

$$\begin{cases} y = 1, \\ z = 2, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} y = 2, \\ z = 1. \end{cases}$$

同理可令 $y=-3, z=-3$ 分别求出另外四组解.

于是方程组共有六组解,它们是

$$\begin{cases} x = -3, \\ y = 1, \\ z = 2, \end{cases} \quad \begin{cases} x = -3, \\ y = 2, \\ z = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1, \\ y = -3, \\ z = 2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2, \\ y = -3, \\ z = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1, \\ y = 2, \\ z = -3, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2, \\ y = 1, \\ z = -3. \end{cases}$$

12·120　求方程组 $\begin{cases} xz - 2yt = 3, \\ xt + yz = 1. \end{cases}$ 的整数解.

（第 25 届全苏数学奥林匹克,1991 年）

[解]　由原方程组可得

$$(xz-2yt)^2 + 2(xt+yz)^2 = 11,$$

即

$$(x^2+2y^2)(z^2+2t^2) = 11.$$

因为 11 是素数,则有

$$\text{Ⅰ}.\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 1, \\ z^2 + 2t^2 = 11. \end{cases}$$

$$\text{Ⅱ}.\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 11, \\ z^2 + 2t^2 = 1. \end{cases}$$

由 Ⅰ,Ⅱ 可得方程的四组整数解:

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = 0, \\ z = 3, \\ t = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1, \\ y = 0, \\ z = -3, \\ t = -1, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3, \\ y = 1, \\ z = 1, \\ t = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x = -3, \\ y = -1, \\ z = -1, \\ t = 0. \end{cases}$$

12·121　已知 $a,b,c,d$ 为两两不同的正整数,并且满足 $a+b=cd$,　$ab=c+d$.求出满足上述要求的四元数组 $a,b,c,d$.

（匈牙利数学奥林匹克,1987 年）

[解]　若 $a+b \geqslant ab$,则

$$ab-a-b=(a-1)(b-1)-1 \leqslant 0,$$

$$(a-1)(b-1) \leqslant 1.$$

因为 $a,b$ 都是正整数,且 $a \neq b$,则必有

$$a = 1 \quad 或 \quad b = 1.$$

若 $ab > a + b$,则

$$c + d = ab > a + b = cd.$$

又有 $$(c-1)(d-1) < 1.$$

此时 $c = 1$ 或 $d = 1$.

因此 $a,b,c,d$ 中总有一个(也只有一个)为1.

若 $a = 1$,则有

$$\begin{cases} 1 + b = cd, \\ b = c + d. \end{cases}$$

这时可得

$$\frac{1}{cd} + \frac{b}{cd} = \frac{1}{cd} + \frac{c+d}{cd} = \frac{1}{cd} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 1.$$

所以 $c = 2,\ d = 3$ 或 $c = 3,\ d = 2$.

代入已知方程组可得 $b = 5$.

再考虑 $b,c,d$ 等于1的情形,有下列八组解:

| $a$ | 1 | 1 | 5 | 5 | 2 | 3 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $b$ | 5 | 5 | 1 | 1 | 3 | 2 | 3 | 2 |
| $c$ | 3 | 2 | 3 | 2 | 1 | 1 | 5 | 5 |
| $d$ | 2 | 3 | 2 | 3 | 5 | 5 | 1 | 1 |

**12·122** 方程组

$$\begin{cases} x + py = n, & ① \\ x + y = p^z. & ② \end{cases}$$

(其中 $n$ 和 $p$ 是给定的自然数)有正整数解 $(x,y,z)$ 的充分必要条件是什么?再证明这样的解的个数不能大于1.

(匈牙利数学奥林匹克,1905年)

**[解]** 对于方程 ② $x + y = p^z$,仅当 $p > 1$ 时,才有正整数解 $(x,y,z)$.

于是,我们假定 $p > 1$.

由方程组 ①,② 解得

$$x = \frac{p^{z+1} - n}{p - 1} = \frac{p^{z+1} - 1}{p - 1} - \frac{n - 1}{p - 1}, \qquad ③$$

$$y=\frac{n-p^z}{p-1}=\frac{n-1}{p-1}-\frac{p^z-1}{p-1}. \quad ④$$

对所有的正整数 $z$，$\dfrac{p^{z+1}-1}{p-1}$ 和 $\dfrac{p^z-1}{p-1}$ 都是整数.

因此，由关系式 ③ 和 ④ 推出：当且仅当 $n-1$ 是 $p-1$ 的倍数时，$x$ 和 $y$ 是整数.

又由 ③ 和 ④ 可知，$x$ 和 $y$ 仅在

$$p^{z+1}>n>p^z$$

时，才是正数.

这就是说，数 $n$ 应该在数 $p$ 的两个连续的乘幂之间，而 $z$ 应该取数 $p$ 的两个幂指数中最小的那一个.

于是原方程组有正整数解 $(x,y,z)$ 的充分必要条件是下列三个条件：

(1) $p>1$；

(2) $n-1$ 是 $p-1$ 的倍数；

(3) $n$ 不等于数 $p$ 或 $p$ 的整数次幂.

如果所有这三个条件都满足，那么原方程组有且仅有一组解.

为了得到这一组解，必须用上面所说的方法来选取 $z$，并用关系式 ③ 和 ④ 求出 $x$ 和 $y$.

12·123　在无限方格纸上（每个小方格的边长为 1），规定只允许沿着小方格的边线剪开.

证明对任意整数 $m>12$，可以剪出一个面积大于 $m$ 的矩形，但不能再从这个矩形中剪出一个面积为 $m$ 的矩形.

（第 19 届全苏数学奥林匹克，1985 年）

**[证]**　设某一矩形的边长为 $x,y$.

不失一般性，设 $x\leqslant y$.

由题意，这个矩形的面积大于 $m$，而把它的长或宽减去 1 之后，所得的矩形面积就应该小于 $m$，即

$$\begin{cases}xy>m,\\(x-1)y<m,\\x(y-1)<m.\end{cases}$$

但是由 $x \leqslant y$ 可得

$$(x-1)y \leqslant x(y-1).$$

于是只要证明不等式组

$$\begin{cases} xy > m, \\ x(y-1) < m, \\ x \leqslant y. \end{cases}$$

有正整数解就可以了.

由于对任一正整数 $m$,必定有

$$k^2 \leqslant m < (k+1)^2, \quad (k \in N).$$

所以我们可以分下面四种情况讨论.

(1) 当 $m = k^2$ 时,不等式组有解:

$$\begin{cases} x = k-1, \\ y = k+2. \end{cases}$$

(2) 当 $k^2 < m < k(k+1)$ 时,不等式组有解:

$$\begin{cases} x = k, \\ y = k+1. \end{cases}$$

(3) 当 $m = k(k+1)$ 时,不等式组有解:

$$\begin{cases} x = k-1, \\ y = k+3. \end{cases}$$

(4) 当 $k(k+1) < m < (k+1)^2$ 时,不等式组有解:

$$\begin{cases} x = k+1, \\ y = k+1. \end{cases}$$

**12·124** 证明存在无穷多个数,它们不能表示成 3 个完全立方数之和的形式.

(第 22 届莫斯科数学奥林匹克,1959 年)

[证] 由于

$$(9k)^3 = 9 \cdot 9^2 k^3,$$

$$(9k \pm 1)^3 = 9^3 k^3 \pm 3 \cdot 9^2 k^2 + 3 \cdot 9k \pm 1,$$

$$(9k \pm 2)^3 = 9^3 k^3 \pm 6 \cdot 9^2 k^2 + 12 \cdot 9k \pm 8$$

$$= 9(9^2 k^3 \pm 6 \cdot 9k^2 + 12k \pm 1) \mp 1,$$

$$(9k \pm 3)^3 = 3^3(3k \pm 1)^3 = 9 \cdot 3(3k \pm 1)^3,$$

$$(9k \pm 4)^3 = 9^3k^3 \pm 12 \cdot 9^2k^2 + 48 \cdot 9k \pm 64$$
$$= 9(9^2k^3 \pm 12 \cdot 9k^2 + 48k \pm 7) \pm 1.$$



因此,一个完全立方数只有 $9t$,$9t \pm 1$ 的形式.

于是形如 $9t+4$, $9t+5$ 的数不能表示成3个完全立方数之和的形式,它们有无穷多个.

12·125　证明方程 $x^2 + y^5 = z^3$ 有无穷多组整数解 $x,y,z$.其中 $xyz \neq 0$.

(第23届加拿大数学竞赛,1991年)

[证1]　可以验证方程有两组解

$$(x,y,z) = (3,-1,2),(10,3,7).$$

假定$(u,v,w)$是方程的一组解.

那么,对任意整数 $k$,则由$[2,5,3] = 30$可设

$$x = k^{15}u,\quad y = k^6v,\quad z = k^{10}w.$$

这时有

$$\begin{aligned} x^2 + y^5 &= k^{30}u^2 + k^{30}v^5 \\ &= k^{30}(u^2 + v^5) \\ &= k^{30}w^3 \\ &= z^3. \end{aligned}$$

于是$(k^{15}u, k^6v, k^{10}w)$是已知方程的解.

从而已知方程有无穷多组解.

[证2]　取 $x = 2^{15k+10}$, $y = 2^{6k+4}$, $z = 2^{10k+7}$, $k \in N$,则

$$\begin{aligned} x^2 + y^5 &= 2^{30k+20} + 2^{30k+20} \\ &= 2^{30k+21} = z^3. \end{aligned}$$

因此$(x,y,z) = (2^{15k+10},\ 2^{6k+4}, 2^{10k+7})$, $k \in N$,是已知方程的无穷多组解.

[证3]　令 $x = n^5$, $y = n^2$,则

$$x^2 + y^5 = (2n)n^9.$$

现在取 $n = 4r^3$,则

$$2n \cdot n^9 = 8r^3 \cdot 2^{18}r^{27} = (2^7r^{10})^3.$$

于是$(x,y,z) = (2^{10}r^{15},\ 2^4r^6,\ 2^7r^{10})$是已知方程的解,从而已知方程有无穷多组解.

12·126　证明可以找到多于1000个3元自然数组$(a,b,c)$,使它们满足等式$a^{15}+b^{15}=c^{16}$.

（第40届莫斯科数学奥林匹克,1977年）

［证］　已知方程可化为

$$\left(\frac{a}{c}\right)^{15}+\left(\frac{b}{c}\right)^{15}=c. \qquad ①$$

我们选取自然数$n$和$k$,使得

$$\frac{a}{c}=n,\quad \frac{b}{c}=k. \qquad ②$$

将②代入①就有　$c=n^{15}+k^{15}$.

从而再代入②就有

$$a=n(n^{15}+k^{15}),\quad b=k(n^{15}+k^{15}).$$

于是对每一对$n$和$k$就可得到一组解

$$a=n(n^{15}+k^{15}),\quad b=k(n^{15}+k^{15}),\quad c=n^{15}+k^{15}.$$

12·127　求满足方程$x^3+y^4=z^5$的任意一组自然数$x,y,z$.试问这个方程的自然数解集是有限的还是无限的?

（第14届全俄数学奥林匹克,1988年）

［解］　因为　$2^{24}+2^{24}=2^{25}$,

所以　$(2^8)^3+(2^6)^4=(2^5)^5$.

于是
$$\begin{cases}x=2^8=256,\\ y=2^6=64,\\ z=2^5=32,\end{cases}$$
是已知方程的一组解.

同时,若$(x_0,y_0,z_0)$是方程的一组解,则

$$\begin{cases}x=k^{20}x_0,\\ y=k^{15}y_0,\\ z=k^{12}z_0.\end{cases}$$

也是方程的一组解,因而有无穷多组解.

12·128　证明方程$x^2+y^2=z^5+z$有无穷多组两两互素的正整数解.

（英国数学奥林匹克,1985年）

[证]　任取一对互素的自然数 $u,v$,令

$$z=u^2+v^2.$$

则 $$(z,u)=1.$$

否则,若$(z,u)\neq 1$可推出$(u,v)\neq 1$,出现矛盾.

同样 $$(z,v)=1.$$

令 $$x=uz^2+v,\quad y=vz^2-u.$$

则 $$\begin{aligned}x^2+y^2&=(uz^2+v)^2+(vz^2-u)^2\\&=(u^2+v^2)z^4+u^2+v^2\\&=z^5+z.\end{aligned}$$

此时必有$(x,z)=1$,否则与$(z,v)=1$矛盾.

同样$(y,z)=1$.

于是已知方程的解为

$$\begin{cases}x=uz^2+v,\\y=vz^2-u,\\z=u^2+v^2.\end{cases}$$

其中$(u,v)=1$.

由于 $u$ 和 $v$ 有无穷多组,所以方程有无穷多组解,且 $x,y$ 和 $z$ 两两互素.

12·129　证明方程$(x+y+z)^2+2(x+y+z)=5(xy+yz+zx)$的自然数解有无穷多个.

(“友谊杯”国际数学竞赛,1992 年)

[证]　显然$(x,y,z)=(1,1,1)$是所给的不定方程的一组解.

设方程有解　$(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2),\cdots,(x_k,y_k,z_k)$.

并且　$x_1+y_1+z_1\leqslant x_2+y_2+z_2\leqslant\cdots\leqslant x_k+y_k+z_k$.

不妨设 $$z_k=\min\{x_k,y_k,z_k\}.$$

把所给方程变形为

$$z^2-(3x+3y-2)z+(x^2+y^2-3xy+2x+2y)=0.$$

当 $x=x_k,\quad y=y_k$ 时,上述方程有一个解 $z=z_k$,但上述方程是关于 $z$ 的一元二次方程,因此它还有一个解

$$z'_k=3x_k+3y_k-2-z_k.$$

易知 $$z'_k>z_k.$$

这样,$(x_k,y_k,z'_k)$也是所给方程的解.

因为 $$x_k+y_k+z'_k>x_k+y_k+z_k,$$
所以$(x_k,y_k,z'_k)$是一组新的解.

从而命题成立.

12·130　试判定下述不定方程组是否存在正整数解:

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{1985}^2=y^3,$$
$$x_1^3+x_2^3+\cdots+x_{1985}^3=z^2.$$

其中 $x_i\neq x_j(i\neq j)$.

（第 14 届美国数学奥林匹克,1985 年）

**[解 1]**　我们证明更一般的结果:

对于任意正整数 $n$,不定方程组

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=y^3, \quad ①$$
$$x_1^3+x_2^3+\cdots+x_n^3=z^2. \quad ②$$

存在无穷多组正整数解.

显然由 $$1^3+2^3+\cdots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2,$$

$1,2,\cdots,n$ 及$\frac{n(n+1)}{2}$是方程 ② 的一组正整数解.

令 $x_i=k_i$, $i=1,2,\cdots,n$,代入方程 ① 得

$$k^2(1^2+2^2+\cdots+n^2)=y^3,$$

即 $$y^3=\frac{k^2n(n+1)(2n+1)}{6}. \quad ③$$

代入方程 ② 得

$$k^3(1^3+2^3+\cdots+n^3)=z^2,$$

即 $$z^2=k^3\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2. \quad ④$$

考虑③式,$\frac{k^2n(n+1)(2n+1)}{6}$应为一立方数,考虑④式,$k$应为一平方数,于是取

$$k=\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]^{6t+4}, \quad t\in N.$$

则 $x_i=ki(i=1,2,\cdots,n)$都是方程组的解.

**[解 2]**　设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为任意一组互不相同的正整数.令

$$s=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2,$$

$$t = a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3.$$

设 $x_i = s^m t^k a_i$,代入两个方程得



$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = s^{2m+1} t^{2k} = y^3,$$

$$x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3 = s^{3m} t^{3k+1} = z^2.$$

因此,只须 $2m+1$ 是3的倍数,$3m$ 是2的倍数,于是取

$$m = 6p + 4 (p \in N).$$

又须 $2k$ 是3的倍数,$3k+1$ 是2的倍数,于是取 $k = 6q + 3$ ($q \in N$).

则 $x_i = s^{6p+4} t^{6q+3} a_i$ ($p, q \in N$) 是方程组的一组解.

从而方程组有无穷多组解.

12·131 考虑方程 $x^3 - 3xy^2 + y^3 = n$ ①

其中 $n$ 为正整数.试证

(1) 如果方程有一组整数解$(x, y)$,则它至少有三组整数解;

(2) 当 $n = 2891$ 时,方程没有整数解.

(第23届国际数学奥林匹克,1982年)

[证] (1) 设$(x, y)$是方程①的一组解,由于 $n$ 为正整数.则 $x$ 和 $y$ 不同时为零.因为

$$(y-x)^3 = y^3 - 3xy^2 + 3x^2y - x^3$$

$$= y^3 - 3xy^2 + x^3 + 3(y-x)x^2 + x^3$$

$$y^3 - 3xy^2 + x^3 = (y-x)^3 - 3x^2(y-x) - x^3.$$

由于 $$x^3 - 3xy^2 + y^3 = n,$$

则 $$(y-x)^3 - 3x^2(y-x) + (-x)^3 = n.$$

于是 $(y-x, -x)$ 是方程①的一组整数解.

同理 $(-y, x-y)$ 也是方程①的一组整数解.

容易验证,$(x,y)$,$(y-x, -x)$,$(-y, x-y)$ 这三组解是不同的.

(2) 假设 $n = 2891$ 时,方程①有一组整数解$(x, y)$.即

$$x^3 - 3xy^2 + y^3 = 2891,$$

则有 $$x^3 + y^3 = 3xy^2 + 3 \cdot 963 + 2. \qquad ②$$

从而有 $$x^3 + y^3 \equiv 2 \pmod 3. \qquad ③$$

于是 $x, y$ 有如下三种可能:

(i) $\begin{cases} x \equiv 0 \pmod 3, \\ y \equiv 2 \pmod 3, \end{cases}$

(ii) $\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 3, \\ y \equiv 1 \pmod 3), \end{cases}$

(iii) $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 3, \\ y \equiv 0 \pmod 3. \end{cases}$

对于(i),设 $x = 3p, y = 3q + 2$,其中 $p, q$ 均为整数,代入②式得

$$(3p)^3 + (3q+2)^3 = 3(3p)(3q+2)^2 + 9 \cdot 321 + 2.$$

对于模 9,上式左边有

$$(3p)^3 + (3q+2)^3 \equiv 8 \pmod 9,$$

$$3(3p)(3q+2)^2 + 9 \cdot 321 + 2 \equiv 2 \pmod 9.$$

所以此时方程②无解,即方程①无解.

同理可证(ii)和(iii)这两种情况下,方程①仍无解.

因此,$n = 2891$ 时,已知方程无整数解.

12·132　设 $a, b$ 为整数,但不是完全平方数.

证明若方程 $x^2 - ay^2 - bz^2 + abw^2 = 0$ 有非平凡的整数解(即不全为 0 的整数解),则 $x^2 - ay^2 - bz^2 = 0$ 也有非平凡的整数解.

(第 30 届国际数学奥林匹克预选题,1989 年)

[证]　由方程　$$x^2 - ay^2 - bz^2 + abw^2 = 0 \qquad ①$$

有非平凡的整数解可知,$a, b$ 不可能均为负数.

不失一般性,可设 $a > 0$($a, b$ 为非完全平方数,当然都不为 0).

设 $(x_0, y_0, z_0, w_0) \neq (0,0,0,0)$ 为①的解,则

$$x_0^2 - ay_0^2 - b(z_0^2 - aw_0^2) = 0. \qquad ②$$

将②的两边乘以 $(z_0^2 - aw_0^2)$ 得

$$(x_0^2 - ay_0^2)(z_0^2 - aw_0^2) - b(z_0^2 - aw_0^2)^2 = 0. \qquad ③$$

又因为

$$\begin{aligned}
&(x_0^2 - ay_0^2)(z_0^2 - aw_0^2) \\
&= x_0^2 z_0^2 - ay_0^2 z_0^2 - ax_0^2 w_0^2 + a^2 y_0^2 w_0^2 \\
&= x_0^2 z_0^2 - 2ax_0 y_0 z_0 w_0 + a^2 y_0^2 w_0^2 - ay_0^2 z_0^2 + 2ax_0 y_0 z_0 w_0 - ax_0^2 w_0^2 \\
&= (x_0 z_0 - ay_0 w_0)^2 - a(y_0 z_0 - x_0 w_0)^2.
\end{aligned}$$

于是③式化为

$$(x_0z_0-ay_0w_0)^2-a(y_0z_0-x_0w_0)^2-b(z_0^2-aw_0^2)^2=0. \qquad ④$$

令 $x_1=x_0z_0-ay_0w_0$，$y_1=y_0z_0-x_0w_0$，$z_1=z_0^2-aw_0^2$，则$(x_1,y_1,z_1)$适合方程

$$x^2-ay^2-bz^2=0.$$

若 $z_1=0$,则由

$$z_1=z_0^2-aw_0^2=0$$

及 $a$ 不是完全平方数,则 $z_0=w_0=0$.

再由 ② 式得

$$x_0^2-ay_0^2=0,$$

从而 $$x_0=y_0=0.$$

于是 $$(x_0,y_0,z_0,w_0)=(0,0,0,0)$$

与 $$(x_0,y_0,z_0,w_0)\neq(0,0,0,0)$$ 矛盾.

所以 $$z_1\neq0,$$

即 $$(x_1,y_1,z_1)\neq(0,0,0).$$

从而$(x_1,y_1,z_1)$是方程

$$x^2-ay^2-bz^2=0$$

的非平凡整数解.

**12·133** 设 $p$ 是两个大于 2 的连续整数的积.证明没有整数 $x_1$, $x_2,\cdots,x_p$ 适合方程$\sum_{i=1}^{p}x_i^2-\frac{4}{4p+1}\left(\sum_{i=1}^{p}x_i\right)^2=1$或证明仅有两个 $p$ 的值,使得有整数 $x_1,x_2,\cdots,x_p$ 适合$\sum_{i=1}^{p}x_i^2-\frac{4}{4p+1}\left(\sum_{i=1}^{p}x_i\right)^2=1$.

(第 29 届国际数学奥林匹克预选题,1988 年)

[证] 设 $p=k(k+1)$,$k\geqslant3$,则

$$4p+1\geqslant12\cdot4+1=49. \qquad ①$$

若有整数 $x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_p$,适合方程

$$\sum_{i=1}^{p}x_i^2-\frac{4}{4p+1}\left(\sum_{i=1}^{p}x_i\right)^2=1, \qquad ②$$

则 $$4p+1=(4p+1)\sum_{i=1}^{p}x_i^2-4\left(\sum_{i=1}^{p}x_i\right)^2$$

$$= 4\left[ p\sum_{i=1}^{p} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{p} x_i\right)^2 \right] + \sum_{i=1}^{p} x_i^2$$

$$= 2\sum_{i,j}(x_i - x_j)^2 + \sum_{i=1}^{p} x_i^2, \qquad ③$$

其中$\sum\limits_{i,j}$表示对$i,j$的每一种组合求和，$i,j \in \{1,2,\cdots,p\}$.

如果所有的$x_i(i = 1,2,\cdots,p)$均相等,那么由③得

$$4p + 1 = px^2.$$

此式右边能被$p$整除,而左边不能被$p$整除,出现矛盾.

于是,必有两个$x_l,x_{l+1}$不相等,即必有

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_l > x_{l+1} \geqslant \cdots \geqslant x_p,$$

其中$l$是自然数.

当$p - 1 > l \geqslant 2$时,

$$2\sum_{i,j}(x_i - x_j)^2 \geqslant 4l(p - l) \geqslant 8(p - 2).$$

由①,$p \geqslant 12$可知

$$8(p - 2) > 4p + 1,$$

于是
$$2\sum_{i,j}(x_i - x_j)^2 > 4p + 1.$$

所以$l = 1$或$l = p - 1$.

不妨设 $x_1 > x_2 = x_3 = \cdots = x_{p-1} \geqslant x_p$.

由③得

$$4p + 1 = 4[(p - 2)(x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_p)^2 + (p - 2)(x_p - x_2)^2] + \sum_{i=1}^{p} x_i^2.$$

于是
$$x_1 - x_2 = 1.$$

上式可化为

$$9 = 4[(x_1 - x_p)^2 + (p - 2)(x_p - x_2)^2] + \sum_{i=1}^{p} x_i^2,$$

从而有$x_1 - x_p = 1$, $x_p = x_2$.

这样就有 $5 = x_1^2 + (p - 1)x_2^2$,

由$p \geqslant 12$可得 $x_2 = 0$,

从而 $x_1^2 = 5$.

这也是不可能的.

因此没有整数 $x_1, x_2, \cdots, x_p$ 满足方程②.

12·134　证明存在无穷多对正整数 $(k, n)$,使得

$$1 + 2 + \cdots + k = (k+1) + (k+2) + \cdots + n.$$

（第 26 届国际数学奥林匹克候选题,1985 年）

［证］　已知等式可化为

$$\frac{1}{2}k(k+1) = \frac{1}{2}(n-k)(n+k+1),$$

$$2k(k+1) = n(n+1),$$

$$2(2k+1)^2 = (2n+1)^2 + 1. \quad ①$$

令 $x = 2n+1$, $y = 2k+1$,则①式化为

$$x^2 - 2y^2 = -1. \quad ②$$

本题等价于方程②有无穷多组正整数解.

方程②是佩尔方程.

首先 $x = y = 1$ 是②的一组解.且

$$x_n = \frac{(1+\sqrt{2})^{2n+1} + (1-\sqrt{2})^{2n+1}}{2},$$

$$y_n = \frac{(1+\sqrt{2})^{2n+1} - (1-\sqrt{2})^{2n+1}}{2\sqrt{2}}.$$

也是方程②的解.这是因为

$$\begin{aligned} & x_n^2 - 2y_n^2 \\ = & (x_n + \sqrt{2}y_n)(x_n - \sqrt{2}y_n) \\ = & (1+\sqrt{2})^{2n+1}(1-\sqrt{2})^{2n+1} \\ = & -1. \end{aligned}$$

于是方程②有无穷多组解 $(x, y)$,从而方程①有无穷多组解 $(k, n)$.

12·135　求证对任何整数 $k > 0$,方程 $a^2 + b^2 = c^k$ 恒有正整数解.

（前苏联大学生数学竞赛,1976 年）

［证］　对任何正整数 $u, v$,令

$$a = \frac{1}{2}\left|(u+vi)^k + (u-vi)^k\right|,$$

$$b = \frac{1}{2}\left|(u+vi)^k - (u-vi)^k\right|,$$

即 $a,b$ 分别是 $(u+vi)^k$ 的实部和虚部的绝对值.

因为对任何正整数 $k$, $\pm 1$, $\pm i$ 的 $k$ 次方根的全体是有限的,所以我们可以适当选择 $u,v$,使得 $a$ 和 $b$ 都不等于 0,从而 $a$ 和 $b$ 都是正整数.这时

$$a^2+b^2=|(u+vi)^k|^2=(|u+vi|^2)^k=(u^2+v^2)^k.$$

取 $c=u^2+v^2$,则得到方程的一组正整数解.

12·136 证明有无穷多个自然数 $n$,使平均数 $\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n}$ 为完全平方数,第一个这样的数当然是 1,请写出紧接在 1 后面的两个这样的自然数.

(第 31 届国际数学奥林匹克候选题,1990 年)

[证] 由于

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

即

$$\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n}=\frac{2n^2+3n+1}{6}.$$

设 $\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n}=m^2$, $m\in N$,则

$$m^2=\frac{2n^2+3n+1}{6}.$$

因此,本题等价于求出一切自然数对 $(n,m)$ 使方程

$$2n^2+3n+1=6m^2$$

成立.将上式两边乘 8,并配方得

$$(4n+3)^2-3(4m)^2=1.$$

这个方程可以看作是佩尔方程

$$x^2-3y^2=1$$

满足 $x\equiv 3 \pmod 4$ 和 $y\equiv 0 \pmod 4$ 的解.

佩尔方程的解可以通过将 $(2+\sqrt{3})^k$($k\geqslant 1$ 的整数)写成 $x+y\sqrt{3}$ 的形式来得到.

设正整数 $x_k,y_k$ 满足

$$x_k+y_k\sqrt{3}=(2+\sqrt{3})^k,\quad k\geqslant 1,$$

则 $(x_k,y_k)$ 是佩尔方程 $x^2-3y^2=1$ 的所有正整数解.

下面证明,存在无穷多个 $k$,使

$$x_k \equiv 3 \pmod 4 \quad 且 \quad y_k \equiv 0 \pmod 4.$$

显然 $x_{k+1} + y_{k+1}\sqrt{3} = (x_k + y_k\sqrt{3})(2+\sqrt{3})$,

于是
$$\begin{cases} x_{k+1} = 2x_k + 3y_k, \\ y_{k+1} = x_k + 2y_k. \end{cases}$$

进而有
$$\begin{cases} x_{k+2} = 4x_{k+1} - x_k, \\ y_{k+2} = 4y_{k+1} - y_k. \end{cases}$$

注意到 $x_k, y_k$ 的前 4 项分别为

$$x_k: 2,\ 7,\ 26,\ 97,$$
$$y_k: 1,\ 4,\ 15,\ 56.$$

从而有 $\{x_k \pmod 4\}$ 和 $\{y_k \pmod 4\}$ 都是以 4 为周期的周期数列,且

$$x_k \equiv 3 \pmod 4 \quad \Longleftrightarrow \quad k \equiv 2 \pmod 4,$$
$$y_k \equiv 0 \pmod 4 \quad \Longleftrightarrow \quad k \equiv 0 \pmod 4,$$

于是,当且仅当 $k \equiv 2 \pmod 4$ 时,有

$$x_k \equiv 3 \pmod 4 \text{ 且 } y_k \equiv 0 \pmod 4.$$

这就证明了存在无穷多个 $n$ 满足题设要求.

由以上,符合要求的前 3 个 $n$ 所对应的 $k$ 分别为 2,6,10. 此时易得 $n$ 分别为 1,337,65521,所以紧接着 1 后面的符合要求的数为 337,65521.

12·137　证明对任意整数 $a,b,c,d,a \neq b$,方程

$$(x + ay + c)(x + by + d) = 2$$

至多有四组整数解. 再确定 $a,b,c,d$ 使得方程恰有四组不同的整数解.

(英国数学奥林匹克,1972 年)

[证]　因为 $a,b,c,d$ 是整数,所以方程

$$(x + ay + c)(x + by + d) = 2$$

等价于方程组

$$\begin{cases} x + ay + c = p, \\ x + by + d = q. \end{cases}$$

其中 $p$ 和 $q$ 为整数,且 $pq = 2$.

上述方程组是关于 $x$ 和 $y$ 的二元一次方程组,因此当 $a \neq b$ 时,至多有一组整数解

$$\begin{cases} x = p - c - ay, \\ y = \dfrac{p - q + d - c}{a - b}. \end{cases}$$

注意到适合 $pq = 2$ 的不同整数对 $(p, q)$ 共有四对：$(1,2)$，$(-1, -2)$，$(2,1)$，$(-2, -1)$，而且不同的整数对 $(p, q)$ 确定不同的解 $(x, y)$。因此方程至多有四组整数解。

当且仅当 $\dfrac{p - q + d - c}{a - b}$ 为整数时，即

$$\frac{\pm 1 + d - c}{a - b} \in Z$$

时，恰有四个整数解。此时

$$\frac{1 + d - c}{a - b} - \frac{-1 + d - c}{a - b} = \frac{2}{a - b}$$

为整数，即 $(a - b) \mid 2$。

如果 $a - b = \pm 1$，则 $\dfrac{\pm 1 + d - c}{a - b}$ 为整数。

如果 $a - b = \pm 2$，则 $\dfrac{\pm 1 + d - c}{a - b}$ 为整数的充分且必要条件是 $d - c$ 为奇数。

因此当 $|a - b| = 1$ 或 $|a - b| = 2$ 且 $c - d = 2k + 1, k \in Z$ 时，原方程恰有四组整数解。

12·138　求方程 $(y + 1)^x - 1 = y!$ 的自然数解。

（保加利亚数学奥林匹克，1982 年）

［解］　设自然数 $x$ 和 $y$ 满足方程。

首先证明，$p = y + 1$ 是素数。

如果 $p$ 是合数，则 $p$ 的因数 $d$ 满足 $1 < d < y + 1$，则 $d \mid y!$，又 $d \mid (y + 1)^x$，于是

$$1 = (y + 1)^x - y! \equiv 0 \pmod d,$$

这是不可能的。

因此，已知方程若有自然数解 $x, y$，则 $y + 1$ 是素数，从而素数 $p$ 满足方程

$$p^x - 1 = (p - 1)!.$$

如果 $p \geqslant 7$，则将上式两端除以 $p - 1$ 可得

$$p^{x-1} + p^{x-2} + \cdots + 1 = (p - 2)!,$$

而当 $p \geqslant 7$ 时，

$$2 < \frac{p-1}{2} \leqslant p-2, \text{且} \frac{p-1}{2} \in N.$$

所以上式右端能被 $2 \cdot \frac{p-1}{2} = p-1$ 整除.

又由 $p$ 是素数,则

$$p^i \equiv 1^i \pmod{(p-1)}, \quad i = 0,1,\cdots,x-1.$$

$$\sum_{i=0}^{x-1} p^i = (p-2)! \equiv \sum_{i=0}^{x-1} 1^i = x \pmod{(p-1)},$$

即
$$x \equiv 0 \pmod{(p-1)}.$$

即有
$$x \geqslant p-1.$$

但是
$$p^{x-1} < p^{x-1} + \cdots + 1 = (p-2)! < (p-2)^{p-2} < p^{p-2},$$

从而
$$x-1 < p-2,$$
$$x < p-1,$$

与 $x \geqslant p-1$ 矛盾.

所以必有
$$p < 7.$$

即 $p$ 只有可能是2,3,5.

如果 $p=2$,则
$$2^x - 1 = 1,$$

因此
$$x = 1,\ y = 1.$$

如果 $p=3$,则
$$3^x - 1 = 2,$$

因此
$$x = 1,\ y = 2.$$

如果 $p=5$,则
$$5^x - 1 = 24,$$

因此
$$x = 2,\ y = 4.$$

于是原方程有三组自然数解 $(x,y)$:

$$(x,y) = (1,1),(1,2),(2,4).$$

12·139　求方程 $1! + 2! + \cdots + (x+1)! = y^{z+1}$ 的自然数解.

（前南斯拉夫数学奥林匹克,1975年）

[解]　记 $f(x) = 1! + 2! + \cdots + (x+1)!$,则

$$f(1) = 3,\ f(2) = 9 = 3^{1+1},\ f(3) = 33 = 3 \cdot 11.$$

当 $x > 3$ 时,

$$f(x) = f(3) + 5! + \cdots + (x+1)! \equiv 3 \pmod 5.$$

由于对任意整数 $k$,

$$(5k)^2 = 25k^2 \equiv 0 \pmod 5,$$
$$(5k \pm 1)^2 = 25k^2 \pm 10k + 1 \equiv 1 \pmod 5,$$
$$(5k \pm 2)^2 = 25k^2 \pm 20k + 4 \equiv 4 \pmod 5.$$

所以 $f(x)$ 不是整数的平方.

因此,当 $z = 1$ 时,对任意自然数 $x \neq 2$ 及 $y$ 都不满足 $f(x) = y^2 = y^{1+1}$.

当 $z \geqslant 2$ 时,

$$f(1) = 3,\ f(2) = 9,\ f(3) = 33,\ f(4) = 153,$$
$$f(5) = 873,\ f(7) = 46233.$$

因此 $x = 1,2,3,4,5,7$ 时,$f(x)$ 都能被 3 整除,但不能被 27 整除,因而

$$f(x) \neq y^{z+2},\ z \geqslant 2.$$

当 $x > 7$ 时,

$$f(x) = f(7) + 9! + \cdots + (x+1)! \equiv f(7) \pmod{27}.$$

当 $x = 6$ 时,

$$f(6) = 5913 = 3^4 \cdot 73.$$

于是 $x = 6$ 及 $x > 7$ 时,$f(x)$ 都不能表示成 $y^{z+1}(z \geqslant 2)$ 的形式.

即 $z \geqslant 2$ 时,方程 $f(x) = y^{z+1}$ 没有自然数解.

由以上,已知方程有惟一的自然数解

$$x = 2,\ y = 3,\ z = 1.$$

12·140　对给定的 $n \in N$, $n > 1$,记 $m_k = n! + k$, $k \in N$.证明对任意 $k \in \{1,2,\cdots,n\}$,都有一个素数 $p$,它整除 $m_k$,但不整除 $m_1$, $m_2,\cdots,m_{k-1},m_{k+1},\cdots,m_n$.

（奥地利数学奥林匹克,1973 年）

[证]　记 $l_k = \dfrac{m_k}{k} = \dfrac{n!}{k} + 1$, $k = 1,2,\cdots,n$.

我们只需证明:如果 $p$ 是 $l_k$ 的素因子,则对每个 $j \neq k$,素数 $p$ 不能整除 $m_j$,又因为素数 $p$ 能整除 $l_k$,从而能整除 $m_k = l_k \cdot k$,所以素数 $p$ 符合题目要求.

设 $p \mid l_k$,并且有某个 $j \neq k$,使得 $p \mid m_j$,则 $p \mid l_j$ 或 $p \mid j$.

因为 $j$ 是 $1 \cdot 2 \cdots (k-1)(k+1) \cdots n = l_k - 1$ 的因数,所以 $j \mid (l_k - 1)$,从而 $(j, l_k) = (j, 1) = 1$,因此不可能有 $p \mid j$,于是 $p \mid l_j$,且 $p \mid l_k, j \neq k$.

设 $p \leqslant n$. 如果 $p \neq k$, 则因 $l_k = 1 \cdot 2 \cdots (k-1)(k+1) \cdots n + 1$, 所以 $p$ 与 $l_k$ 互素.



同理 $p \neq j$, 则 $p$ 与 $l_j$ 互素.

因此, $p$ 至少与 $l_k$ 或 $l_j$ 互素, 所以 $p \leqslant n$ 是不可能的.

再设 $p > n$, 则

$$k - j = m_k - m_j = kl_k - jl_j \equiv 0 \pmod p.$$

即 $p \mid (k-j)$, 与 $0 < |k-j| < n < p$ 矛盾.

因此不可能有 $p \mid l_k$ 且 $p \mid l_j$, 结论得证.

12·141　证明不存在这样的正四棱锥, 它的所有棱长、表面积和体积都是整数.

（第 21 届国际数学奥林匹克候选题, 1979 年）

[证]　假设这样的正四棱锥存在.

设 $g$ 为底面正方形的边长, $h$ 为棱锥的高, $f$ 为侧棱的长, $s$ 为表面积, $v$ 为体积, 则

$$f = \sqrt{h^2 + 2 \cdot \left(\frac{g}{2}\right)^2}, \tag{1}$$

$$s = g^2 + 2g\sqrt{h^2 + \left(\frac{g}{2}\right)^2}, \tag{2}$$

$$v = \frac{1}{3}g^2 h. \tag{3}$$

由于 $g, f, s, v$ 为自然数, 所以

$$x = g^3, \quad y = bv, \quad z = g(s - g^2), \quad u = 2g^2 f \tag{4}$$

都是自然数. 且

$$x^2 + y^2 = g^6 + 36v^2 = 4g^4\left[\left(\frac{g}{2}\right)^2 + h^2\right] = g^2(s - g^2)^2 = z^2,$$

$$x^2 + z^2 = g^6 + 4g^4\left[\left(\frac{g}{2}\right)^2 + h^2\right] = 4g^4\left[h^2 + 2\left(\frac{g}{2}\right)^2\right] = u^2.$$

于是方程组

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2, & (5) \\ x^2 + z^2 = u^2. & (6) \end{cases}$$

有自然数解. 取其中一个解为 $(x_0, y_0, z_0, u_0)$, 使得 $x_0$ 是所有解中 $x$ 的最小值.

$(x_0, y_0, z_0, u_0)$ 显然两两互素.

事实上,如果其中某两个同时被某个素数 $p$ 整除,则由

$$x_0^2+y_0^2=z_0^2,$$
$$x_0^2+z_0^2=u_0^2,$$
$$y_0^2+u_0^2=2z_0^2.$$

可知,另两个数也能被 $p$ 整除,从而

$$\left(\frac{x_0}{p},\frac{y_0}{p},\frac{z_0}{p},\frac{u_0}{p}\right)$$

也是方程组的解.由 $\frac{x_0}{p}<x_0$,与 $x_0$ 的选取相矛盾,因此 $x_0,y_0,z_0,u_0$ 两两互素.

因为 $f$ 为自然数,则由 ①,$g$ 为偶数.于是由 ④,$x_0$ 为偶数,从而 $y_0,z_0,u_0$ 为奇数,于是由 $x_0^2=z_0^2-y_0^2$ 得到

$$\left(\frac{x_0}{2}\right)^2=\frac{z_0+y_0}{2}\cdot\frac{z_0-y_0}{2}.$$

如果自然数 $\frac{z_0+y_0}{2}$ 与 $\frac{z_0-y_0}{2}$ 不互素,则

$$\begin{aligned}(z_0,y_0)&=(z_0,z_0-y_0)\\&\geqslant\left(z_0,\frac{z_0-y_0}{2}\right)\\&=\left(z_0-\frac{z_0-y_0}{2},\frac{z_0-y_0}{2}\right)\\&=\left(\frac{z_0+y_0}{2},\frac{z_0-y_0}{2}\right)\\&>1.\end{aligned}$$

与 $y_0$ 和 $z_0$ 互素相矛盾.这是不可能的.因此,$\frac{z_0+y_0}{2}$ 与 $\frac{z_0-y_0}{2}$ 互素.可设

$$\begin{cases}\dfrac{z_0+y_0}{2}=k^2,\\[2mm]\dfrac{z_0-y_0}{2}=l^2.\end{cases}$$

从而 $x_0=2kl$, $y_0=k^2-l^2$, $z_0=k^2+l^2$.同理由 $x_0^2=u_0^2-z_0^2$ 可得 $x_0=2mn,z_0=m^2-n^2,u_0=m^2+n^2$.其中 $k,l,m,n$ 都是自然数.$k$ 与 $l$ 互素,$m$ 与 $n$ 互素,于是得到方程组

$$\begin{cases} kl = mn, \\ k^2 + l^2 = m^2 - n^2. \end{cases}$$



记$(k,m) = a$， 则$k = ab$，$m = ac$，其中$a,b,c$为自然数．且$(b,c) = 1$．

由于$kl = mn$，所以$abl = acn$，即$bl = cn$，且$l = cd$．其中$d$为自然数．

从而$bcd = cn$，故 $n = cd$．

再由$(k,l) = (ab,cd) = 1$可得$(a,d) = 1$．

其次有 $a^2b^2 + c^2d^2 = a^2c^2 - b^2d^2$，

即 $(a^2 + d^2)(b^2 + c^2) = 2a^2c^2$．

由$(a^2 + d^2, a^2) = (d^2, a^2) = 1$，而且$(b^2 + c^2, c^2) = (b^2, c^2) = 1$，所以由上式得

$$\begin{cases} c^2 + d^2 = 2c^2, \\ b^2 + c^2 = a^2, \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} a^2 + d^2 = c^2, \\ b^2 + c^2 = 2a^2. \end{cases}$$

由此分别得到

$$\begin{cases} b^2 + d^2 = c^2, \\ b^2 + c^2 = a^2, \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} d^2 + b^2 = a^2, \\ d^2 + a^2 = c^2. \end{cases}$$

从而得到$(b,d,c,a)$和$(d,b,a,c)$中必有一个是解$(x_0,y_0,z_0,u_0)$．

因为$x_0 = 2mn = 2mbd$，所以$b < x_0$与$x_0$的选取矛盾．

由以上，题中的正四棱锥不存在．

12·142 设$a,b,c$都是整数，且$a>0$，$ac - b^2 = p = p_1p_2\cdots p_n$，其中$p_1,p_2,\cdots,p_n$是互异的素数，设$M(n)$表示满足方程$ax^2 + 2bxy + cy^2 = n$的整数解的组数．

求证$M(n)$为有限数，且对每个非负整数$k$，都有$M(p^kn) = M(n)$．

（第34届国际数学奥林匹克预选题，1993年）

［证］ 设整数对$(x,y)$满足方程

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = p^kn. \qquad ①$$

将①式两边乘以$a$，并注意$ac - b^2 = p$，得到

$$(ax + by)^2 + py^2 = ap^kn. \qquad ②$$

类似地，将①式两边乘以$c$，又可得到

$$(bx+cy)^2+py^2=ap^kn. \qquad ③$$

由②和③知，$M(n)$为有限数. 且$(ax+by)^2$与$(bx+cy)^2$都能被$p$整除. 由于$p=p_1p_1\cdots p_n$，所以$ax+by$与$bx+cy$都能被$p$整除. 从而存在整数$X$和$Y$，使得

$$\begin{cases} ax+by=-pY, \\ bx+cy=pX. \end{cases} \qquad ④$$

由于$ac-b^2=p\neq 0$，则④有惟一解：

$$\begin{cases} x=-bX-cY, \\ y=aX+bY. \end{cases} \qquad ⑤$$

将⑤代入①，化简后可得

$$aX^2+2bXY+cY^2=p^{k-1}n.$$

这表明，当整数对$(x,y)$是$①_k$的解时，由④给出的整数对$(X,Y)$是$①_{k-1}$的解，反之亦然，于是，我们就在$①_k$与$①_{k-1}$之间建立了一个双射，所以二者的整数解的组数相等，即有$M(p^kn)=M(p^{k-1}n)$，由此类推可得$M(p^kn)=M(n)$.

12·143　$a$是大于零的实数，已知存在惟一的实数$k$，使得关于$x$的二次方程$x^2+(k^2+ak)x+1999+k^2+ak=0$的两个根均为素数，求$a$的值.

（中国初中数学联赛，1999年）

［解］　设方程的两个素数根$p,q$.

由一元二次方程根与系数的关系，有

$$p+q=-k^2-ak, \qquad ①$$

$$pq=1999+k^2+ak. \qquad ②$$

①＋②得　$p+q+pq=1999.$

即　　$(p+1)(q+1)=2000=2^4\times 5^3. \qquad ③$

由③知，$p$和$q$均不能为2，故$p$和$q$是奇素数.

若$\frac{p+1}{2}$为奇数，必有$\frac{p+1}{2}=5^r(r=1,2,3)$.

则　　$p=2.5^r-1$，

即　　$p=9$或$49,249$均为合数，则$\frac{p+1}{2}$为偶数.

同理，$\frac{q+1}{2}$也为偶数.

因此，$\frac{p+1}{4}$，$\frac{q+1}{4}$均为整数，且$\frac{p+1}{4}\cdot\frac{q+1}{4}=5^3$.

不妨设 $p\leqslant q$，则$\frac{p+1}{4}=1$ 或 5，

此时 $p=3,q=499$，或 $p=19,q=99$.

而 $q=99$ 不是素数. 于是只有 $p=3,q=499$.

代入①得　$3+499=-k^2-ak$，

即　　$k^2+ak+502=0$.

依题意，该方程有惟一实数解.

所以 $\Delta=a^2-4\times502=0$，得 $a=2\sqrt{502}$.

12·144　求一切实数 $p$，使得三次方程

$5x^3-5(p+1)x^2+(71p-1)x+1=66p$

的三个根均为自然数.

（中国高中数学联赛，1995 年）

**[解 1]**　由于 $5-5(p+1)+(77p-1)+1=66p$，

则 $x=1$ 是原三次方程的一个自然数解.

由综合除法将原三次方程降为二次方程

$$5x^2-5px+66p-1=0 \qquad ①$$

本题转化为：求一切实数 $p$，使方程①有两个自然数解.

设 $u,v(u\leqslant v)$是方程①的两个自然数解，由韦达定理可以得出

$$\begin{cases} v+u=p, & ②\\ vu=\frac{1}{5}(66p-1). & ③\end{cases}$$

从②，③中消去 $p$ 得

$$5uv=66(u+v)-1. \qquad ④$$

由④可知，$u,v$ 都不能被 2，3，11 整除.

由④得　$v=\frac{66u-1}{5u-66}$. ⑤

因为 $u,v$ 为自然数，则

$u>\frac{66}{5}$，有 $u\geqslant14$.

又　$2\nmid u$，$3\nmid u$，则 $u\geqslant17$.

再由 $v\geqslant u$ 得　$\frac{66u-1}{5u-66}\geqslant u$，

即 $$5u^2-132u+1\leqslant 0.$$

于是有 $$u\leqslant\frac{66+\sqrt{66^2-5}}{5}<\frac{132}{5}.$$

故 $17\leqslant u\leqslant 26$.

再由 $2\nmid u$, $3\nmid u$, $11\nmid u$ 可知，$u$ 只能取 17,19,23,25. 下面分别进行讨论：

当 $u=19$ 时，由⑤，$v\notin N$，舍去；

当 $u=23$ 时，由⑤，$v\notin N$，舍去；

当 $u=25$ 时，由⑤，$v\notin N$，舍去；

而 $u=17$ 时，由⑤，$v=59$.

所以，仅当 $p=u+v=17+59=76$ 时，方程①的两根均为自然数，从而，原方程的三根均为自然数.

**[解 2]** 由解 1⑤式得

$$v=\frac{66u-1}{5u-66}=13+\frac{u+857}{5u-66}$$
$$=13+\frac{1}{5}\left(1+\frac{4351}{5u-66}\right)=13+\frac{1}{5}\left(1+\frac{19\times 229}{5u-66}\right).$$

由于 $v$ 为整数，则 $5u-66\mid 19$ 或 $5u-66\mid 229$.

由于 19,229 均为素数，则有

$$5u-66=19 \text{ 或 } 5u-66=229.$$

当 $5u-66=19$ 时，$u=17$, $v=59$

当 $5u-66=229$ 时，$u=59$, $v=17$ 与假设 $u\leqslant v$ 矛盾.

所以 $p=u+v=76$.

**[解 3]** 由解 1，方程①有自然数的必要条件是 $\Delta=25p^2-4\times 5(66p-1)$ 是完全平方数.

设 $25p^2-20(66p-1)=q^2$.

则 $(5p-132)^2-17404=q^2$

设 $5p-132=m$，则 $m^2-q^2=17404$.

从而，$m$ 和 $q$ 均为偶数. 设 $m=2m_0$, $q=2q_0$.

则 $m_0^2-q_0^2=4351=19\times 229$.

由 $m>q$ 得 $$\begin{cases} m_0-q_0=1,19,229,4351, \\ m_0+q_0=4351,229,19,1. \end{cases}$$

解得 $m_0=\pm 2176, \pm 124$.

因而 $5p-132=2m_0=\pm 4352, \pm 248.$

由解 1 中②式可知，$p$ 为自然数，由③知 $u,v$ 为奇数，再由②式知，$p$ 为偶数.

于是可解得 $p=76.$

12·145 证明方程 $x^2+y^2+z^2=x^3+y^3+z^3$ 有无穷多组整数解 $(x,y,z)$.

（第 57 届莫斯科数学奥林匹克，1994 年）

**[证]** 事实上，对任何正整数 $n$，

$$\begin{cases} x=n(4n^2-1)+1 \\ y=1-n(4n^2-1), \\ z=1-4n^2 \end{cases}$$

都是原方程的解. 这是因为

$$\begin{aligned} x^2(x-1) &= [n(4n^2-1)+1]^2\cdot n(4n^2-1) \\ &= [n(4n^2-1)-1]^2\cdot n(4n^2-1)+(4n^2-1)^2\cdot 4n^2 \\ &= y^2(1-y)+z^2(1-z). \end{aligned}$$

即 $x^2+y^2+z^2=x^3+y^3+z^3.$

12·146 试确定所有满足方程 $x+y^2+z^3=xyz$ 的正整数 $x,y$. 其中 $z$ 是 $x,y$ 的最大公约数.

（第 36 届国际数学奥林匹克预选题，1995 年）

**[解]** 由于 $(x,y)=z$. 可设 $x=zc, y=zb$，其中 $(c,b)=1$.

于是已知方程化为 $zc+z^2b^2+z^3=z^3bc$

即 $c+zb^2+z^2=z^2bc.$ ①

于是 $z\mid c$，即存在整数 $a$，使 $c=za$，从而①又化为 $a+b^2+z=z^2ab,$ ②

即 $$a=\frac{b^2+z}{z^2b-1},$$

(1)如果 $z=1$，则

$$a=\frac{b^2+1}{b-1}=b+1+\frac{2}{b-1}.$$

于是 $b-1\mid 2, b=2$ 或 3. 相应地 $a=5$

$x=zc=z(za)=5,$

所以有解 $(x,y)=(5,2)$ 或 $(5,3)$

(2)如果 $z=2$,则 $a=\dfrac{b^2+2}{4b-1}$,

因而　$16a=\dfrac{16b^2+3^2}{4b-1}=4b+1+\dfrac{33}{4b-1}$,

$4b-1\mid 33$, $b=1$ 或 3. 相应地 $a=1$.

$x=z^2a=4$. $y=zb=2$ 或 6.

所以有解 $(x,y)=(4,2)$ 或 $(4,6)$

(3)如果 $z^2\geqslant 3$,则

$$z^2a=\frac{z^2b^2+z^3}{z^2b-1}=b+\frac{b+z^3}{z^2b-1}.$$

由于 $x=z^2a$ 为正整数,则应有 $\dfrac{b+z^3}{z^2b-1}\geqslant 1$,

即　　$b\leqslant\dfrac{z^2-z+1}{z-1}$.

由于 $z\geqslant 3$,则 $\dfrac{z^2-z+1}{z-1}<z+1$,

从而　　$b<z+1$,有 $b\leqslant z$.

由此可得　$a=\dfrac{b^2+z}{z^2b-1}<\dfrac{z^2+z}{z^2-1}=1+\dfrac{z+1}{z^2-1}<2$.

于是　　$a=1$.

由②式有　$1+b^2+z=bz^2$,

从而 $b$ 是方程 $t^2-z^2t+z+1=0$ 的整数解,考虑判别式 $z^4-4z-4$ 应是完全平方数,但是

$$(z^2-1)^2<z^4-4z-4<z^2,$$

即 $z^4-4z-4$ 介于两个相继平方数之间,因而不是平方数.

所以,$z\geqslant 3$ 时方程无正整数解.

综上,方程的解为

$(x,y)=(4,2),(4,6),(5,2),(5,3)$.

12·147　求不能表示成 $|3^a-2^b|$ 的最小素数,这里 $a$ 和 $b$ 是非负整数.

(中国国家集训队选拔考试,1995 年)

**[解]**　经检验,2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37 都可以写成 $|3^a-2^b|$ 的形式,其中 $a$ 和 $b$ 为非负整数.

$2=3^1-2^0$,　　$3=2^2-3^0$,

数论卷

$5=2^3-3^1$，　$7=2^3-3^0$，

$11=3^3-2^4$，　$13=2^4-3^1$，

$17=3^4-2^6$，　$19=3^3-2^3$，

$23=3^3-2^2$，　$29=2^5-3^1$，

$31=2^5-3^0$，　$37=2^6-3^3$.

我们证明 41 是不能表示成$|3^a-2^b|$的最小素数.

这相当于证明不定方程

$$2^u-3^v=41 \quad ①$$

和

$$3^x-2^y=41 \quad ②$$

没有非负整数解.

设$(u,v)$是方程①的非负整数解，则有

$2^u>41, u\geqslant 6$.

因此$2^u\equiv 0 \pmod 8$，

则$-3^v\equiv 1 \pmod 8$，

或$3^v\equiv -1 \pmod 8$，　③

当 $v$ 为非负偶数时，$3^v\equiv 1 \pmod 8$　④

当 $v$ 为正奇数时，$3^v\equiv 3 \pmod 8$　⑤

④，⑤与③矛盾. 所以，方程①没有非负整数解.

设$(x,y)$是方程②的非负整数解，则

$3^x>41$，知 $x\geqslant 4$.

因此　$3^x\equiv 0 \pmod 3$，$2^y\equiv 1 \pmod 3$，

于是 $y$ 只能为偶数，设 $y=2t$. 有 $2^y\equiv 0 \pmod 4$，

从而　$3^x\equiv 1 \pmod 4$，

由此得知，$x$ 也只能是偶数，设 $x=2s$，则

$41=3^x-2^y=3^{2s}-2^{2t}=(3^s+2^t)(3^s-2^t)$.

即有　$\begin{cases}3^s+2^t=41,\\3^s-2^t=1.\end{cases}$

解得　$3^s=21, 2^t=20$ 此时没有非负整数解 $s,t$.

因而，方程②没有非负整数解. 于是，所求的最小素数为 41.

12·148　$p$ 是一个素数，求方程 $x^p+y^p=p^z$ 的全部正整数组解 $(x,y,z,p)$.

（保加利亚数学奥林匹克，1994 年）

**[解]** 如果$(x,y,z,p)$是方程

$$x^p+y^p=p^z \qquad ①$$

的一组正整数解，由于 $p$ 是素数，则有

$$(x,y)=p^k. \qquad ②$$

这里 $k$ 是一个非负整数. 由②有

$$x=p^kx_0,\quad y=p^ky_0. \qquad ③$$

这里$(x_0,y_0)=1$，$x_0\in N$，$y_0\in N$.

将③代入①得 $x_0^p+y_0^p=p^{z-kp}$ ④

由 $x_0$，$y_0$ 是正整数，则 $p^{z-kp}\geqslant 2$，

从而 $z_0=z-kp$ 为正整数.

这样有 $x_0^p+y_0^p=p^{z_0}$ ⑤

方程⑤与方程①形状相同，但方程⑤中的 $x_0$ 与 $y_0$ 互素. 这时由方程⑤，$x_0$ 和 $y_0$ 都不是 $p$ 的倍数.

当 $p=2$ 时，由⑤知 $x_0$ 和 $y_0$ 都是奇数，此时⑤化为

$$x_0^2+y_0^2=2^{z_0} \qquad ⑥$$

由于 $x_0^2+y_0^2\equiv 2 \pmod 4$，

则 $z_0=1$.

将 $z_0=1$ 代入⑥可得 $x_0=1$，$y_0=1$.

从而由③得 $x=2^k$，$y=2^k$，代入方程①有

$$2^z=x^2+y^2=2^{2k}+2^{2k}=2^{2k+1},$$

$$z=2k+1$$

这时有解$(x,y,z,p)=(2^k,2^k,2k+1,2)$.

当 $p$ 为奇素数时，由于 $x_0+y_0\mid x_0^p+y_0^p$，再由⑤可知 $x_0+y_0$ 是 $p^{z_0}$ 的因数，即存在正整数 $t_0$，使得

$$x_0+y_0=p^{t_0}. \qquad ⑦$$

由于 $p\geqslant 3$，则 $x_0+y_0\geqslant 3$，$x_0^p+y_0^p>x_0+y_0\geqslant 3$，

考虑到方程⑤，则有 $1\leqslant t_0\leqslant z_0-1$，

因而 $x_0^p+(p^{t_0}-x_0)^p=p^{z_0}$，展开上式左端第二项，并注意到 $p$ 是奇数，则上式化为

$$p^{pt_0}-C_p^1p^{(p-1)t_0}x_0+\cdots-C_p^{p-2}p^{2t_0}x_0^{p-2}+C_p^1p^{t_0}x_0^{p-1}=p^{z_0},$$

因为 $p$ 是奇素数，则 $C_p^j(j=1,2,\cdots,p-2)$是 $p$ 的倍数. 而上式左

端除最后一项 $C_p^1p^{t_0}x_0^{p-1}=p^{t_0+1}x_0^{p-1}$ 之外，其余各项均为 $p^{2t_0+1}$的倍数，因此 $p^{z_0}$一定是 $p^{t_0+1}$的倍数，并且一定不是 $p^{t_0+2}$的倍数，于是 $z_0=t_0+1$.



这时由⑦式有 $x_0+y_0=p^{z_0-1}$.

由⑤式又有 $x_0^p+y_0^p=p(x_0+y_0)$. ⑧

另一方面，容易证明 $u^{n-1}>n(u\geqslant 2,u\in N)$，

从而又有 $x_0^p+y_0^p=x_0\cdot x_0^{p-1}+y_0\cdot y_0^{p-1}>p(x_0+y_0)$. ⑨

⑧与⑨矛盾. 因此，$x_0$ 和 $y_0$ 中至少有一个为 1. 不妨设 $x_0=1$.

由 $y_0=p^{z_0-1}-1$, ⑩

及⑧式，$y_0^p-py_0=p-1$. ⑪

从而可知，$y_0$ 是 $p-1$ 的一个因子，由⑩可知

$z_0-1=1$. 即 $z_0=2$. 故 $y_0=p-1$.

再代入⑪式 $(p-1)^p=p(p-1)+p-1=p^2-1$.

由 $p$ 是奇素数，可得 $(p-1)^{p-1}=p+1$.

当 $p>3$ 时，容易证明 $(p-1)^{p-1}>p+1$.

因此有 $p=3$. $y_0=p-1=2$,

则 $x=3^k,y=2\cdot 3^k,z=2+3k$.

再由对称性有 $x=2\cdot 3^k,y=3^k,z=2+3k$.

这样又有解 $(x,y,z,p)=(3^k,2\cdot 3^k,2+3k,3)$,

$(x,y,z,p)=(2\cdot 3^k,3^k,2+3k,3)$.

从而本题的所有解为$(2^k,2^k,2k+1,2)$，$(3^k,2\cdot 3^k,2+3k,3)$，$(2\cdot 3^k,3^k,2+3k,3)$.

**12·149** $x,y,p,n,k$ 都是正整数，且满足：$x^n+y^n=p^k$.

证明 如果 $n$ 是大于 1 的奇数，$p$ 是奇素数，那么，$n$ 可以表示为 $p$ 的以正整数为指数的幂.

（第 22 届全俄数学奥林匹克，1996 年）

**[证]** 设 $m=(x,y)$，则

$$x=mx_1,y=my_1,(x_1,y_1)=1.$$

由已知条件可得 $m^n(x_1^n+y_1^n)=p^k$.

因此，对某个非负整数 $a$，有

$$x_1^n + y_1^n = p^{k-n\alpha}.$$

由于 $n$ 是奇数,则有

$$\frac{x_1^n + y_1^n}{x_1 + y_1} = x_1^{n-1} - x_1^{n-2}y + x_1^{n-3}y^2 - \cdots - x_1 y^{n-2} + y_1^{n-1}.$$

设上式等号右端的数为 $A$,

由 $p>2$,$x_1$ 与 $y_1$ 至少有一个大于 1,$n>1$ 可知,$A>1$.

由等式①推出 $A(x_1+y_1)=p^{k-n\alpha}$,

因为 $x_1+y_1>1$,$A>1$,所以 $p|A$,$p|x_1+y_1$.

因而存在某个正整数 $\beta$,使 $x_1+y_1=p^\beta$.这样就有

$$\begin{aligned} A &= x_1^{n-1} - x_1^{n-2}(p^\beta - x_1) + x_1^{n-3}(p^\beta - x_1)^2 + \cdots \\ &\quad - x_1(p^\beta - x_1)^{n-2} + (p^\beta - x_1)^{n-1} \\ &= nx_1^{n-1} + Bp \end{aligned}$$

其中 $B$ 是某一个正整数.

由于 $p|A$,$(x_1,p)=1$,所以 $p|n$.

设 $n=pq$,那么 $x^{pq}+y^{pq}=p^k$,即 $(x^p)^q+(y^p)^q=p^k$.

如果 $q>1$,可以用上面的证法(把 $x^p$ 和 $y^p$ 各看作一个数)得到 $p|q$.

如果 $q>1$,则 $n=p$.

这样重复下去,便可推出,对某个正整数 $l$,有 $n=p^l$.

12·150　已知 $x,y$ 是互素的正整数,$k$ 是大于 1 的正整数,找出满足 $3^n=x^k+y^k$ 的所有自然数 $n$,并给出证明.

(第 22 届全俄数学奥林匹克,1996 年)

[证]　设 $3^n=x^k+y^k$,$(x,y)=1$,$x,y\in N$,不妨设 $x>y$,$k>1$,$k\in N$,$n\in N$.

显然,$x,y$ 中的任何一个都不能被 3 整除.

若 $k$ 是偶数,则

$$x^k\equiv1(\mathrm{mod}\ 3),\ y^k\equiv1(\mathrm{mod}\ 3),$$

因而　$x^k+y^k\equiv2(\mathrm{mod}\ 3)$,

显然　$3^n\neq x^k+y^k$

若 $k$ 是奇数,且 $k>1$,则

$$3^n=(x+y)(x^{k-1}-x^{k-2}y+\cdots+y^{k-1}),$$

这样就有 $x+y=3^m, m\geqslant 1$.

$$\begin{aligned}A&=x^{k-1}-x^{k-2}y+x^{k-3}y^2-\cdots-xy^{k-2}+y^{k-1}\\&=x^{k-1}-x^{k-2}(3^m-x)+x^{k-3}(3^m-x)^2\cdots\cdots\\&\quad-x(3^m-x)^{k-2}+(3^m-x)^{k-1}\\&=nx^{k-1}+3B\ (B\text{ 是某个整数}).\end{aligned}$$

由上面证明 $3\nmid x, 3\mid A$，于是 $3\mid k$.

取 $x_1=x^{\frac{k}{3}}, y_1=y^{\frac{k}{3}}$ 代入 $x+y=3^m$ 得

$$x_1^{\frac{3}{k}}+y_1^{\frac{3}{k}}=3^m.\text{ 于是 } k=3.$$

这样，已知方程化为 $x^3+y^3=3^n, x+y=3^m$.

要证明 $n\geqslant 2m$，只要证明

$x^3+y^3\geqslant(x+y)^2$，即 $x^2-xy+y^2\geqslant x+y$.

由于　$x\geqslant y+1$，则 $x^2-x\geqslant xy$.

从而　$(x^2-x-xy)+(y^2-y)\geqslant 0$,

即前式成立，故 $n\geqslant 2m$,

由恒等式 $(x+y)^3-(x^3+y^3)=3xy(x+y)$ 可以推出

$$3^{2m-1}-3^{n-m-1}=xy. \qquad (※)$$

由于　$2m-1\geqslant 1, n-m-1\geqslant n-2m\geqslant 0$,(※※)

因此，如果(※,※)中至少有一个不等号是严格不等号，那么(※)式左端可被3整除，但右端不能被3整除，从而推出矛盾.

如果 $n-m-1=n-2m=0$，那么 $m=1, n=2$，且 $3^2=2^3+1^3$，故 $n=2$.

12·151　($a$)设 $n$ 是一个正整数. 证明存在不同的正整数 $x, y, z$，使得

$$x^{n-1}+y^n=z^{n+1}. \qquad ①$$

($b$)设 $a, b, c$ 是正整数，且 $a$ 与 $b$ 互素，$c$ 或与 $a$ 互素，或与 $b$ 互素. 证明存在无限多个不同正整数 $x, y, z$ 的三元数组，使得

$$x^a+y^b=z^c. \qquad ②$$

（第38届国际数学奥林匹克预选题，1997年）

[解]

($a$)设 $\begin{cases}x=2^{n^2}\cdot 3^{n+1},\\ y=2^{(n-1)n}\cdot 3^n,\\ z=2^{n^2-2n+2}\cdot 3^{n-1}.\end{cases}$

则 $x^{n-1}+y^n=2^{n^3-n^2}\cdot 3^{n^2-1}+2^{n^3-n^2}\cdot 3^{n^2}$

$$=2^{n^3-n^2}(3^{n^2-1}+3^{n^2})=2^{n^3-n^2+2}\cdot 3^{n^2-1}$$

$$=2^{(n+1)(n^2-2n+2)}\cdot 3^{(n-1)(n+1)}=z^{n+1}.$$

于是①有无穷多组解.

(b)设 $p(p\geqslant 3)$是正整数,$Q=p^c-1\geqslant 1$.

我们寻求如下形式的解:

$$\begin{cases}x=Q^m,\\ y=Q^n,\\ z=PQ^k.\end{cases}$$

由方程②有

$$Z^c=P^cQ^{ck}=(Q+1)Q^{ck}=Q^{ck+1}+Q^{ck}$$

$$=x^a+y^b=Q^{mQ}+y^{bn}.$$

因此,当方程组

$$\begin{cases}ma=kc+1,\\ nb=kc;\end{cases}\qquad \begin{cases}nb=kc+1,\\ ma=kc\end{cases}$$

的一组有解时,方程②有解.

这意味着,或者$(a,bc)=1$,或者$(b,ac)=1$.

假设$(a,bc)=1$.我们证明第一个方程组有解.

令 $k=bt,n=ct$,则由 $ma=kc+1$ 得

$$ma=tbc+1, \qquad ③$$

因而有 $(a,bc)=1$.

这时,对一次不定方程③,正整数 $m$ 和$t$ 都可求出,从而第一个方程组有解.

由于$(kc,kc+1)=1$,从而 $m\neq n$,进而 $x\neq y$,又因为数 $z$ 与$x$ 和$y$不同,于是方程②对不同的 $P$ 可有不同的解.

12·152 求所有的整数对$(a,b)$,其中 $a\geqslant 1,b\geqslant 1$,且满足等式 $a^{b^2}=b^a$. ①

(第 38 届国际数学奥林匹克,1997 年)

[解] 当 $a,b$ 中有一个等于 1,则另一个必为 1,所以有一组解

$$(a,b)=(1,1).$$

当 $a,b\geqslant 2$ 时,设 $t=\frac{b^2}{a}$.①化为 $a^{\frac{b^2}{a}}=b=a^t$,

且 $at=b^2=a^{2t}$.

从而 $\quad t=a^{2t-1}$,有 $t>0$.

如果 $2t-1\geqslant 1$,则

$$t=a^{2t-1}\geqslant(1+1)^{2t-1}\geqslant 1+(2t-1)=2t>t$$

矛盾,知 $2t-1\geqslant 1$ 不真,从而 $2t-1<1$.

于是 $\quad 0<t<1$.

设 $k=\frac{1}{t}$,则 $k$ 为大于1的有理数.

由 $a=b^k$ 可知 $k=b^{k-2}$. ②

由 $k>1$ 知 $k>2$.

设 $k=\frac{p}{q}$, $p,q\in N$, $(p,q)=1$,

由 $k>2$ 知 $p>2q$.

由②式可得 $\left(\frac{p}{q}\right)^q=k^q=b^{p-2q}\in Z$.

这意味着 $q^q\mid p^q$.

但 $(p,q)=1$,则 $q=1$.

从而 $k$ 为大于2的自然数.

当 $b=2$ 时,由②式得 $k=2^{k-2}>2$,知 $k\geqslant 4$.

由 $k=2^{k-2}\geqslant C_{k-2}^0+C_{k-2}^1+C_{k-2}^2$

$$=1+(k-2)+\frac{(k-2)(k-3)}{2}$$

$$=1+\frac{(k-1)(k-2)}{2}\geqslant 1+k-1=k.$$

等号当且仅当 $k=4$ 成立,所以 $a=b^k=2^4=16$.

这时有解 $\quad (a,b)=(16,2)$.

当 $b\geqslant 3$ 时, $k=b^{k-2}\geqslant(1+2)^{k-2}\geqslant 1+2(k-2)=2k-3$.

从而 $\quad k\leqslant 3$. 注意到 $k>2$,所以 $k=3$.

于是只有 $b=3$. $a=b^k=3^3=27$.

这时有解 $\quad (a,b)=(27,3)$.

综上,本题有解 $(1,1)$, $(16,2)$, $(27,3)$.

12·153 对给定的正整数 $m$,求出一切正整数组 $(n,x,y)$,其中 $m,n$ 互素,且满足

$$(x^2+y^2)^m=(xy)^n.$$

(第 53 届美国普特南数学竞赛,1992 年)

**[解]** 设$(n,x,y)$是方程的一组正整数解.

由算术—几何平均不等式,有

$$(xy)^n=(x^2+y^2)^m\geqslant(2xy)^m.$$

因此 $n>m$.

设 $p$ 是一个素数,且 $p^a\parallel x,p^b\parallel y$.则

$$p^{(a+b)^n}\parallel(xy)^n. \quad ①$$

若 $a<b$,则 $p^{2am}\parallel(x^2+y^2)^m$. ②

由①,②有 $2am=(a+b)^n$

这与 $n>m$ 矛盾.

类似地,假设 $a>b$,同样推出矛盾.

于是,对一切素数 $p$,都有 $a=b$.

由此可断定 $x=y$.

因而,已知方程化为 $(2x^2)^m=x^{2n}$

即 $x^{2(n-m)}=2^m$.

这就说明,$x$ 是 2 的整数次幂.

不妨设 $x=2^a$.则 $2^{2a(n-m)}=2^m$

有 $2a(n-m)=m$,则 $2an=m(2a+1)$.

由于 $(m,n)=(2a,2a+1)=1$.

必有 $m=2a,n=2a+1$.

由此可知,$m$ 取奇数时,方程无解.

$m$ 是偶数时,方程有解

$$(n,x,y)=(m+1,x^{\frac{m}{2}},y^{\frac{m}{2}}).$$

12·154 设 $ABCD$ 是一块矩形的板,$|AB|=20$,$|BC|=12$.这块板分成 $20\times12$ 个单位正方形.

设 $r$ 是给定的正整数.当且仅当两个小方块的中心之间的距离等于$\sqrt{r}$时,可以把放在其中一个小方块的硬币移到另一小方块中.

在以 $A$ 为顶点的小方块中放有一个硬币,我们的工作是要找出一系列的移动,使这硬币移到以 $B$ 为顶点的小方块中.

($a$)证明当 $r$ 被 2 或 3 整除时,这一工作不能够完成;

($b$)证明当 $r=73$ 时,这项工作可以完成;

(c)当 $r=97$ 时,这项工作能否完成.

(第 37 届国际数学奥林匹克,1996 年)

数论卷

[解] 把小方块按它所在的行数及列数进行编号,以 $(i,j)$ 表示第 $i$ 行第 $j$ 列的小方块,其中 $i=1,2,\cdots,12,j=1,2,\cdots,20$.

由题意可知,在 $(i_1,j_1)$ 中的硬币可以移到 $(i_2,j_2)$ 的条件是

$$(i_1-i_2)^2+(j_1-j_2)^2=r. \qquad (※)$$

(a)分 $2|r$ 及 $3|r$ 讨论.

当 $2|r$ 时.由(※)式,$i_1-i_2$ 与 $j_1-j_2$ 的奇偶性相同,即

$$i_1-i_2\equiv j_1-j_2 \pmod 2.$$

从而 $i_1-j_1\equiv i_2-j_2 \pmod 2$.

从顶点为 $A$ 的小方块移到顶点为 $B$ 的小方块相当于从 $(1,1)$ 移到 $(1,20)$,由于

$$1-1\not\equiv 1-20 \pmod 2,$$

所以,$2|r$ 时,这一工作不能完成.

当 $3|r$ 时,由(※)式有

$$(i_1-i_2)^2+(j_1-j_2)^2\equiv 0 \pmod 3.$$

由于完全平方数对 mod 3,只能为 0 和 1,因此,只能有 $i_1-i_2\equiv j_1-j_2\equiv 0 \pmod 3$,

从而 $i_1+j_1\equiv i_2+j_2 \pmod 3$,

由于 $1+1\not\equiv 1+20 \pmod 3$,

所以,$3|r$ 时,这一工作不能完成.

(b)当 $r=73$ 时,由(※)式有

$$(i_1-i_2)^2+(j_1-j_2)^2=73.$$

由于 $3^2+8^2=73$.

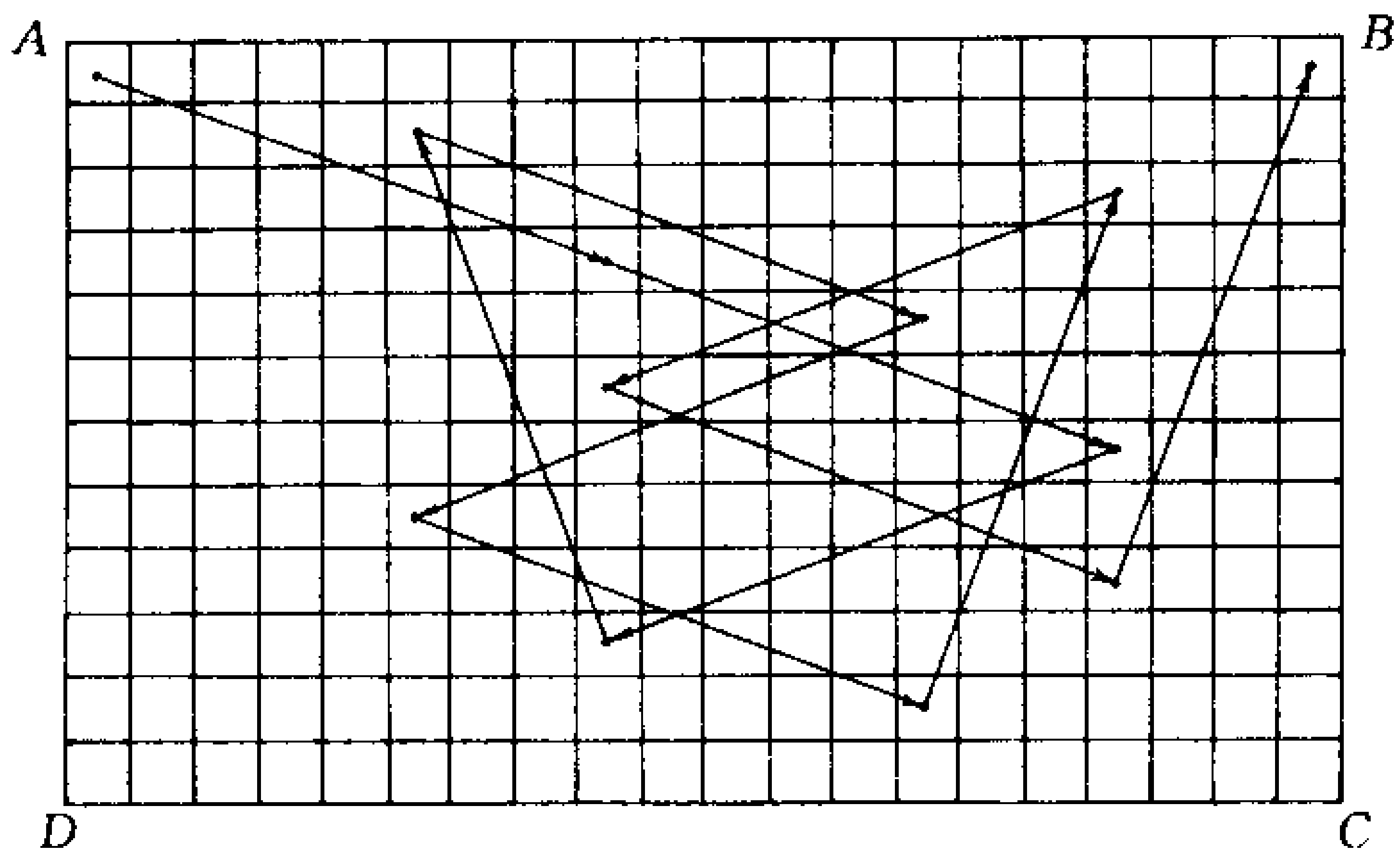
因此,$|i_1-i_2|$ 与 $|j_1-j_2|$ 中一个为 3,一个为 8 就可以完成移动.我们可以用以下的移动把硬币从 $(1,1)$,移到 $(1,20)$.

$(1,1)\longrightarrow(4,9)\longrightarrow(7,17)\longrightarrow(10,9)\longrightarrow(2,6)\longrightarrow(5,14)\longrightarrow(8,6)\longrightarrow(11,14)\longrightarrow(3,17)\longrightarrow(6,9)\longrightarrow(9,17)\longrightarrow(1,20)$.

(c)当 $r=97$ 时,(※)式化为 $(i_1-i_2)^2+(j_1-j_2)^2=97$

由于 $97=4^2+9^2$

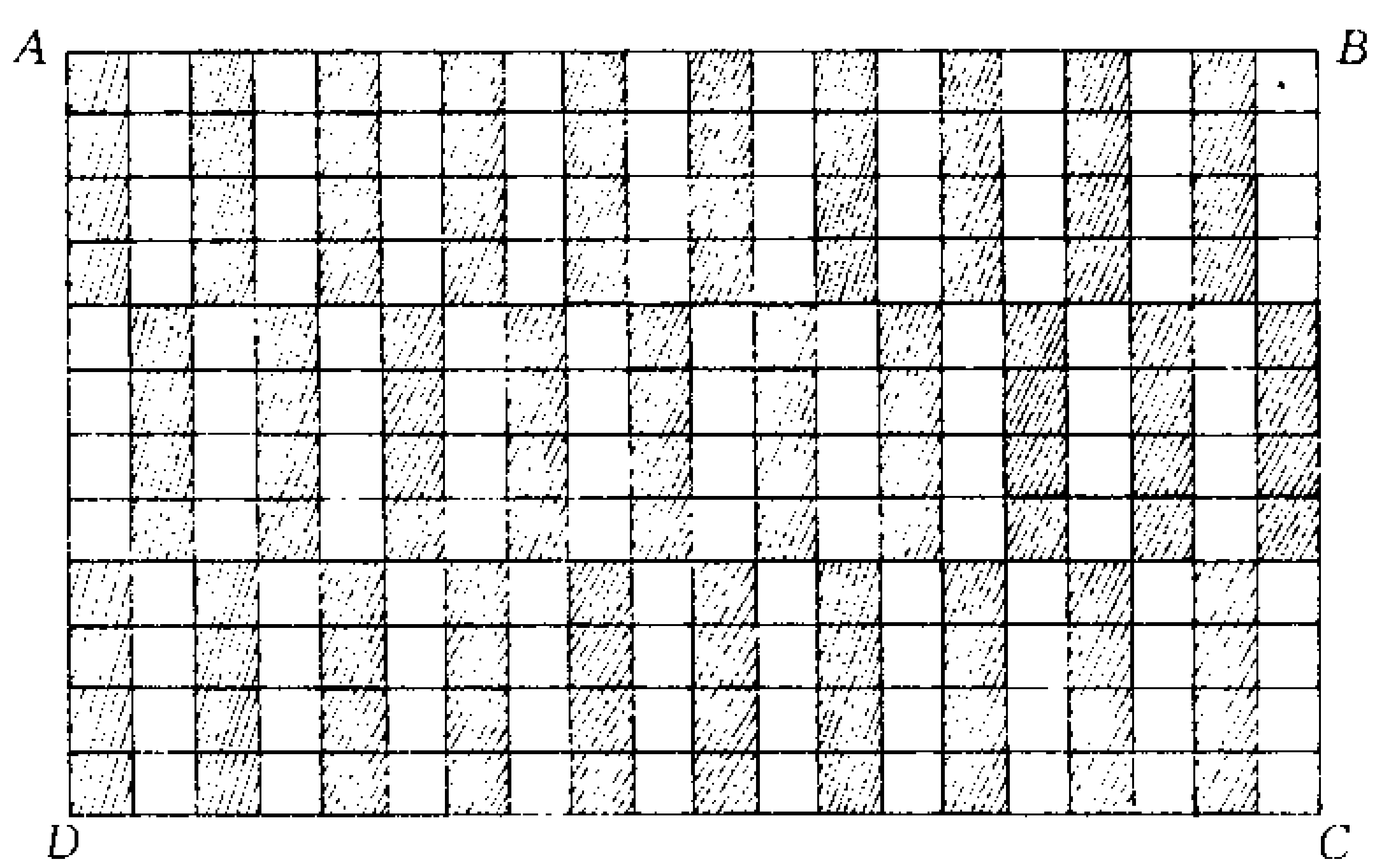
因此,$|i_1-i_2|$ 与 $|j_1-j_2|$ 中一个应为 4,一个应为 9.但是,这时符合要




(b)的解

求的一系列移动是不存在的,这是因为这块板太小,把每一列的 12 块小方块分成四块一组,而每四块看成一大块,然后仿照国际象棋棋盘的方式把它们染成黑白两色(如图).

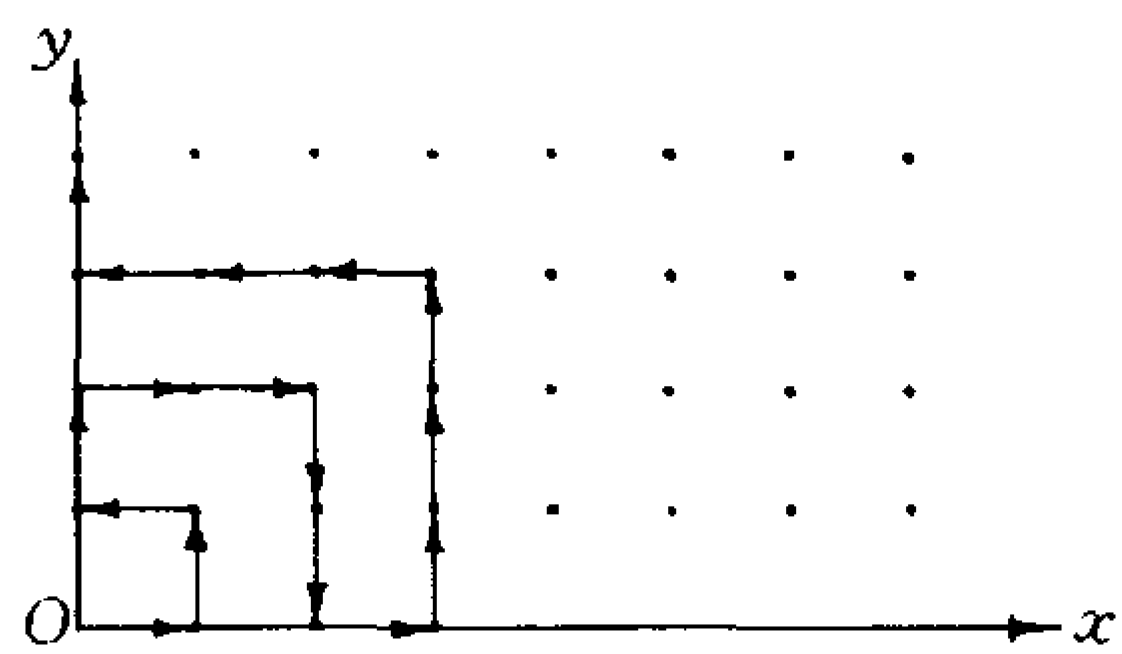
于是,在黑格中的硬币只能移到黑格中,由于(1,1)是黑格,而(1,20)是白格,因此不存在所要求的一系列移动.



# 第十三章 整 点

13·1 在直角坐标平面的第一象限中,把坐标都是整数的点按以下方法编号:

(0,0) 点第 1 号
(1,0) 点第 2 号
(1,1) 点第 3 号
(0,1) 点第 4 号
(0,2) 点第 5 号
(1,2) 点第 6 号
(2,2) 点第 7 号
(2,1) 点第 8 号
(2,0) 点第 9 号




按图中箭头的顺序,问第 2000 号点的坐标是什么?

(中国北京市高中数学竞赛,1979 年)

[解] 注意,满足条件

$$0 \leqslant x \leqslant k, \quad 0 \leqslant y \leqslant k$$

的坐标为整数的点$(x,y)$一共有$(k+1)^2$个.

考虑满足不等式

$$(k+1)^2 < 2000$$

的最大整数 $k$. 解得 $k = 43$.

所以编号为 2000 的点的纵坐标为 44 或横坐标为 44.

因为 44 是偶数,所以应该从(0,44) 往右数,因为

$$2000 - 44^2 = 64 > 44.$$

所以第 2000 号点的横坐标是 44,并且它的纵坐标是

$$44-(64-45)=25.$$

因此,编号为 2000 点的纵坐标是(44,25).

13·2　在三维欧氏空间内任意给定 9 个整点,求证其中至少有两点连接的线段上也存在整点.

(第 32 届美国普特南数学竞赛,1971 年)

[证]　将空间整点的坐标按奇偶性分类,则只可能分成下列八类:

(奇,奇,奇),(奇,奇,偶),(奇,偶,奇),(奇,偶,偶),

(偶,奇,奇),(偶,奇,偶),(偶,偶,奇),(偶,偶,偶),

因此,在给定9个已知点中,至少有某两点 $P$ 与$Q$ 的同名坐标具有相同的奇偶性,于是线段 $PQ$ 的中点显然是一个整点.

13·3　空间中有一凸多面体,它的所有顶点都位于整点上(每个顶点的三个坐标值都是整数),此外,在多面体的内部,面上和棱上都不再有其他整点.

证明多面体顶点的数目不超过 8 个.

(第 40 届莫斯科数学奥林匹克,1977 年)

[证]　每个整点的三个坐标按奇偶性可有如下八种情形:

(奇,奇,奇)、(奇,奇,偶)、(奇,偶,奇),

(奇,偶,偶)、(偶,奇,奇)、(偶,奇,偶),

(偶,偶,奇)、(偶,偶,偶).

如果这个多面体有 9 个顶点,则一定有两个顶点的三个坐标的奇偶性完全相同,这时,这两个顶点连线的中点也是整点,由多面体的凸性可知,该整点属于这个多面体,与已知矛盾.

13·4　试证在平面上所有过点$(\sqrt{3},0)$的直线中,至少经过两个有理点(坐标为有理数的点)的直线,有并且只有一条.

(中国甘肃省数学竞赛,1979 年)

[证]　经过点$(\sqrt{3},0)$的直线可分为与 $x$ 轴垂直,与 $x$ 轴重合,与 $x$ 轴既不垂直也不重合三种情形.

(1) 直线 $l$ 经过点$(\sqrt{3},0)$且与 $x$ 轴垂直时,其方程为

$$x=\sqrt{3}.$$

显然，直线 $l$ 上没有有理点.

(2) 直线 $l$ 经过点$(\sqrt{3},0)$ 且与 $x$ 轴重合时，其方程为

$$y = 0.$$

显然，直线 $l$ 上有无穷多个有理点.

(3) 直线 $l$ 经过点$(\sqrt{3},0)$ 且与 $x$ 轴既不垂直也不重合时，其方程为

$$y = k(x - \sqrt{3}). \quad (k \neq 0).$$

若此直线经过两个有理点$(x_1,y_1)$ 与$(x_2,y_2)$，则

$$y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x_1 - \sqrt{3}),$$

$$\sqrt{3} = x_1 - \frac{y_1(x_2 - x_1)}{y_2 - y_1}.$$

此式右端为有理数，显然不等于$\sqrt{3}$，即直线 $l$ 不可能经过两个有理点.

故经过$(\sqrt{3},0)$ 的一切直线中，至少经过两个有理点的直线，有且只有一条 $y = 0$.

13·5　试验证圆周 $x^2 + 2x + y^2 = 1992$ 经过点 $A(42,12)$，并证明该圆周上含有无穷多个点 $B(x,y)$，它们的两个坐标 $x$ 和 $y$ 都是有理数.

（乌克兰数学奥林匹克，1992 年）

**[解]**　由于　$42^2 + 2 \cdot 42 + 12^2 = 1992$，

所以 $A(42,12)$ 在该圆周上.

考察任意一条经过点 $A(42,12)$ 的直线

$$y - 12 = k(x - 42)$$

其中 $k$ 为有理数.

我们求直线与圆周的另一个交点，为此解方程组

$$\begin{cases} y - 12 = k(x - 42), & ① \\ x^2 + 2x + y^2 = 1992. & ② \end{cases}$$

将 ① 代入 ② 得

$x^2 + 2x + [k(x - 42) + 12]^2 = 1992$，即

$(1 + k^2)x^2 + 2(1 + 12k - 42k^2)x + (12 - 42k)^2 - 1992 = 0.$

显然 $x_1 = 42$ 是这个方程的一个根. 由于此方程的系数均为有理数，则它的另一个根 $x$ 也是有理数，并且 $y = k(x - 42) + 12$ 也是有理数.

即直线与圆周的另一个交点 $B(x,y)$ 的坐标 $x$ 和 $y$ 都是有理数,由于经过 $A$ 点,斜率 $k$ 为有理数的直线有无数条,所以该圆周上含有无穷多个有理点 $B(x,y)$.

13·6　试证在半径为1的圆周上存在1975个点,其中任意两点的直线距离都是有理数.

(第17届国际数学奥林匹克,1975年)

［证］　设半圆直径 $RS=1$. 令 $k=1973!$,设

$$u_1=1,\quad v_1=k,$$

$$u_2=2,\quad v_2=\frac{k}{2},$$

$$\cdots\cdots$$

$$u_{1973}=1973,\quad v_{1973}=\frac{k}{1973}.$$

则 $u_i,v_i$ 均为正整数,且

$$2u_1v_1=2u_2v_2=\cdots=2u_{1973}v_{1973}=2\cdot 1973!.$$

$$u_1^2+v_1^2>u_2^2+v_2^2>\cdots>u_{1973}^2+v_{1973}^2.$$

于是有

$$\frac{2u_1v_1}{u_1^2+v_1^2}<\frac{2u_2v_2}{u_2^2+v_2^2}<\cdots<\frac{2u_{1973}v_{1973}}{u_{1973}^2+v_{1973}^2}.$$

这样,在直径 $RS=1$ 的半圆上自 $R$ 起顺时针方向取点 $A_1,A_2,\cdots,A_{1973}$,使得

$$A_iR=\frac{2u_iv_i}{u_i^2+v_i^2}\quad(i=1,2,\cdots,1973).$$

由于 $\frac{2u_iv_i}{u_i^2+v_i^2}<1$,这是可以办到的.

由
$$\left(\frac{2uv}{u^2+v^2}\right)^2+\left(\frac{u^2-v^2}{u^2+v^2}\right)^2=1$$

及
$$A_iR^2+A_iS^2=RS^2=1,$$

则
$$A_iS=\frac{u_i^2-v_i^2}{u_i^2+v_i^2}\quad(i=1,2,\cdots,1973).$$

下面我们证明,这样选出的1975个点:

$$R,\quad A_1,\quad A_2,\quad \cdots,\quad A_{1973},\quad S$$

每两点之间的距离都是有理数.

由 $u_i, v_i$ 是整数可知 $A_iR, A_iS$ 为有理数，下面只要证明 $A_iA_j(i \neq j, i, j = 1, 2, \cdots, 1973)$ 是有理数就可以了.



事实上，

$$
\begin{aligned}
A_iA_j &= \sin\angle A_iRA_j \\
&= \sin(\angle A_iRS - \angle A_jRS) \\
&= \sin\angle A_iRS \cdot \cos\angle A_jRS - \cos\angle A_iRS \cdot \sin\angle A_jRS.
\end{aligned}
$$

因为 $\sin\angle A_iRS = A_iS$，　$\cos\angle A_iRS = A_iR$，

$\sin\angle A_jRS = A_jS$，　$\cos\angle A_jRS = A_jR$.

而 $A_iS, A_iR, A_jS, A_jR$ 都是有理数.

所以 $\sin\angle A_iRA_j$ 即 $A_iA_j$ 为有理数.

以半圆的圆心 $O$ 为位似中心，把圆位似放大 2 倍，这时半径为 $\frac{1}{2}$ 的圆变为半径为 1 的圆，小半圆上的 1975 个点 $R, A_1, A_2, \cdots, A_{1973}, S$ 变为大圆上 $R', A_1', A_2', \cdots, A_{1973}', S'$，它们位于半径为 1 的圆上，且任意两点的距离都是有理数.

13·7　证明曲线 $y = \frac{1}{5}(x^2 - x + 1)$ 不可能经过两个坐标都是整数的点.

（中国北京市高中一年级数学竞赛，1984 年）

［证］　设 $x = 5n + r$，其中 $n$ 是整数，$r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$，则

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{1}{5}[(5n + r)^2 - (5n + r) + 1] \\
&= 5n^2 + (2r - 1)n + \frac{1}{5}(r^2 - r + 1).
\end{aligned}
$$

当 $r = 0, 1, 2, 3, 4$ 时，

$r^2 - r + 1 = 1, 1, 3, 7, 13$，均不是 5 的倍数，因而 $\frac{1}{5}(r^2 - r + 1)$ 不是整数.

而 $5n^2 + (2r - 1)n$ 是整数.

于是，对任意的整数 $x$，$y$ 都不可能取整数，因此，曲线 $y = \frac{1}{5}(x^2 - x + 1)$ 不可能经过整点.

13·8　$R$ 为一个长方形，它是若干个长方形 $\{R_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$ 的并集，满足

(1)$R_i$ 的边与 $R$ 的边平行；

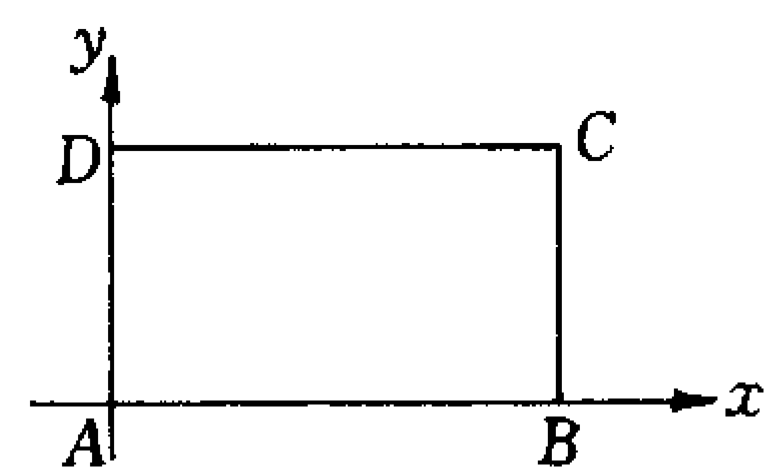
(2)$R_i$ 互不重叠；

(3) 每个 $R_i$ 都至少有一条边长为整数.

证明 $R$ 至少有一条边长是整数.

（第 30 届国际数学奥林匹克预选题，1989 年）

[证]　设 $R$ 为矩形 $ABCD$.



以 $A$ 为原点，$AB$ 所在直线为 $x$ 轴，$AD$ 所在直线为 $y$ 轴建立直角坐标系.

为证明 $R$ 至少有一条边长为整数，只要证明 $B,C,D$ 中至少有一个是整点即可.

因为每一个小矩形 $R_i$ 至少有一条边长为整数，且它的边与坐标轴平行，

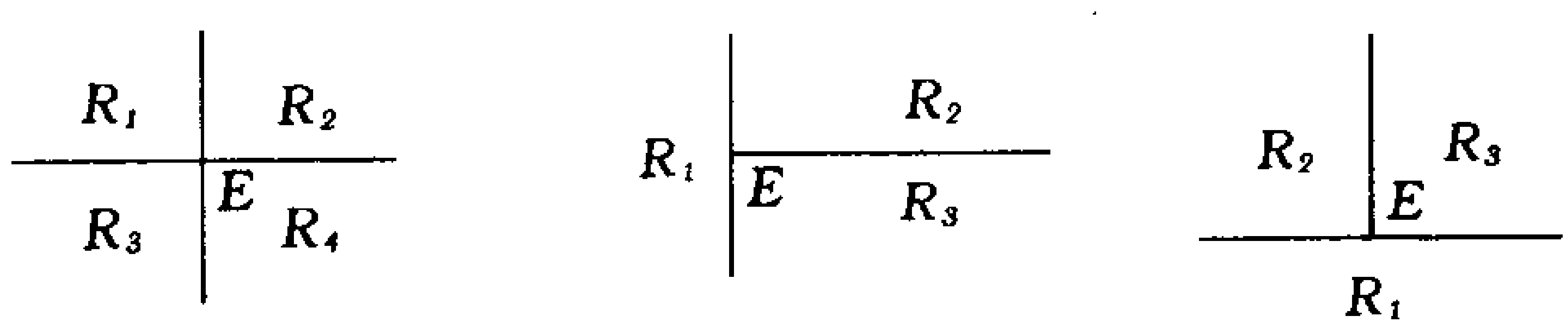
所以 $R_i$ 的顶点中整点的个数为 0，2 或 4.

所以所有 $R_i$ 的顶点中，整点的个数为偶数. 这里一个顶点如果同时是 $k$ 个 $R_i$ 的顶点，则被计算 $k$ 次.

$A$ 是整点，并且只被计算 1 次.

如图，矩形 $ABCD$ 内部的整点 $E$ 可能被计算 4 次，也可能被计算 2 次，

于是内部顶点中整点的个数是偶数.



（$E$ 被计算 4 次）　　　　　　（$E$ 被计算 2 次）

又由于整点的总个数是偶数，$R$ 内部的整点个数为偶数，$R$ 的顶点 $A$ 被计算 1 次，所以 $B,C,D$ 中至少有一个是整点.

因此，$R$ 至少有一条边长为整数.

13·9　设 $x,y$ 是使 $xy-1$ 能被素数 1979 除尽的整数，以 $(x,y)$ 为坐标的那些点，如果有三点在一条直线上，求证这三点中至少有两点，它们的横坐标之差与纵坐标之差都能被 1979 除尽.

（中国四川省数学竞赛，1979 年）

**[证]** 记 $1979 = p$.

设 $(x_1, y_1)$ 与 $(x_i, y_i)(i = 2,3)$ 三个整点所共线的既约方程为 $ax + by = c$. 其中 $a, b, c$ 为整数.

若 $p \mid a$, $p \mid b$, 则必有 $p \mid c$, 由此可设 $p \nmid b$.

因为
$$ax_1 + by_1 = c,$$
$$ax_i + by_i = c \quad (i = 2,3),$$
所以
$$a(x_1 - x_i) = b(y_i - y_1). \qquad ①$$
$$a(x_3 - x_2) = b(y_2 - y_3). \qquad ②$$

根据题设
$$x_1 y_1 = 1 + k_1 p,$$
$$x_i y_i = 1 + k_i p, \quad (i = 2,3). \qquad ③$$
所以
$$x_i y_i = x_1 y_1 + (k_i - k_1) p.$$
于是有
$$\begin{aligned}&(x_1 - x_i) b y_i \\ &= b x_1 y_i - b x_i y_i \\ &= b x_1 y_i - b x_1 y_1 - b(k_i - k_1) p \\ &= b x_1 (y_i - y_1) - b(k_i - k_1) p \\ &= a x_1 (x_1 - x_i) - b(k_i - k_1) p,\end{aligned}$$
即
$$(x_1 - x_i)(a x_1 - b y_i) = b(k_i - k_1) p.$$

由此可见，若 $p \nmid (x_1 - x_2)$，则 $p \mid (a x_1 - b y_2)$，

若 $p \nmid (x_1 - x_3)$，则 $p \mid (a x_1 - b y_3)$，

因此，若 $p \nmid (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)$，则
$$p \mid b(y_2 - y_3).$$

因为 $p \nmid b$，则 $\quad p \mid (y_2 - y_3)$.

所以 $\quad p \mid x_2 (y_2 - y_3)$.

又由 ③，$\quad p \mid (1 - x_2 y_2)$，$\quad p \mid (x_3 y_3 - 1)$.

将以上三式相加得
$$p \mid (x_3 - x_2) y_3.$$

由 ③，显然 $\quad p \nmid y_3$，于是
$$p \mid (x_3 - x_2).$$

同理，若 $p \nmid (x_3 - x_2)$，则 $p \mid (x_1 - x_2)$ 或 $p \mid (x_1 - x_3)$.

因此，$x_1 - x_2$，$x_1 - x_3$，$x_3 - x_2$ 三者至少有一个能被 $p$ 整除.

由①,②,若 $p\mid(x_j-x_i)$,则 $p\mid(y_j-y_i)$.

于是本题得证.

13·10　在坐标平面上,横坐标和纵坐标均为整数的点称为整点,对任意自然数 $n$,连结原点 $O$ 与点 $A_n(n,n+3)$,用 $f(n)$ 表示线段 $OA_n$ 上除端点外的整点个数,求 $f(1)+f(2)+\cdots+f(1990)$ 的值.

(中国高中数学联赛,1990 年)

[解]　易见,$n$ 与 $n+3$ 的最大公约数 $d=(n,\ n+3)$ 为

$$d=(n,\ n+3)=\begin{cases}3, 当 3\mid n 时,\\ 1, 当 3\nmid n 时.\end{cases}$$

首先证明当 $d=(n,n+3)=1$ 时,线段 $OA_n$ 内无整点.

否则,设 $(m,l)$ 为 $OA_n$ 内的一个整点,且满足 $1\leqslant m<n$, $1\leqslant l<n+3$,则由

$$\frac{m}{l}=\frac{n}{n+3},$$

即

$$m(n+3)=nl,$$

及 $(n,\ n+3)=1$ 可知 $n\mid m$,与 $m<n$ 矛盾.

当 $d=(n,\ n+3)=3$ 时,设 $n=3k$.

则线段 $OA_n$ 内有两个整点 $(k,k+1)$,$(2k,2k+2)$.

所以有

$$f(k)=\begin{cases}2, & 当 3\mid k 时,\\ 0, & 当 3\nmid k 时.\end{cases}$$

即 $f(1)+f(2)+\cdots+f(1990)=2\cdot\left[\dfrac{1990}{3}\right]=1326$.

13·11　在平面上考虑由整点构成的点网络.试对具有有理斜率的直线证明下述结论:

(1) 这样的直线或者不通过网络点,或者通过无穷多个网络点.

(2) 对于每一条这样的直线,都存在一个正数 $d$,使得除去直线上可能有的网络点之外,再没有网络点与直线的距离小于 $d$.

(第 11 届美国普特南数学竞赛,1951 年)

[证]　(1) 设 $l$ 是一条具有有理斜率的直线,则其方程可以写为

$$ax+by+c=0$$

其中 $a$ 和 $b$ 都是整数,且 $b\neq 0$.

设 $(x_1,y_1)$ 是直线 $l$ 上的一个整点,则

$$ax_1+by_1+c=0.$$

且又有

$$\begin{aligned}&a(x_1+kb)+b(y_1-ka)+c\\=&ax_1+by_1+c=0.\end{aligned}$$

因此,形为$(x_1+kb,y_1-ka),k\in Z$的整点全在直线$l$上.

所以,如果在具有有理斜率的一条直线上有一个整点,则在它上面就有无穷多个整点.

(2) 设$(p,q)$为一整点,则$(p,q)$到直线$l$

$$ax+by+c=0$$

的距离为$d_0=\dfrac{|ap+bq+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

因为$a,b,p,q$均为整数,则$ap+bq$为整数.

若$c$为整数,则

$$d_0=0\text{ 或 }\quad d_0\geqslant\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}.\qquad ①$$

若$c$不是整数,设$e$是与$c$最接近的整数,则

$$d_0\geqslant\frac{|e-c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.\qquad ②$$

由于$(p,q)$是任意的,则存在$d$使之不满足①,②$(d\neq0)$,即存在正数$d$,使得没有直线$l$之外的整点与该直线的距离小于$d$.

13·12　设$L$为平面上所有整点的集合.证明对$L$中的任意三点$A,B,C,L$中有第四点$D$,不同于$A,B,C$,使得线段$AD,BD,CD$的内部不含$L$的点,对于$L$中任意四点,结论是否成立?

(第30届国际数学奥林匹克候选题,1989年)

[解]　连结整点$A(a_1,a_2),B(b_1,b_2)$的线段内部无整点等价于

$$(b_1-a_1,\quad b_2-a_2)=1.$$

不妨设已知的三点为$A(a_1,a_2),\quad B(b_1,b_2),\quad C(0,0)$.

设$(a_2,b_2)=d$,则

$$a_2=a_2'd,\quad b_2=b_2'd,$$
$$(a_2',b_2')=1.$$

由于

$$(a_2'-b_2',\quad b_2')=1,$$

可取整数$s$满足

$$sb_2'\equiv1\qquad(\bmod a_2'-b_2').$$

令 $y = da_2'b_2's + 1$,则

$$(y, y - a_2) = (y, y - b_2) = 1,$$

由于 $b_2's \equiv 1 \pmod{a_2' - b_2'}$,则可设 $b_2's - 1 = k(a_2' - b_2')$.

$$\begin{aligned}(y - a_2,\quad y - b_2) &= (1 + a_2'd(b_2's - 1),\quad a_2 - b_2)\\ &= (1 + a_2'dk(a_2' - b_2'),\quad a_2 - b_2)\\ &= (1 + a_2'k(a_2 - b_2),\quad a_2 - b_2)\\ &= 1.\end{aligned}$$

由中国剩余定理知,有整数 $x$ 满足不定方程组

$$\begin{cases} x \equiv 1 & (\bmod y),\\ x \equiv a_1 + 1 & (\bmod y - a_2),\\ x \equiv b_1 + 1 & (\bmod y - b_2).\end{cases}$$

这里整点 $(x, y)$ 满足

$(x, y) = (x - a_1, y - a_2) = (x - b_1, y - b_2) = 1.$

因此存在第四点 $D$,使得 $AD, BD, CD$ 的内部不含 $L$ 的点.

对任意四点,题中所述结论不一定成立.

设集 $L$ 中的四点为

$$A(0,0),\quad B(1,0),\quad C(0,1),\quad D(1,1).$$

对于任意一点 $E(x, y) \in L$,则 $(x, y)$ 的奇偶分布情况必与 $A, B, C, D$ 中某一点完全相同,从而 $E$ 与这点的对应的坐标之差均为偶数,连结这点与 $E$ 的线段内部必有整点.因此,对于 $L$ 中任意四点,题中所述结论不再成立.

13·13　$T$ 为三维空间中所有整点的集合.点 $(x, y, z)$ 与点 $(u, v, w)$,当且仅当 $|x - u| + |y - v| + |z - w| = 1$ 时,称为相邻的点.

证明存在集 $S \subset T$,使得每个点 $P \in T$,在 $P$ 与 $P$ 的相邻点中恰好有一个属于 $S$.

(第 26 届国际数学奥林匹克候选题,1985 年)

[证]　我们注意到,任一整点 $P(u, v, w)$ 都有六个相邻点:

$$(u \pm 1, v, w),\quad (u, v \pm 1, w),\quad (u, v, w \pm 1).$$

构造一个关于 $(x, y, z)$ 的辅助函数

$$f(x, y, z) = x + 2y + 3z,$$

则 $P$ 点及其六个相邻对应的函数值为

$$u+2v+3w,\quad u+2v+3w\pm 1,$$
$$u+2v+3w\pm 2,\quad u+2v+3w\pm 3.$$



这七个数是相邻的整数,因此恰有一个数能被7整除.

为此,我们令

$$S=\{(x,y,z)\mid 7\mid x+2y+3z\}.$$

显然,集合 $S$ 即为所求.

13·14　在方格纸上作闭折线,使折线的每个顶点都是方格纸上的结点,而且折线的各段之长都相等.证明,这样的折线的段数必为偶数.

(第27届莫斯科数学奥林匹克,1964年)

[证]　取一个方格纸上的结点为原点建立直角坐标系,则方格纸上的所有结点均为整点.

于是闭折线的每个顶点 $(X_i,Y_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 的横、纵坐标均为整数.

因为是闭折线,则闭折线在坐标轴上的投影(连同符号)满足

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=0,$$
$$y_1+y_2+\cdots+y_n=0.$$
$$x_i^2+y_i^2=c\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

(1) 若 $c$ 具有 $4k+2$ 的形式.

这时,$x_i$ 和 $y_i$ 恒为奇数,而由于 $n$ 个奇数的和等于0,故知 $n$ 为偶数.

(2) 若 $c$ 具有 $4k+1$ 的形式.

这时,$x_i$ 和 $y_i$ 的奇偶性不同.

假定有 $m$ 个奇数 $x_i$,　$n-m$ 个偶数 $x_i$,那么相应的就有 $n-m$ 个奇数 $y_i$,　$m$ 个偶数 $y_i$.

由于和数为0,所以 $m$ 与 $n-m$ 同时为偶数,从而 $n$ 亦为偶数.

(3) 若 $c$ 具有 $4k$ 的形式.

这时,$x_i$ 和 $y_i$ 都是偶数.设 $2^k$ 是所有 $x_i$ 和 $y_i$ 都可被其整除的2的最高方幂,这时在 $x_i^2+y_i^2=c$ 的两边同时除以 $2^{2k}$,就可化归为 $x_i$ 与 $y_i$ 或同为奇数,或为一奇一偶的情形,即情形(1),(2),此时 $n$ 亦为偶数.

由(1),(2),(3),$n$ 为偶数.

13·15　证明在坐标平面上不存在一条具有奇数个顶点,每段长

为 1 的闭折线，它的每个顶点的坐标都是有理数.

（第 31 届国际数学奥林匹克候选题，1990 年）

[证] 假定存在这样的闭折线.

不失一般性，可设坐标原点为其中的一个顶点，并记它为 $A_0$，其他顶点坐标分别记为：

$$A_1=\left(\frac{a_1}{b_1},\frac{c_1}{d_1}\right),\ \cdots,\ A_n=\left(\frac{a_n}{b_n},\frac{c_n}{d_n}\right),$$

其中 $\frac{a_i}{b_i}$ 与 $\frac{c_i}{d_i}(i=1,2,\cdots,n)$ 都是既约分数，为方便起见，我们约定

$$A_{n+1}=A_0.$$

若 $p$ 与 $q$ 的奇偶性相同，我们简记为 $p\equiv q$（这里省略了 $(\bmod 2)$），若 $p$ 与 $q$ 的奇偶性不同，则记为 $p\not\equiv q$.

下面我们用数学归纳法证明：

$$b_k\equiv 1,\quad d_k\equiv 1\quad(k=1,2,\cdots,n).$$

$$a_k+c_k\not\equiv a_{k-1}+c_{k-1}\quad(k=1,2,\cdots,n,n+1).$$

若 $k=1$，则由折线长为 1 有

$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^2+\left(\frac{c_1}{d_1}\right)^2=1,$$

即

$$\frac{a_1^2d_1^2}{b_1^2}=d_1^2-c_1^2.$$

因为 $\frac{a_1^2d_1^2}{b_1^2}$ 是整数，且 $a_1$ 和 $b_1$ 互素，则 $d_1$ 被 $b_1$ 整除.

上式又可化为

$$\frac{c_1^2b_1^2}{d_1^2}=b_1^2-a_1^2.$$

同理可知，$b_1$ 被 $d_1$ 整除.

于是 $$b_1=\pm d_1.$$

从而 $$b_1^2=d_1^2=a_1^2+c_1^2.$$

$a_1$ 和 $c_1$ 不可能都是偶数，否则 $b_1$ 也为偶数，与 $a_1$ 和 $b_1$ 互素相矛盾；

$a_1$ 和 $c_1$ 也不可能都是奇数，否则

$$a_1^2+c_1^2\equiv 2\pmod 4$$

不可能为完全平方数,因此

$$a_1 \not\equiv c_1, \quad b_1 \equiv d_1 \equiv 1.$$

并且 $$a_1 + c_1 \not\equiv 0 = a_0 + c_0.$$

假设结论对于 $k = 1,2,\cdots,m-1 \leqslant n$ 都成立,令

$$\frac{a_m}{b_m} - \frac{a_{m-1}}{b_{m-1}} = \frac{a}{b},$$

$$\frac{c_m}{d_m} - \frac{c_{m-1}}{d_{m-1}} = \frac{c}{d}.$$

这里,$\frac{a}{b}$,$\frac{c}{d}$ 是既约分数.

因为每一段的长为1,所以

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{c}{d}\right)^2 = 1.$$

与 $k = 1$ 的情况类似,可得

$$a \not\equiv c, \quad d \equiv b \equiv 1.$$

又因为

$$\frac{a_m}{b_m} = \frac{a}{b} + \frac{a_{m-1}}{b_{m-1}} = \frac{ab_{m-1} + ba_{m-1}}{bb_{m-1}},$$

由于分数$\frac{a_m}{b_m}$既约,所以 $b_m$ 是 $bb_{m-1}$ 的一个因数,因为 $b \equiv 1$,$b_{m-1} \equiv 1$,则 $b_m \equiv 1$,同理又知 $d_m \equiv 1$.又

$$a_m \equiv ab_{m-1} + ba_{m-1},$$

$$c_m \equiv cd_{m-1} + dc_{m-1}.$$

因此

$$\begin{aligned} & a_m + c_m - a_{m-1} - c_{m-1} \\ \equiv\ & ab_{m-1} + ba_{m-1} + cd_{m-1} + dc_{m-1} - a_{m-1} - c_{m-1} \\ \equiv\ & a_{m-1}(b-1) + ab_{m-1} + c_{m-1}(d-1) + cd_{m-1} \\ \equiv\ & a + c \\ \equiv\ & 1. \end{aligned}$$

于是 $$a_m + c_m \not\equiv a_{m-1} + c_{m-1}.$$

从而证明了

$$b_k \equiv 1, \quad d_k \equiv 1 \quad (k = 1,2,\cdots,n).$$

$$a_k + c_k \not\equiv a_{k-1} + c_{k-1} \quad (k = 1,2,\cdots,n,n+1).$$

因此,在顶点数 $n+1$ 为奇数时,由上面所证,

$$a_{n+1}+c_{n+1}\neq a_0+c_0.$$

所以折线决不能是闭的，即符合题目要求的闭折线不存在.

13·16　将数轴上每一个坐标为整数的点或染为红色，或染为蓝色. 证明至少有一种颜色具有下述性质：即对每个自然数 $k$，都能找到无穷多个染了这种颜色的点，它们的坐标都能被 $k$ 整除.

（第 40 届莫斯科数学奥林匹克，1977 年）

［证］　分别以 $A$ 和 $B$ 表示红点和蓝点的集合.

假设结论不成立，即 $A$ 中仅有有限个点其坐标为 $a$ 的倍数，且 $B$ 中仅有有限个点其坐标是 $b$ 的倍数，这样在整个自然数集合中，就仅有有限个数是 $ab$ 的倍数，这是不可能的.

13·17　方格纸上小方格的尺寸为 $1\times 1$，以其中的一个结点（方格线的交点）为圆心画一个半径为 $R$ 的圆周. 试证，如果在圆周上刚好有 1988 个结点，则 $R$ 和 $\sqrt{2}R$ 中有一个是整数.

（第 14 届全俄数学奥林匹克，1988 年）

［证］　以圆心为坐标原点，并使坐标轴平行于方格线，在方格纸上建立坐标系. 则所有结点均为整点.

如果点 $(x,y)$ 落在圆周上，由对称性，一切形如 $(\pm x,\pm y)$ 和 $(\pm y,\pm x)$ 的点也落在圆周上，若 $x\neq y$ 且 $xy\neq 0$，则这样的点共有 8 个，若 $x=y$ 或 $xy=0$，则这样的点共有 4 个.

由于 $$1988\equiv 4 \pmod 8).$$

所以给定的 1988 个点中必有满足 $x=y$ 的点或满足 $xy=0$ 的点.

若存在满足 $x=y$ 的点，则由

$$x^2+y^2=2x^2=R^2$$

可知，$\frac{R}{\sqrt{2}}$ 是整数，从而 $\sqrt{2}R$ 是整数.

若存在满足 $xy=0$ 的点，则由

$$R=|x| \quad 或 R=|y|$$

可知，$R$ 是整数.

13·18　在平面直角坐标系中，横坐标和纵坐标都是整数的点称为整点，任取 6 个整点 $P_i(x_i,y_i)(i=1,2,3,4,5,6)$ 满足：

(1) $|x_i|\leqslant 2,\ |y_i|\leqslant 2(i=1,2,\cdots,6)$，

(2) 任何三点不在同一条直线上.

试证在以 $P_i(i=1,2,3,4,5,6)$ 为顶点的所有三角形中，必有一个三角形，它的面积不大于2.

（中国高中数学联赛，1992年）



[证1] 设存在6个整点 $P_1,P_2,\cdots,P_6$ 落在区域 $S=\{(x,y)\mid |x|\leqslant 2,|y|\leqslant 2\}$ 内，它们任三个点所成的三角形面积都大于2.

设 $P=\{P_1,P_2,\cdots,P_6\}$.

(1) 若 $x$ 轴上只有 $P$ 中的一个点，则剩下的 $P$ 中的5个点，位于两个半平面，由抽屉原理在 $x$ 轴的上半平面或下半平面一定有一个半平面上至少有三个点，不妨设 $x$ 轴的上半平面至少有 $P$ 的三个点，此三点所成的三角形面积不大于2. 因此，$x$ 轴上至少有两个点，又因为不能有三点共线，所以在 $x$ 轴上恰有 $P$ 的2个点.

(2) 剩下的4个点不可能有一点在直线 $y=\pm 1$ 上，否则出现 $P$ 中的点为顶点的面积不大于2的三角形，于是在直线 $y=2$，$y=-2$ 上分别恰有 $P$ 的两个点.

(3) 注意到 $S$ 的对称性，同理可证在直线 $x=-2$，$x=0$，$x=2$ 上分别有 $P$ 的两个点.

于是在每条直线 $y=-2,0,2$，$x=-2,0,2$ 上恰有 $P$ 的两个点.

(4) $P$ 的点不能是原点. 这是因为 $S$ 内纵横坐标均为偶数的所有整点落在且仅落在过原点的四条直线上，由抽屉原理，剩下的5个点至少有两点落在这些直线中的一条. 于是3点共线，出现矛盾.

因此，$P$ 在 $x$ 轴上的两点必定是 $(-2,0)$，$(2,0)$.

同理，在 $y$ 轴上的两点必定是 $(0,-2)$，$(0,2)$.

剩下的两点只能取 $(-2,-2)$，$(2,2)$ 或 $(-2,2)$，$(2,-2)$，不论哪一种情形，都得到一个以 $P$ 中的点为顶点的面积不大于2的三角形. 出现矛盾.

从而命题得证.

[证2] 设 $P_i$ 中横坐标为 $m$ 的点共有 $a_m$ 个，纵坐标为 $n$ 的点共有 $b_n$ 个 $(m,n=-2,-1,0,1,2)$.

由 $P_i$ 满足的条件有

$$0\leqslant a_m\leqslant 2,\quad m=-2,-1,0,1,2;$$
$$0\leqslant b_n\leqslant 2,\quad n=-2,-1,0,1,2,$$
$$a_{-2}+a_{-1}+a_0+a_1+a_2=6,$$

$$b_{-2}+b_{-1}+b_0+b_1+b_2=6.$$

(1) 若 $a_m+a_{m+1}\geqslant 3$,对某个 $m\in\{-2,-1,0,1,2\}$ 成立.则诸 $P_i$ 中至少有 3 个点落在矩形区域$\{m\leqslant x\leqslant m+1,-2\leqslant y\leqslant 2\}$ 的周界上,此三点决定的三角形面积不大于 2.

(2) 若 $a_{-2}+a_{-1}\leqslant 2,\quad a_{-1}+a_0\leqslant 2,\quad a_0+a_1\leqslant 2,\quad a_1+a_2\leqslant 2$,由于

$$\begin{aligned}8&\geqslant(a_{-2}+a_{-1})+(a_{-1}+a_0)+(a_0+a_1)+(a_1+a_2)\\&=2(a_{-2}+a_{-1}+a_0+a_1+a_2)-(a_2+a_{-2})\\&=12-(a_2+a_{-2}).\end{aligned}$$

于是 $\qquad a_2+a_{-2}\geqslant 4.$

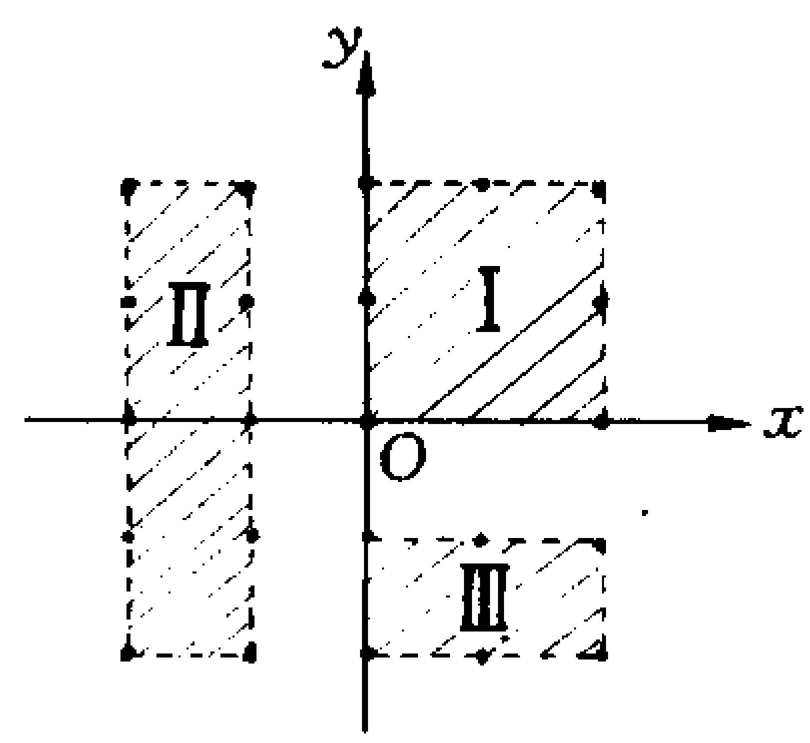
再由没有三点共线,所以

$$a_2=2,\quad a_{-2}=2,\quad a_1=0,\quad a_{-1}=0,\quad a_0=2.$$

即在直线 $x=2i(i=0,\pm1)$ 上恰有 $P$ 的两个点,同理可证直线 $y=2i(i=0,\pm1)$ 上恰有 $P$ 的两个点.

以下同证 1.

**[证3]** 设存在满足条件的6个整点 $P_1,P_2,\cdots,P_6$ 落在区域$\{(x,y)\mid |x|\leqslant 2,|y|\leqslant 2\}$ 内,任何 3 个点所成的三角形面积都大于 2.




把 25 个整点$(m,n)$, $m,n\in\{-2,-1,0,1,2\}$,分成如图的三个组,第 Ⅰ 组为$\{(m,n)\mid m=0,1,2,n=0,1,2\}$,共9 个点,面积为 4, 第 Ⅱ 组为$\{(m,n)\mid m=-1,-2,\quad n=-2,-1,0,1,2\}$ 共 10 个点,面积为 4,第 Ⅲ 组为$\{(m,n)\mid m=0,1,2,\quad n=-2,-1\}$,共 6 个点.

为使三角形的面积大于 2,则落入第 Ⅰ 组内的点不超过 2 个,落入第 Ⅱ 组内的点不超过 2 个,否则将出现一个以 $P_i$ 为顶点的面积不大于 2 的三角形,因此,至少有两点落在第 Ⅲ 组内,记第 Ⅲ 组为

$$D_4=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2,-2\leqslant y\leqslant -1\}.$$

同理,对这 25 个点重新划分区域,使上述的第 Ⅲ 组分别落在第 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ 象限内,则

$$D_1=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant 2,\quad 1\leqslant x\leqslant 2\},$$
$$D_2=\{(x,y)\mid -2\leqslant x\leqslant 0,\quad 1\leqslant y\leqslant 2\},$$
$$D_3=\{(x,y)\mid -2\leqslant x\leqslant -1,\quad -2\leqslant y\leqslant 0\}.$$

从而$D_1,D_2,D_3,D_4$覆盖了除(0,0)之外的已知点中的24个整点，且每个区域的边界上至少有两个点，由于这四个区域互不相交，所以总共有8个点与已知的6个点矛盾！

13·19　某人掷硬币，得正面记 $a$ 分，得背面记 $b$ 分（$a,b$ 为正整数，$a>b$）. 并将每次得分进行累计. 他发现不论掷多少次，总有35个分数记录不到，例如58就是其中之一. 试确定 $a$ 和 $b$ 的大小.

（第32届美国普特南数学竞赛，1971年）

［解］　设某人掷硬币得正面 $x$ 次，得背面 $y$ 次，其中 $x$ 和 $y$ 均为非负整数.

于是累计得分 $ax+by$ 分.

首先证明$(a,b)=1$.

否则，若$(a,b)=d>1$，那么$ax+by$恒能被$d$整除，这样，与$d$互素的一切正整数（如 $kd+1$）都是无法达到的分数，于是有无限多个无法达到的分数，与已知条件矛盾.

因此$(a,b)=1$.

显然，如果 $m$ 是可以达到的一个分数，那么直线$ax+by=m$至少通过包括横轴，纵轴的正半轴和原点在内的第一象限（即闭的第一象限）的整点.

因为$(a,b)=1$，所以

$$b\cdot 0,b\cdot 1,\cdots,b\cdot(a-1)$$

这 $a$ 个数被$a$ 除的余数互不相同.

这是因为若

$$bi\equiv bj\pmod a,$$

则由$(a,b)=1$得 $i-j\equiv 0\pmod a$.

而 $|i-j|<a$，所以是不可能的.

因此，当 $m\geqslant ab$ 时，

$$m-b\cdot 0,\quad m-b\cdot 1,\quad \cdots,\quad m-b(a-1)$$

中恰有一个能被 $a$ 整除，即存在 $y(0\leqslant y\leqslant a-1)$ 及非负整数 $x$，使

$$m-by=ax.$$

所以 $m \geqslant ab$ 时，$m$ 必是可以达到的分数，然而，由题意，可达到的分数只有有限个，所以 $m \geqslant ab$ 不成立.

当 $0 \leqslant m < ab$ 时，若 $m$ 是可以达到的分数，那么直线 $ax + by = m$ 只含闭的第一象限的一个整点.

若不然，设 $(x_1, y_1)$，$(x_2, y_2)$ 都在直线 $ax + by = m$ 上，则

$$ax_1 + by_1 = m, \quad ax_2 + by_2 = m,$$

于是有

$$a(x_1 - x_2) + b(y_1 - y_2) = 0.$$

从而 $\qquad b \mid x_1 - x_2.$

但是 $\qquad 0 \leqslant ax_1 \leqslant m < ab,$

所以 $\qquad 0 \leqslant x_1 < b.$

同理 $\qquad 0 \leqslant x_2 < b.$

即 $\qquad | x_1 - x_2 | < b.$

于是仅当 $x_1 = x_2$ 时，才有 $b \mid x_1 - x_2$，出现矛盾.

于是 $0 \leqslant m < ab$ 时，所能达到的分数的个数与闭的第一象限中，使 $0 \leqslant ax + by < ab$ 的整点 $(x, y)$ 的个数相同.

注意到，矩形 $0 \leqslant x \leqslant b$，$\ 0 \leqslant y \leqslant a$ 中，有

$$(a+1)(b+1)$$

个整点，所以在闭的第一象限中，使 $0 \leqslant ax + by < ab$ 的整点 $(x, y)$ 的数目是 $\frac{1}{2}(a+1)(b+1) - 1$.

所以，不可能达到的分数的个数是

$$ab - \left[\frac{1}{2}(a+1)(b+1) - 1\right] = \frac{1}{2}(a-1)(b-1).$$

依题意有

$$\frac{1}{2}(a-1)(b-1) = 35.$$

因为 $a > b$，且 $(a, b) = 1$，则有

$$\begin{cases} a - 1 = 70 \\ b - 1 = 1. \end{cases} \text{或} \begin{cases} a - 1 = 10 \\ b - 1 = 7 \end{cases} \text{或} \begin{cases} a - 1 = 35 \\ b - 1 = 2. \end{cases}$$

即 $(a, b) = (71, 2), (11, 8), (36, 3)$.

由 $(a, b) = 1$，则 $(36, 3)$ 不可能.

又 $a = 71$，$\ b = 2$ 时，

$$71 \cdot 0 + 2 \cdot 29 = 58$$

能被记录到，所以 $a = 71$, $b = 2$ 不合题意.



再考察直线 $11x + 8y = 58$ 上的整点，由

$$y = \frac{58 - 11x}{8} = 7 - x + \frac{2 - 3x}{8}.$$

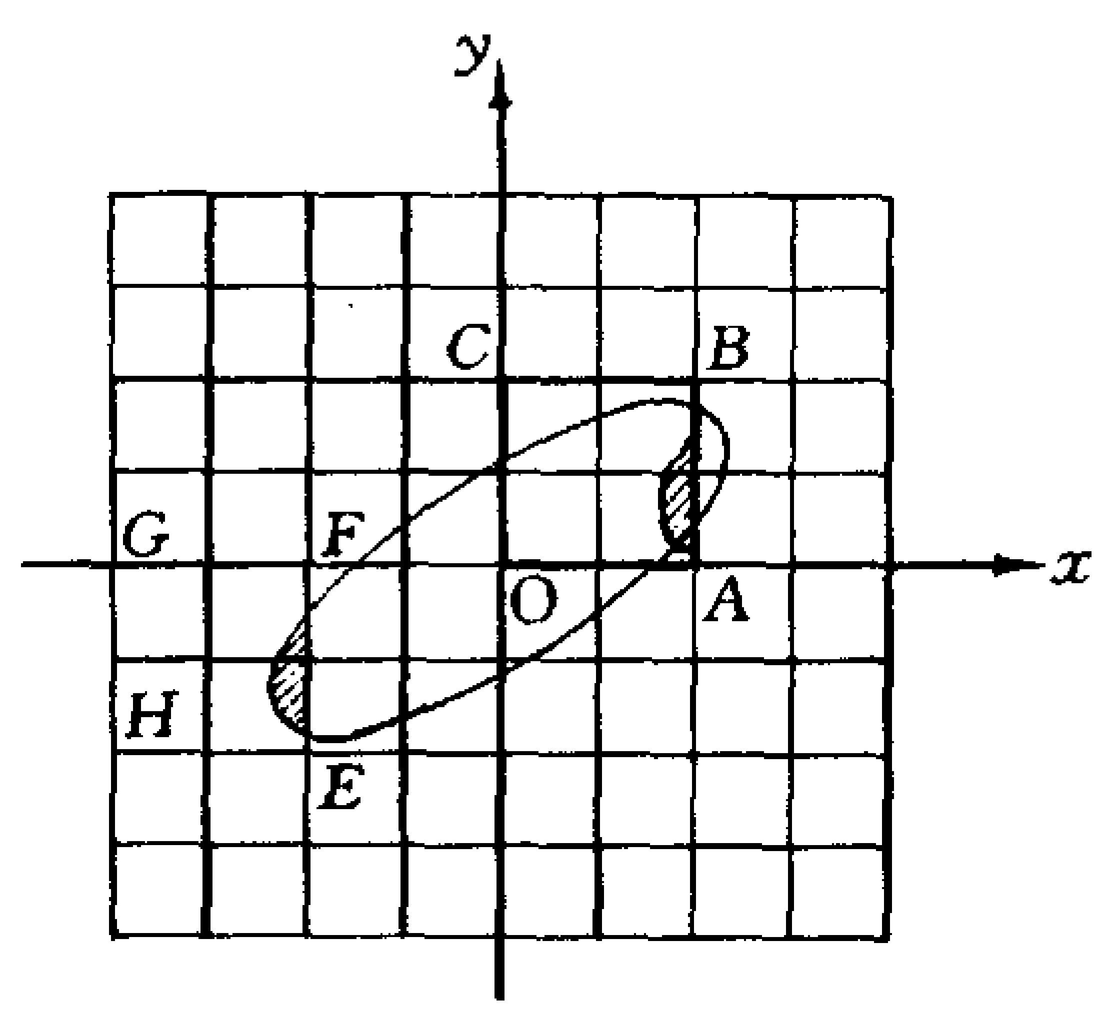
可以求得直线上的两个相邻整点 $(6, -1)$ 及 $(-2, 10)$ 分别位于第四，第二象限，因此 58 不能被记录到. 从而 $a = 11$, $b = 8$ 是适合本题要求的惟一解.

13·20 设 $C$ 是平面上的闭凸集，$C$ 除了包含 $(0,0)$ 外，不包含其他坐标为整数的点，又设 $C$ 分布在四个象限中的面积相等，证明 $C$ 的面积 $A(C) \leqslant 4$.

（第 40 届美国普特南数学竞赛，1979 年）

[证] 我们证明更为一般的结论：

如果一个关于原点对称的闭凸集，面积大于 4，那么，它的内部除原点外，一定还有别的整点.




如图，我们用分别和坐标轴距离是偶数的两组平行线，分平面成边长是 2 的较大的方格，其中标准的一个方格是 $OABC$. 它是位于第一象限而离原点最近的一个方格，这些边长是 2 的方格把闭凸集分成许多块，每一个和这区域相交的较大方格中各有一块，例如图中 $EFGH$ 这个方格里就有一小块. 把 $EFGH$ 平移到 $OABC$，使两个方格重合，那么，$EFGH$ 里面所包含的一小块面积也就连带地被移到 $OABC$ 里面，如图中有阴影的那部分. 对于其他大方格中的面积可以用同样的方法移到正方形 $OABC$ 中去.

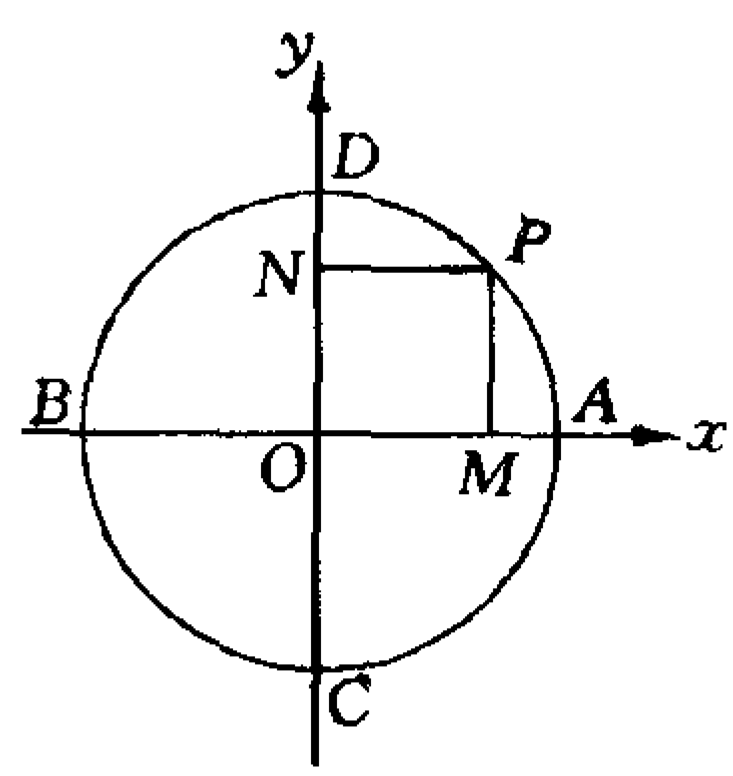
由于闭凸集的面积大于 4，而正方形 $OABC$ 的面积等于 4，所以由面积的重叠原则，至少有两块面积有公共点.

在移动每一个大方格时，可先沿 $OX$ 轴的方向移动一段距离（等于

2 的倍数)，再沿 $OY$ 轴的方向移动一段距离(也等于 2 的倍数)，最后就和 $OABC$ 重合. 因此，我们从两块面积移动后有公共点这个结论可推出，在原来的闭凸集内有两个点 $P$ 和 $Q$，它们的纵坐标的差和横坐标的差都是 2 的倍数. 由对称性，$P$ 关于原点的对称点 $P'$ 也在这个闭凸集内.

设 $P$ 的坐标为 $(x_1, y_1)$，则 $P'$ 的坐标为 $(-x_1, -y_1)$，设 $Q$ 的坐标是 $(x_2, y_2)$，那么 $P'Q$ 的中点 $M$ 的坐标是 $\left(\frac{x_2 - x_1}{2}, \frac{y_2 - y_1}{2}\right)$，由于 $x_2 - x_1$，$y_2 - y_1$ 是偶数，所以 $\frac{x_2 - x_1}{2}$ 和 $\frac{y_2 - y_1}{2}$ 一定是整数，因此 $M$ 点一定是整点，又由于 $P$ 和 $Q$ 是两个不同的点，则 $x_2 - x_1 \neq 0$，$y_2 - y_1 \neq 0$ 至少有一个成立，即 $M\left(\frac{x_2 - x_1}{2}, \frac{y_2 - y_1}{2}\right)$ 不是原点 $(0,0)$，从而证明了题设中的闭凸集内除原点 $(0,0)$ 之外，至少还有一个整点.

13·21 已知圆 $x^2 + y^2 = r^2$($r$ 为奇数)交 $x$ 轴于 $A(r,0)$，$B(-r,0)$，交 $y$ 轴于 $C(0,-r)$，$D(0,r)$. $P(u,v)$ 是圆周上一点，$u = p^m$，$v = q^n$($p,q$ 都是素数，$m,n$ 都是自然数)，且 $u > v$. 点 $P$ 在 $x$ 轴和 $y$ 轴上的射影分别是 $M,N$.




求证 $|AM|$、$|BM|$、$|CN|$、$|DN|$ 分别为 1、9、8、2.

(中国高中数学联赛，1982 年)

[证 1] 因为 $r$ 为奇数，则由

$$u^2 + v^2 = r^2$$

可得，$u$ 和 $v$ 必一为奇数，一为偶数.

(1) $u$ 为偶数.

因为 $u = p^m$ 为偶数及 $p$ 是素数，所以 $p = 2$.

即
$$u = 2^m.$$

$$v^2 = q^{2n} = r^2 - u^2 = r^2 - (2^m)^2 = (r + 2^m)(r - 2^m).$$

因为 $q$ 是素数，所以必有

$$\begin{cases} r - 2^m = 1, \\ r + 2^m = q^{2n}. \end{cases}$$

于是
$$r = 2^m + 1.$$

数论卷

由此可得 $\begin{cases} v^2 = 2^{m+1} + 1 = q^{2n}. \\ u^2 = 2^{2m}. \end{cases}$

从而又有 $(q^n + 1)(q^n - 1) = 2^{m+1}.$

于是 $\begin{cases} q^n + 1 = 2^a, \\ q^n - 1 = 2^b,\ a > b. \end{cases}$

$$2q^n = 2^a + 2^b,$$

$$q^n = 2^{a-1} + 2^{b-1} = 2^{b-1}(2^{a-b} + 1).$$

因为 $q$ 是奇素数,所以 $2^{b-1} = 1$, $b = 1$.

从而 $$q^n = 2^b + 1 = 3.$$

即 $$q = 3,\quad n = 1.$$

从而 $q^{2n} = q^2 = 9 = 2^{m+1} + 1$, $m = 2$.

于是 $u = 4$, $r = 5$.

由此得出 $|AM| = 1$, $|BM| = 9$, $|CN| = 8$, $|DN| = 2$.

(2) $v$ 为偶数.

同理可得 $u = 3$, $v = 4$, $r = 5$,但这时与题设中的 $u > v$ 不符.

所以 $v$ 不能为偶数.

由(1),(2),本题得证

**[证 2]** 若 $u$ 为偶数,则不定方程

$$u^2 + v^2 = r^2$$

可解得 $\begin{cases} u = 2cd, \\ v = c^2 - d^2, \\ r = c^2 + d^2. \end{cases}$

因为 $u = p^m = 2^m = 2cd$,则可令

$$c = 2^\alpha,\quad d = 2^\beta.$$

此时 $$v = c^2 - d^2 = (2^\alpha + 2^\beta)(2^\alpha - 2^\beta).$$

因为 $v$ 是奇数,则 $2^\beta = 1$, $\beta = 0$.

从而 $$v = q^n = (2^\alpha + 1)(2^\alpha - 1).$$

又因为 $q$ 是素数,则

$$\begin{cases} 2^\alpha + 1 = q^a, \\ 2^\alpha - 1 = q^b,\quad a > b. \end{cases}$$

即 $$2 \cdot 2^\alpha = q^a + q^b = q^b(q^{a-b} + 1).$$

由 $q$ 是奇素数可得 $q^b=1$，$b=0$，从而有 $2^\alpha=q^b+1=2$，$\alpha=1$，进而 $q^a=2^\alpha+1=3$，$q=3$. $v=(2^\alpha+1)(2^\alpha-1)=3=q^n$，$n=1$.

于是可得 $u=4$，$v=3$，$r=5$.

进一步求出 $|AM|=1$，$|BM|=9$，$|CN|=8$，$|DN|=2$.

若 $u$ 为奇数，同证 1，不可能.

13·22　以平面直角坐标系中的每一个整点为圆心，各作一个半径为 $\frac{1}{14}$ 的圆. 证明任何半径为 100 的圆周都至少与这些圆中的一个相交.

（第 49 届莫斯科数学奥林匹克，1986 年）

[证]　设 $O$ 为任意一个点.

又设 $y=k(k\in Z)$ 是与以 $O$ 为圆心，以 100 为半径的圆相交的直线中最上面的一条直线，而直线 $y=k+1$ 与该圆不相交.

如果该直线上所有的整点都在该圆之外，那么不难证明，其中离圆周最近的整点与圆周的距离不超过 $\frac{1}{14}$，因此圆周必与以该整点为圆心，以 $\frac{1}{14}$ 为半径的圆相交.

如果该直线 $y=k$ 上有某些整点在该圆 $O$ 之内. 设 $B$ 是其中离该圆周最近的整点.

设 $A$ 是直线 $y=k$ 上离 $B$ 最近的位于圆外的整点，则有 $AB=1$.

假设圆周不与以 $A$ 和 $B$ 为圆心，以 $\frac{1}{14}$ 为半径的圆相交，则此时就有

$$OA>100+\frac{1}{14},\quad 99<OB<100-\frac{1}{14}.$$

因此就有

$$OA-OB>\frac{1}{7}.$$

$$OA^2-OB^2=(OA-OB)(OA+OB)>\frac{199}{7}.$$

设 $O'$ 是自 $O$ 向直线 $y=k$ 所引垂线之垂足，$O'B=x$，则

$$O'A=x+1,$$

$$(x+1)^2-x^2=OA^2-OB^2>\frac{199}{7}.$$



解得 $$O'B=x>\frac{96}{7}.$$

于是就有

$$OO'=OB^2-O'B^2<(100-\frac{1}{14})^2-(\frac{96}{7})^2<99^2,$$

从而 $$OO'<99.$$

由于圆心 $O$ 到直线 $y=k+1$ 的距离为

$$OO'+1<99+1=100,$$

这样该圆就与直线 $y=k+1$ 相交，与我们一开始的选取相矛盾.

因此该圆必与圆 $A$ 或圆 $B$ 之一相交.

13·23　在坐标平面上，纵横坐标都是整数的点称为整点. 试证存在一个同心圆的集合，使得(1) 每个整点都在此集合的某一圆周上；(2) 此集合的每个圆周上，有且只有一个整点.

（中国高中数学联赛，1987 年）

**[证 1]**　假设同心圆圆心为 $P(x,y)$. 任意两整点 $A(a,b)$ 和 $B(c,d)$，其中 $a=c$ 和 $b=d$ 不同时成立.

$$\begin{aligned}|PA|^2&=(x-a)^2+(y-b)^2\\&=x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2,\\|PB|^2&=(x-c)^2+(y-d)^2\\&=x^2+y^2-2cx-2dy+c^2+d^2.\end{aligned}$$

$$|PA|^2-|PB|^2=a^2-c^2+b^2-d^2+2(c-a)x+2(d-b)y.$$

因为 $a,b,c,d\in Z$，且 $a=c$，　$b=d$ 不同时成立，

所以要使 $|PA|\neq|PB|$，只需取 $x$ 为任意无理数，$y$ 取任意分母不为 2 的非整数有理数即可(或 $x,y$ 各取形如 $\sqrt{m}$，$\sqrt{n}$ 的最简非同类根式的无理数，其中 $m,n\in N$).

如取 $P(\sqrt{2},\frac{1}{3})$，则任意两个不同整点到 $P(\sqrt{2},\frac{1}{3})$ 的距离都不相等.

把所有整点到 $P$ 的距离从小到大排成一列

$$r_1,\ r_2,\ r_3,\cdots$$

以 $P(\sqrt{2},\frac{1}{3})$ 为圆心，$r_1,r_2,\cdots,r_n,\cdots$ 为半径的同心圆集合即为所求.

[证 2]　设任意两个不同整点 $A(a,b)$ 和 $B(c,d)$.

下面分三类情况进行讨论:

(i) $a \neq c$, $b \neq d$. 中点 $M\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right)$.

$AB$ 垂直平分线方程为

$$y-\frac{b+d}{2}=\frac{c-a}{b-d}\left(x-\frac{a+c}{2}\right).$$

(ii) $a = c$, $b \neq d$. 中点 $M\left(a, \frac{b+d}{2}\right)$. $AB$ 垂直平分线方程为

$$y=\frac{b+d}{2}.$$

(iii) $a \neq c$, $b = d$. 中点 $M\left(\frac{a+c}{2}, b\right)$, $AB$ 垂直平分线方程为

$$x=\frac{a+c}{2}.$$

显然,只有在上述三类直线上的点才有可能到平面上某两整点的距离相等.若取 $P(\sqrt{2},\sqrt{3})$,则 $P$ 必然不在上述三类直线上,即 $P(\sqrt{2},\sqrt{3})$ 到任意两个不同整点的距离都不相等.

把所有整点与 $P$ 点的距离从小到大排成一列:

$$r_1,\ r_2,\ r_3,\cdots$$

以 $P(\sqrt{2},\sqrt{3})$ 为圆心, $r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots$ 为半径作的同心圆即为所求.

13·24　某圆的圆心坐标为无理数.证明在这个圆内,不可能有一个圆内接三角形,它的各个顶点的横纵坐标都是有理数.

(基辅数学奥林匹克,1977 年)

[证]　设圆心的坐标为 $O(\alpha,\beta)$, $\alpha$ 和 $\beta$ 都是无理数.

又设圆内接三角形的顶点坐标为

$$A_1(p_1,q_1),\quad A_2(p_2,q_2),\quad A_3(p_3,q_3),$$

假设 $p_i, q_i (i = 1,2,3)$ 都是有理数.

由 $OA_1^2 = OA_2^2 = OA_3^2$ 得

$$\begin{aligned}(p_1-\alpha)^2+(q_1-\beta)^2 &= (p_2-\alpha)^2+(q_2-\beta)^2 \\ &= (p_3-\alpha)^2+(q_3-\beta)^2.\end{aligned}$$

从而可得到关于 $\alpha,\beta$ 的线性方程组

$$\begin{cases}(p_2-p_1)\alpha+(q_2-q_1)\beta=\gamma_1,\\(p_3-p_2)\alpha+(q_3-q_2)\beta=\gamma_2.\end{cases}$$

其中 $$\gamma_1=\frac{1}{2}[(p_2^2+q_2^2)-(p_1{}^2+q_1^2)],$$

$$\gamma_2=\frac{1}{2}[(p_3^2+q_3^2)-(p_2^2+q_2^2)].$$

则 $\gamma_1$ 与 $\gamma_2$ 都是有理数.

线性方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}p_2-p_1 & q_2-q_1\\p_3-p_2 & q_3-q_2\end{vmatrix}$$

则 $D$ 是有理数.

解这个线性方程组得

$$\alpha D=\gamma_1(q_3-q_2)-\gamma_2(q_2-q_1),$$

$$\beta D=\gamma_2(p_2-p_1)-\gamma_1(p_3-p_1).$$

若 $D\neq 0$,则上面两式的右边都是有理数,而左边都是无理数,因而等式不成立.

若 $D=0$,则有

$$\frac{p_2-p_1}{q_2-q_1}=\frac{p_3-p_2}{q_3-q_2}=\frac{p_3-p_1}{q_3-q_1}.$$

这表明点 $A_1,A_2,A_3$ 在同一条直线上,即在

$$y=q_1+(x-p_1)\frac{q_2-q_1}{p_2-p_1}.$$

这也是不可能的,因为 $A_1,A_2,A_3$ 是圆内接三角形的顶点.

因此,$\triangle A_1A_2A_3$ 的顶点坐标不可能都是有理数.

13·25　设 $\triangle ABC$ 的顶点坐标都是整数,且在 $\triangle ABC$ 的内部只有一个整点(但在边上允许有整点).求证 $\triangle ABC$ 的面积 $\leqslant\frac{9}{2}$.

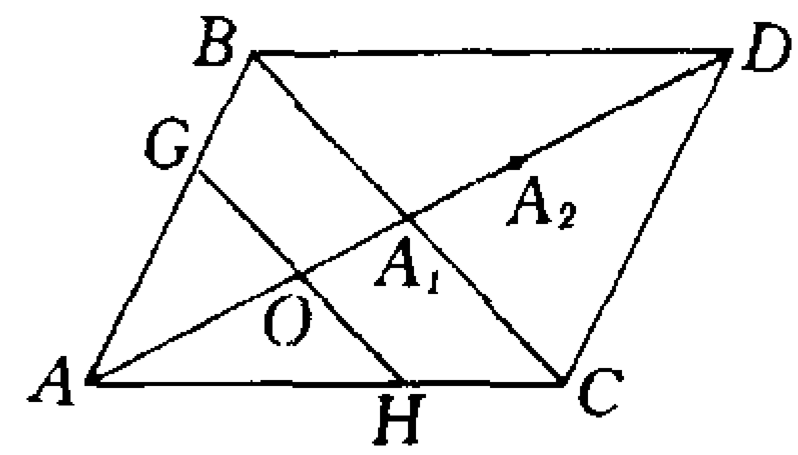
(第 31 届国际数学奥林匹克候选题,1990 年)

[证]　设 $O$ 为 $\triangle ABC$ 内的整点,$BC,CA,AB$ 边的中点分别为 $A_1,B_1,C_1$.

显然,$O$ 或在 $\triangle A_1B_1C_1$ 内部或在 $\triangle A_1B_1C_1$ 的边界上.

否则,由于 $A,B,C$ 关于 $O$ 点的对称点均为整点,在 $\triangle ABC$ 内就不止一个整点.

设 $A_2$ 是点 $A$ 关于 $O$ 的对称点，$D$ 是平行四边形 $ABDC$ 的第四个顶点，则 $A_2$ 为 $\triangle BCD$ 的内点或在它的边界上.




(1) 若 $A_2$ 为 $\triangle BCD$ 的内点.

因为 $A_2$ 是整点，所以 $A_2$ 就是 $O$ 关于平行四边形 $ABDC$ 中心 $A_1$ 的对称点——$\triangle BCD$ 内惟一的整点 $A$，$O$，$A_2$ 和 $D$ 是线段 $AD$ 上相继的整点，所以

$$AD = 3AO.$$

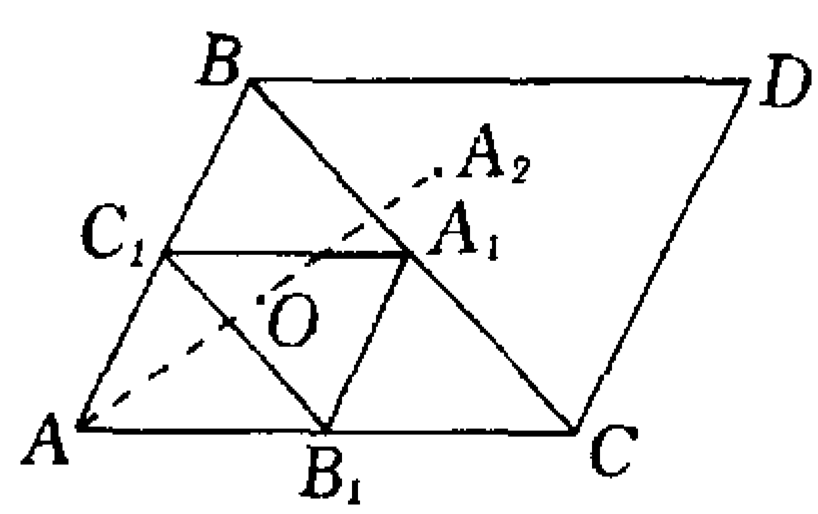
由于 $A$，$B$，$C$ 地位相同，所以 $O$ 是 $\triangle ABC$ 的重心，过 $O$ 作线段 $GH \parallel BC$，若 $BC$ 内部的整点多于两个，则 $GH$ 内部必含有一个不同于 $O$ 的整点(这是因为 $BC$ 上每两个整点的距离 $\leqslant \frac{1}{4}BC$，而 $OG = OH = \frac{1}{3}BC$)，出现矛盾. 因此，$BC$ 的内部至多只有两个整点，$AB$ 与 $AC$ 有同样的结论.

总之，在 $\triangle ABC$ 的周界上的整点数 $\leqslant 9$，则由有关整点与面积的定理有

$$\triangle ABC\text{ 的面积} \leqslant 1 + \frac{9}{2} - 1 = \frac{9}{2}.$$

(2) 若 $A_2$ 在 $\triangle BCD$ 的边界上.

与(1)类似，可以推出 $BC$ 边内部的整点数不超过 3(仅当 $O$ 在 $B_1C_1$ 上时，出现 3 个整点). $AB$ 与 $AC$ 内部的整点数均不能多于 1.




总之，$\triangle ABC$ 周界上的整点数 $\leqslant 8$，因此

$$\triangle ABC\text{ 的面积} \leqslant 1 + \frac{8}{2} - 1 = 4.$$

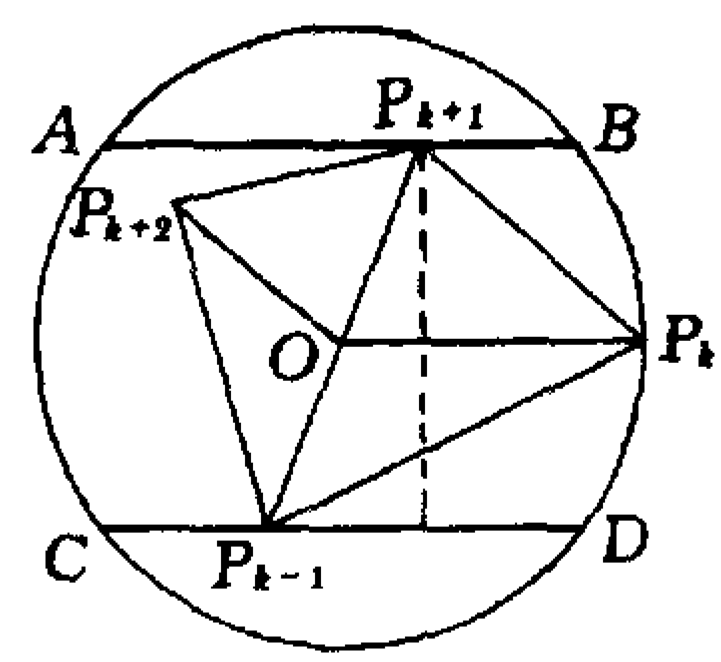
由(1)，(2)命题得证.

**13·26** 正整数 $n \geqslant 5$， $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 是以 $O$ 为原点的直角坐标系中的整点，$\triangle OP_1P_2, \triangle OP_2P_3, \cdots, \triangle OP_nP_1$ 的面积都等于 $\frac{1}{2}$. 求证存在一对整数 $i, j$ 有 $2 \leqslant |i - j| \leqslant n - 2$，并且 $\triangle OP_iP_j$ 的面积为 $\frac{1}{2}$.

（第31届国际数学奥林匹克候选题，1990年）

[证]　考虑 $n$ 个不同的点

$P_i = P_i(a_i, b_i),\quad i = 1,2,\cdots,n.$




设 $OP_i = r_i(i = 1,2,\cdots,n)$，其中 $r_k$ 最大，不妨设 $1 < k < n-2$.

设平行于 $OP_k$ 且与 $OP_k$ 距离为 $\frac{1}{r_k}$ 的两条直线 $AB$，$CD$ 与以 $O$ 为圆心，以 $r_k$ 为半径的圆相交于 $A,B,C,D$.

由于 $\triangle OP_{k-1}P_k$，$\triangle OP_{k+1}P_k$ 的面积均为 $\frac{1}{2}$，$OP_k = r_k$，$OP_k$ 与 $AB(CD)$ 的距离为 $\frac{1}{r_k}$，所以 $P_{k-1}$，$P_{k+1}$ 在直线 $AB$ 或 $CD$ 上.

由于 $P_{k-1}$，$P_k$ 为整点，所以 $\triangle OP_{k+1}P_{k-1}$ 的面积为 $\frac{1}{2}$ 的整数倍.

又由于 $\triangle OP_{k-1}P_k$ 与 $\triangle OP_{k+1}P_k$ 的面积之和为 1，所以 $\triangle OP_{k+1}P_{k-1}$ 的面积小于 1.

因此，$\triangle OP_{k+1}P_{k-1}$ 的面积为 $\frac{1}{2}$ 或为 0.

若 $\triangle OP_{k+1}P_{k-1}$ 的面积为 0，即 $O,P_{k-1},P_{k+1}$ 共线，则 $\triangle OP_{k-1}P_{k+2}$ 与 $\triangle OP_{k+1}P_{k+2}$ 的面积相等，于是 $\triangle OP_{k-1}P_{k+2}$ 的面积也为 $\frac{1}{2}$.

于是 $\triangle OP_{k+1}P_{k-1}$ 的面积为 $\frac{1}{2}$，或者 $\triangle OP_{k-1}P_{k+2}$ 的面积为 $\frac{1}{2}$，而

$$2 = |(k+1)-(k-1)| \leqslant n-2.$$

$$3 = |(k+2)-(k-1)| \leqslant n-2.$$

于是 $\triangle OP_{k+1}P_{k-1}$ 或 $\triangle OP_{k-1}P_{k+2}$ 符合要求.

13·27　在空间直角坐标系中，$E$ 是顶点为整点，内部及边上没有其他整点的三角形的集合. 求三角形的面积所成的集合 $f(E)$.

（第30届国际数学奥林匹克候选题，1989年）

[解]　设 $\triangle OAB$ 为 $E$ 中一个三角形，其中 $O$ 为原点.

易知平面 $OAB$ 的方程为

$$\begin{vmatrix} x & x_A & x_B \\ y & y_A & y_B \\ z & z_A & z_B \end{vmatrix} = 0$$

其中$(x_A, y_A, z_A)$,$(x_B, y_B, z_B)$分别为 $A$,$B$ 的坐标.

将行列式展开并约去公约数,可设平面 $AOB$ 的方程为

$$ax + by + cz = 0,$$

其中 $a$,$b$,$c$ 为整数,并且 $a$,$b$,$c$ 的最大公约数为 1.

由于整点$(x, y, z)$使 $ax + by + cz$ 的值为整数,在平行平面 $ax + by + cz = 0$ 与 $ax + by + cz = 1$ 之间(不包括这两个平面)显然没有整点.

由于 $a$,$b$,$c$ 的最大公约数是 1,所以存在一组整数$(x_C, y_C, z_C)$,使

$$ax_C + by_C + cz_C = 1$$

成立.

即整点 $C(x_C, y_C, z_C)$ 在平面 $ax + by + cz = 1$ 上.

以 $OA$,$OB$,$OC$ 为棱可以作一个平行六面体,由于 $\triangle OAB$ 内部及边上无整点(顶点除外),所以以 $OA$,$OB$ 为边的平行四边形也是如此. 从而所作的平行六面体除去顶点外,内部及各面无其他整点.

由这个基本的平行六面体出发可以构成空间的六面体网,每一个整点都是某些六面体的顶点,但不会在六面体的内部(或六面体的面、棱的内部)出现.

即对于任意一组整数$(x, y, z)$,方程组

$$\begin{cases} lx_A + mx_B + nx_C = x, \\ ly_A + my_B + ny_C = y, \\ lz_A + mz_B + nz_C = z. \end{cases}$$

有整数解$(l, m, n)$,所以必有

$$\begin{vmatrix} x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \\ z_A & z_B & z_C \end{vmatrix} = \pm 1.$$

即基本平行六面体的体积为 1.

由于 $ax + by + cz = 0$ 与 $ax + by + cz = 1$ 这两个平面的距离为

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$



所以 $\triangle OAB$ 的面积为

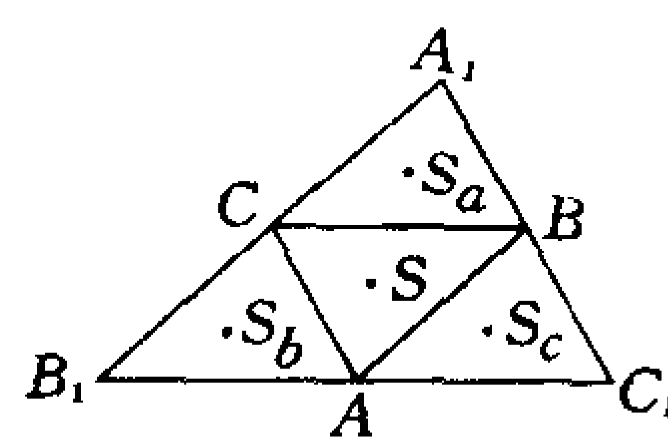
$$\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

于是 $f(E)=\{\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2} \mid a,b,c\in Z,\ (a,b,c)=1\}$.

13·28　证明如果三角形的顶点和整点重合,且三角形的三边不再含有其他的整点,但是在三角形内有惟一的整点,那么这个三角形的重心和这个"内部的"整点重合.

（匈牙利数学奥林匹克,1955年）

[证1]　不难看出,整点关于其他的整点或者关于两个整点所连成的线段的中点的对称点还是整点.




设整点三角形 $ABC$ 是满足题设条件的整点三角形,即 $\triangle ABC$ 的边上没有整点,而在 $\triangle ABC$ 内有惟一的整点,且设 $S$ 是 $\triangle ABC$ 内的惟一整点.

作整点 $S$ 关于 $\triangle ABC$ 的三边的中点的对称点,所有这些点仍然是整点,记这些整点为 $S_a,S_b,S_c$.(如图)这些点在和原来的三角形 $ABC$ 对称的三角形 $A_1BC,AB_1C,ABC_1$ 内.

可以证明,在 $\triangle A_1BC,\triangle AB_1C,\triangle ABC_1$ 内没有其他整点.

事实上,若在 $\triangle A_1BC$ 内,除了整点 $S_a$ 之外,还有一个整点,那么这个整点关于边 $BC$ 的中点的对称点将在 $\triangle ABC$ 内,这样,在 $\triangle ABC$ 内就出现了两个整点,这是不可能的.

作顶点 $A_1$ 关于整点 $S_a$ 的对称点$A_0$,这个点应在 $\triangle A_1B_1C_1$ 内,并且是整点,因为 $\triangle A_1B_1C_1$ 与 $\triangle A_1BC$ 是以$A_1$ 为位似中心,位似系数等于2的位似三角形.由于 $S_a$ 是整点,则所作的 $A_1$ 关于 $S_a$ 的对称点$A_0$ 应该与 $S,S_a,S_b,S_c$ 中的某一个重合,这是因为在 $\triangle A_1B_1C_1$ 的内部只有这四个整点.显然所作的点 $A_0$ 不可能是 $S_a$,

我们下面证明 $A_0$ 也不可能与 $S_b,S_c$ 重合.

假设 $A_0$ 与 $S_c$ 重合,由 $A$ 和$A_1$,$S$ 和$S_a$ 关于线段$BC$ 的中点对称,

$S$ 和 $S_c$ 关于线段 $AB$ 的中点对称，则 $A_1S_a \parallel BS_c$，且 $A_1S_a = BS_c = AS$. 这时四边形 $A_1S_aS_cB$ 是平行四边形，此时 $A_1$ 和 $S_c$ 不可能关于 $S_a$ 对称，因此 $A_0$ 与 $S_c$ 不可能重合.

同样可证 $A_0$ 不可能与 $S_b$ 重合.

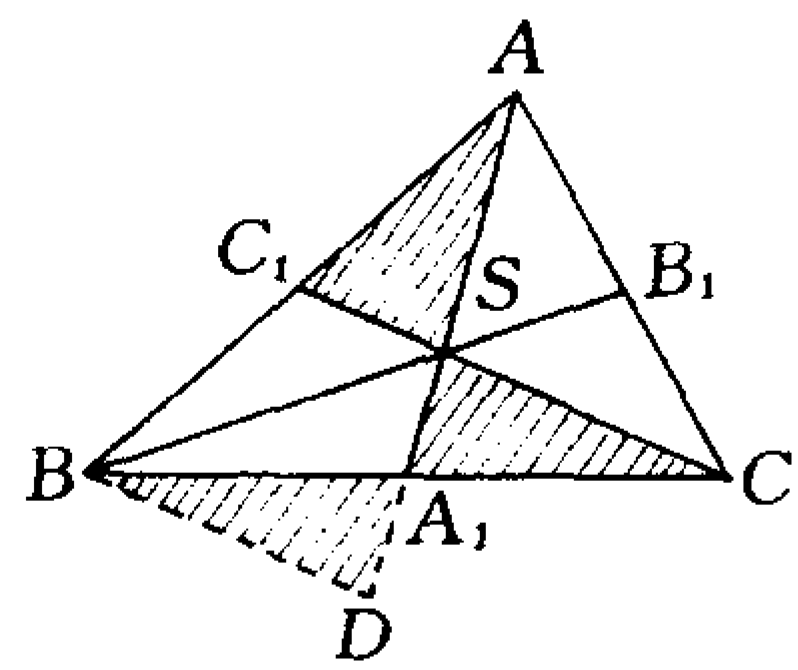
于是 $A_0$ 只能与 $S$ 重合. 即 $A_1$ 关于 $S_a$ 的对称点只可能是整点 $S$.

由此推出，点 $A_1$，$S_a$，$S$ 在一条直线上，这条直线通过 $SS_a$ 和 $BC$ 的中点，而 $A$ 和 $A_1$ 也是关于 $BC$ 中点对称，所以 $S$ 在 $\triangle ABC$ 内，$BC$ 边的中线上.

同理 $S$ 也在 $AC$ 边和 $AB$ 边的中线上，因此 $S$ 与 $\triangle ABC$ 的重心重合.

**［证 2］** 设整点三角形 $ABC$ 是符合题设条件的三角形.

$\triangle ABC$ 的三条中线 $AA_1$，$BB_1$，$CC_1$ 把这个三角形分成六个三角形.




位于 $\triangle ABC$ 内的惟一整点 $T$ 至少属于这六个三角形中的某一个，不妨设 $T$ 在 $\triangle AC_1S$ 的内部或边界上，但不在边 $AC_1$ 上.

以顶点 $A$ 为位似中心，位似系数等于 2，对 $\triangle AC_1S$ 作位似变换得到 $\triangle ABD$，则整点 $T$ 变换成新的整点 $T'$，$T'$ 在 $\triangle ABD$ 的内部或边界上，但不在边 $AB$ 上.

因为在 $\triangle ABC$ 内只有一个整点 $T$，则 $T'$ 只能在 $\triangle A_1BD$ 的内部或者它的边界上，但不和 $B$ 点重合.

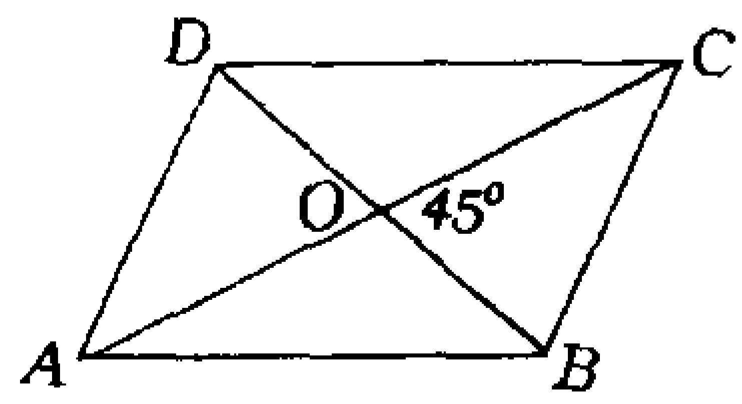
注意到 $BA_1 = A_1C$，　$SA_1 = A_1D$，所以 $\triangle A_1BD$ 与 $\triangle A_1CS$ 关于 $A_1$ 对称. 于是 $T'$ 关于 $A_1$ 的对称点也是整点，并且在 $\triangle A_1CS$ 的内部或边界上，但不与 $C$ 重合. 由于在 $\triangle ABC$ 内只有一个整点 $T$，于是在 $\triangle AC_1S$ 与 $\triangle A_1CS$ 内部或边界上的这两个整点应为同一个整点. 这个整点只能在 $\triangle AC_1S$ 与 $\triangle A_1CS$ 的公共顶点 $S$ 处. 即 $T$ 与 $\triangle ABC$ 的重心 $S$ 重合.

13·29　证明在坐标平面上不能画出这样的平行四边形：它的一条对角线的长是另一条对角线长的两倍，且对角线之间的夹角等于 $45°$，而每个顶点的坐标都是整数.

（第 20 届全苏数学奥林匹克，1986 年）

[证]　在 $\triangle OBC$ 中.由余弦定理可得

$OC^2 + OB^2 - 2OB \cdot OC\cos 45^\circ = BC^2$.




设 $AC = 2BD$,则 $OC = 2OB$.

$4OB^2 + OB^2 - \sqrt{2}OB \cdot 2OB = BC^2$.

$$BD^2 + \frac{1}{4}BD^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}BD^2 = BC^2.$$

$$5BD^2 - 2\sqrt{2}BD^2 = 4BC^2.$$

$$(5 - 2\sqrt{2})BD^2 = 4BC^2. \quad ①$$

因为 $A,B,C,D$ 是整点,则 $BD^2$ 和 $BC^2$ 是整数,因此①式不可能成立.从而本题得证.

13·30　设 $L$ 是直角坐标平面的一个子集,定义如下:

$$L = \{(41x + 2y,\quad 59x + 15y) \mid x,y \in Z\}.$$

证明一切以坐标原点为中心的面积等于 1990 的平行四边形至少包含 $L$ 中的两个点.

（第 31 届国际数学奥林匹克候选题,1990 年）

[证]　取 $(x,y) = (0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$ 得到 $L$ 中的四个点 $(0,0),(2,15),(41,59),(43,74)$.

设这四个整点为顶点构成基本区域 $F$,$F$ 为平行四边形,其中没有其他整点.

这时,$F$ 的面积为
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 41 & 59 \\ 1 & 2 & 15 \end{vmatrix} = 497.$$

将 $F$ 平移形成平面的网格,其格点均为 $L$ 中的点.

设平行四边形 $P$ 以原点为对称中心,面积为 1990.

以原点为位似中心,作位似比为 $2:1$ 的位似变换,将 $P$ 变成 $\frac{1}{2}P$,这时面积变为

$$\frac{1}{4} \cdot 1990 = 497\frac{1}{2} > 497.$$

所以将 $\frac{1}{2}P$ 的各块经过平行移动到 $F$ 中后,必有两个点重合.

设这两个点为 $D_1(x_1,y_1)$,$D_2(x_2,y_2)$,分别沿 $\overrightarrow{OA_1}$,$\overrightarrow{OA_2}$ 平移,其中 $A_1(a_1,b_1)$,$A_2(a_2,b_2)$ 都是 $L$ 中的点,则

$$(x_1,y_1)+(a_1,b_1)=(x_2,y_2)+(a_2,b_2).$$

从而

$$(a_1-a_2,b_1-b_2)=(a_1,b_1)-(a_2,b_2)=(x_2,y_2)-(x_1,y_1).$$

易知点 $D(x_2-x_1,y_2-y_1)\in P$,点 $D(a_1-a_2,b_1-b_2)\in L$.并且 $D$ 不同于(0,0).

所以 $P$ 中至少有 $L$ 中的两个点.

13·31　其坐标(关于某个直角坐标系)为整数的点叫做整点.证明:如果某一平行四边形的顶点和整点相重合,在平行四边形的内部或它的边上还有另外的整点,那么,这个平行四边形的面积大于1.

(匈牙利数学奥林匹克,1941年)

[证]　我们把顶点为整点的多边形叫做整点多边形.

设整点三角形 $P_1P_2P_3$ 的顶点

$$P_i(x_i,y_i),\quad i=1,2,3.$$

如果这样的三角形不是蜕化的.那么它的面积满足不等式

$$S=\left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right|$$

$$\geqslant\frac{1}{2}.$$

假设在整点平行四边形内部或它的边上,除了顶点之外,至少还有一个整点,将这个整点和平行四边形的四个顶点连接起来,于是我们将整点平行四边形至少分成三个非锐化的整点三角形,因为它们之中每一个的面积都不小于$\frac{1}{2}$,所以平行四边形的面积不小于$\frac{3}{2}$,于是这个平行四边形的面积大于1.

13·32　给定整数 $n>1$ 及实数 $t\geqslant1$. $P$ 为一个平行四边形,它的四个顶点分别为(0,0),$(0,t)$,$(tF_{2n+1},tF_{2n})$,$(tF_{2n+1},tF_{2n}+t)$,设 $L$ 是 $P$ 的内部的整点的个数,又设 $M$ 是 $P$ 的面积 $t^2F_{2n+1}$.

(1) 证明对任意整点$(a,b)$,存在一对惟一的整数 $j,k$,使得

$$j(F_{n+1},F_n)+k(F_n,F_{n-1})=(a,b).$$

(2) 利用(1),或其他方法证明 $|\sqrt{L}-\sqrt{M}|\leqslant\sqrt{2}$.

(按照惯例,$F_0=0,\quad F_1=1,\quad F_{m+1}=F_m+F_{m-1}$,所有关于裴波那契数列的恒等式均可利用,无需证明)

(第 31 届国际数学奥林匹克候选题,1990 年)

**[证]** (1) 本题等价于线性方程组

$$\begin{cases} jF_{n+1}+kF_n=a, \\ jF_n+kF_{n-1}=b. \end{cases}$$

有惟一整数解.

注意到关于裴波那契数的恒等式

$$F_{n+1}F_{n-1}-F_n^2=(-1)^n.$$

则方程组的惟一解为

$$j=\frac{aF_{n-1}-bF_n}{F_{n+1}F_{n-1}-F_n^2}=\frac{aF_{n-1}-bF_n}{(-1)^n},$$

$$k=\frac{bF_{n+1}-aF_n}{F_{n+1}F_{n-1}-F_n^2}=\frac{bF_{n+1}-aF_n}{(-1)^n}.$$

对任意整点 $(a,b)$,$j,k$ 均为整数.

(2) 当且仅当

$$\begin{aligned}(a,b)&=u(0,1)+v(F_{2n+1},F_{2n})\\&=(vF_{2n+1},u+vF_{2n})\end{aligned}$$

(这里 $0<u<t,0<v<t$) 时,点 $(a,b)$ 在平行四边形的内部.

$L$ 就是整数对 $(j,k)$ 的数目,这里

$$\begin{aligned}j&=(-1)^n(aF_{n-1}-bF_n)\\&=(-1)^n[vF_{2n+1}F_{n-1}-(u+vF_{2n})F_n]\\&=(-1)^n[v(F_{2n+1}F_{n-1}-F_{2n}F_n)-uF_n]\\&=vF_{n+1}-(-1)^nuF_n.\\k&=(-1)^n[(u+vF_{2n})F_{n+1}-vF_{2n+1}F_n]\\&=(-1)^n[v(F_{2n}F_{n+1}-F_{2n+1}F_n)+uF_{n+1}]\\&=vF_n+(-1)^nuF_{n+1},\end{aligned}$$

$$0<u<t,\quad 0<v<t.$$

这里,我们用到恒等式

$$F_pF_{q+1}-F_{p+1}F_q=(-1)^qF_{p-q}.$$

设四边形 $ABCD$ 为

$$A(0,0),\quad B=t(F_{n+1},F_n),\quad C=(-1)^n t(-F_n,F_{n+1}),$$

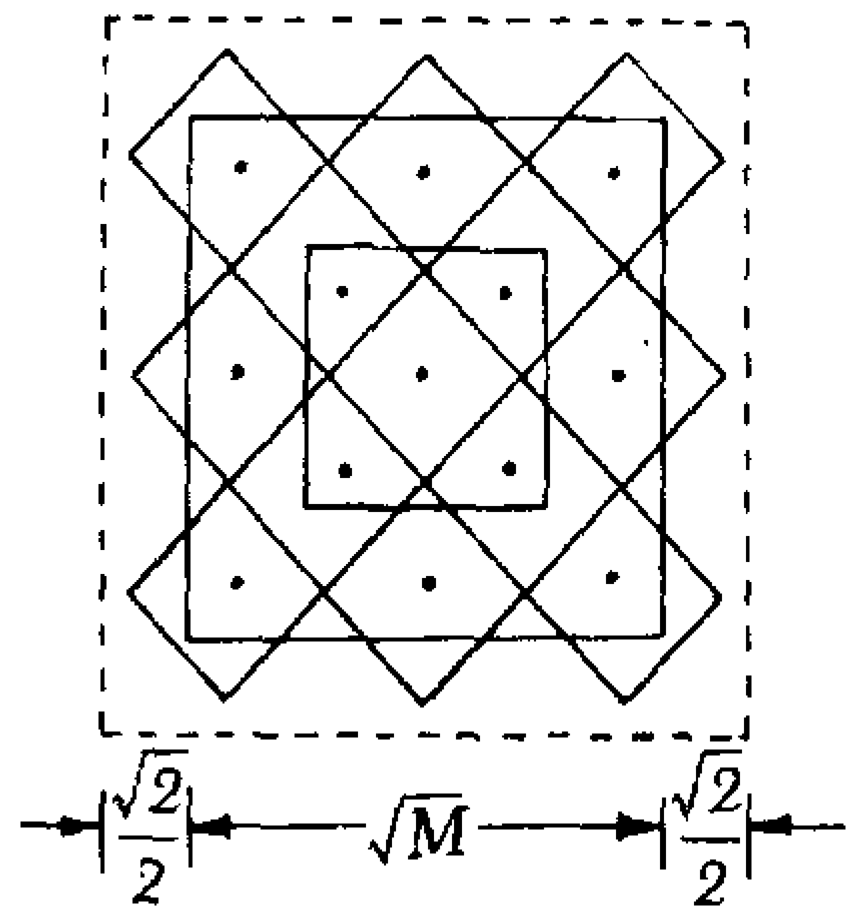
$D=B+C$.

因此，$L$ 是四边形 $ABCD$ 内部整点的个数.

显然，$C$ 是 $B$ 绕 $A$ 旋转 90° 而得到的点. 所以，$ABCD$ 是正方形. 它的边长

$$t\sqrt{F_{n+1}^2+F_n^2}=t\sqrt{F_{2n+1}}=\sqrt{M}.$$

正方形内部的整点个数 $L$，即以这些整点为中心，边平行于坐标轴的单位正方形的个数，这些单位正方形被一个边长为 $\sqrt{M}+\sqrt{2}$ 的正方形包含(如图)，它们又完全盖住一个边长为 $\sqrt{M}-\sqrt{2}$ 的边与 $ABCD$ 平行的正方形，因此




$$(\sqrt{M}-\sqrt{2})^2\leqslant L\leqslant(\sqrt{M}+\sqrt{2})^2,$$

即
$$|\sqrt{L}-\sqrt{M}|\leqslant\sqrt{2}.$$

13·33　给定素数 $p>3$. 在坐标平面上考察由坐标为整数的点 $(x,y)$ 构成的集合 $M$，其中 $0\leqslant x<p$，$0\leqslant y<p$. 证明可以标出集合 $M$ 中 $p$ 个不同的点，使其中的任何三点都不共线，任何四点都不是同一个平行四边形的顶点.

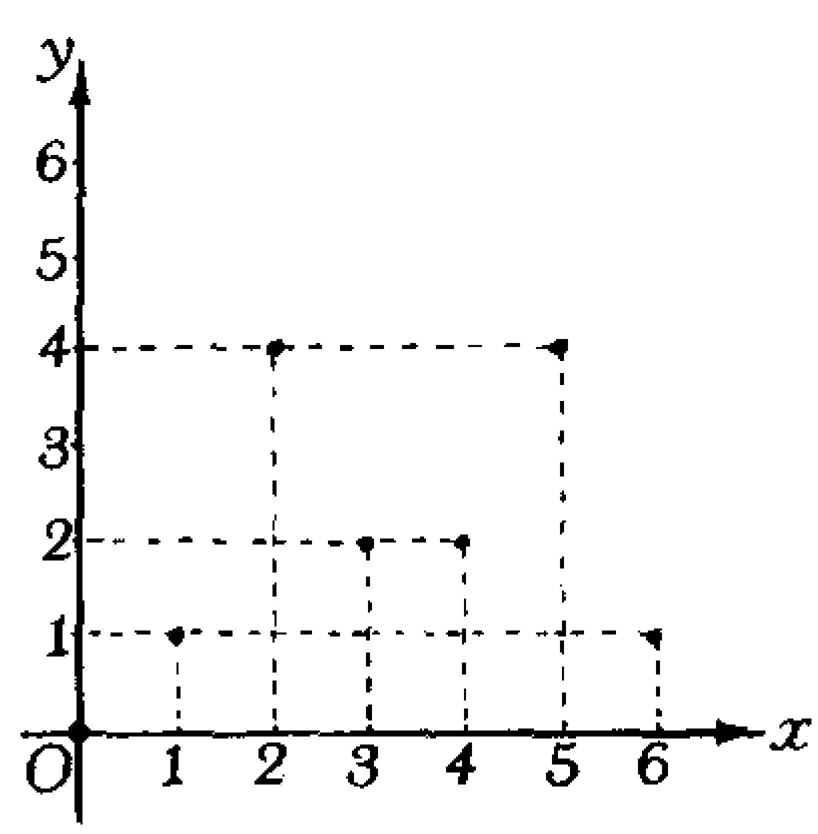
(第 12 届全苏数学奥林匹克，1978 年)

**[证]**　设　$r(k)\equiv k^2 \pmod p$，

且 $0\leqslant r(k)\leqslant p-1$.

我们取点 $A_k=(k,r(k))$ 构成的集合，即为所求的集合，其中 $k=0,1,2,\cdots,p-1$

例如 $p=7$，即为图中的 7 个点.




首先证明这 $p$ 个点中任意三点不在一条直线上.

如果某三点 $A_t,A_m,A_n$ $(t<m<n<p)$ 在同一条直线上，则它们三点中每两

点间连线的斜率都相等,即下面的关系式成立:

$$\frac{r(m)-r(t)}{m-t}=\frac{r(n)-r(m)}{n-m}.$$

即对于某些整数 $a,b$,有

$$(n-m)(m^2-t^2+ap)=(m-t)(n^2-m^2+bp).$$

整理得

$$(n-m)(m-t)(t-n)=[(m-t)b-(n-m)a]p.$$

则 $$p\mid(n-m)(m-t)(t-n).\qquad ①$$

而 $|n-m|<p$, $|m-t|<p$, $|t-n|<p$, $p$ 是素数,则 ① 式不可能成立.

于是 $A_t,A_m,A_n$ 三点不在同一条直线上.

下面再证这 $p$ 个点中任意 4 点都不是同一个平行四边形的顶点.

设这四点为 $A_k,A_t,A_m,A_n$.

若四边形 $A_kA_tA_mA_n$ 是平行四边形,则有

$$A_kA_t \mathrel{\underline{\mathbin{/\!/}}} A_nA_m.$$

于是有 $$\begin{cases}t-k=m-n. & ②\\ r(t)-r(k)=r(m)-r(n). & ③\end{cases}$$

由 ③ 可得 $p\mid(t^2-k^2)-(m^2-n^2)$.

再由 ② $$p\mid(m-n)(t+k-m-n).$$

即 $$p\mid 2(m-n)(t-m).\qquad ④$$

由 $p$ 是大于 3 的素数,及 $|m-n|<p$, $|t-m|<p$ 可知 ④ 式不可能成立.

因而 $A_k,A_t,A_m,A_n$ 不是平行四边形的四个顶点.

于是 $M=\{(k,r(k))\mid r(k)\equiv k^2 \pmod p,\ 0\leqslant k\leqslant p-1,\ 0\leqslant r(k)\leqslant p-1,\ k\in Z\}$ 为所求.

13·34 设((.,.))是平面上两个点之间的一种运算:$C=((A,B))$ 是 $A$ 点关于 $B$ 点的对称点.给定正方形的三个顶点,能否只利用运算((.,.))作出正方形的第四个顶点?

(基辅数学奥林匹克,1978 年)

[解] 在平面上建立一个直角坐标系,使得给定的正方形的三个顶点的坐标为(0,0),(0,1),(1,0).

我们证明:若 $A,B,C$ 是三个整点,且任意一点的两个坐标中至少

有一个是偶数，则 $A,B,C$ 三点经过任意有限多次这样的((.,.))运算之后，所得的点是整点，且其中至少有一个坐标为偶数.

假设经过若干次运算之后，我们得到点 $R(x,y)$，它与点 $P(x_1,y_1)$ 关于 $Q(x_2,y_2)$ 对称，其中 $x_2$ 和 $y_2$，$x_1$ 和 $y_1$ 都是整数，且其中各至少有一个是偶数.

因为 $Q$ 是 $PR$ 的中点，故

$$\frac{x+x_1}{2}=x_2,\quad \frac{y+y_1}{2}=y_2.$$

即
$$x=2x_2-x_1,\quad y=2y_2-y_1.$$

由于 $x_1,y_1,x_2,y_2$ 都是整数，故 $x,y$ 也都是整数.

除此之外，根据假设 $x_1,y_1$ 中至少有一个是偶数，故若 $x_1(y_1)$ 是偶数，则相应的 $x(y)$ 也是偶数. 因而点 $R$ 的坐标 $x$ 和 $y$ 中至少有一个偶数.

于是，由点 $A,B,C$ 经过有限次((.,.))得到的点，它是整点，且两个坐标中至少有一个是偶数.

由于给定的正方形的三个顶点的坐标为(0,0)，(0,1)和(1,0)，每一个顶点的两个坐标中至少有一个是偶数. 并且正方形的第四个顶点为 $D(1,1)$，两个坐标都是奇数，因而 $D$ 点不能得到.

**13·35** 在坐标平面上给定一个凸五边形 $ABCDE$，其所有顶点的坐标都是整数. 证明在五边形内总是可以找到具有整数坐标的点，即使是只有一个这样的点，类似的结论对非凸五边形正确吗?

（第 9 届全俄数学奥林匹克，1983 年）

**[证]** 首先证明，五边形有两个相邻顶点，在该两顶点上的内角之和大于 180°. 否则

$$\angle A+\angle B\leqslant 180^\circ,\quad \angle B+\angle C\leqslant 180^\circ,$$
$$\angle C+\angle D\leqslant 180^\circ,\quad \angle D+\angle E\leqslant 180^\circ,$$
$$\angle E+\angle A\leqslant 180^\circ.$$

于是
$$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E\leqslant 450^\circ$$

与
$$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E=540^\circ \text{ 矛盾.}$$

假设 $\angle A+\angle B>180^\circ$.

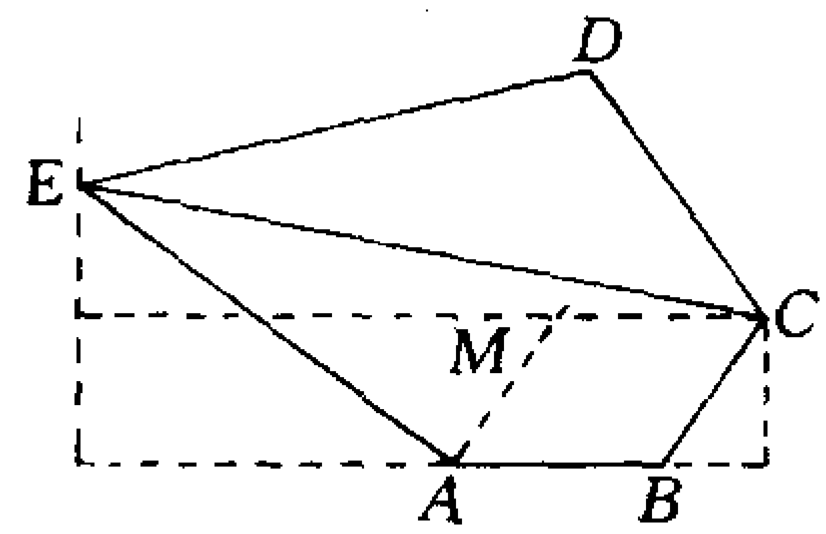
用 $d_E$ 和 $d_C$ 分别表示从点 $E$ 和点 $C$ 到直线 $AB$ 的距离.

不妨设 $d_E\geqslant d_C$. 作平行四边形 $AMCB$.

因为 $\angle CBA + \angle BAE > 180^\circ$，而

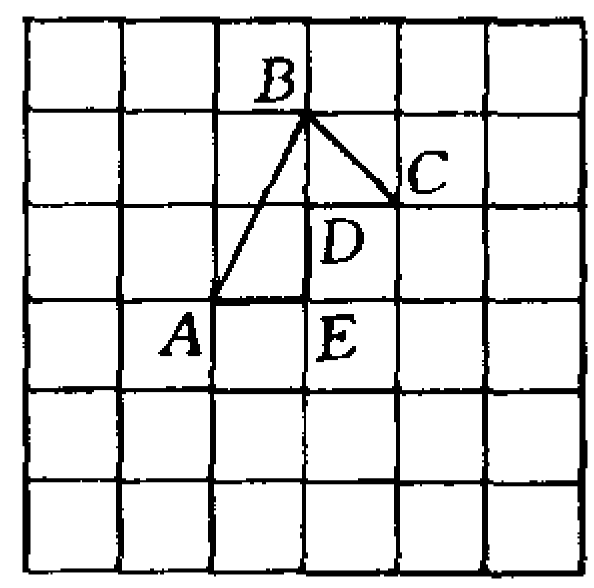
$$\angle CBA + \angle BAM = 180^\circ,$$

所以射线 $AM$ 在 $\angle BAE$ 的内部.




又因为 $d_E \geqslant d_C$，故或是点 $E$ 位于直线 $CM$ 上(如果 $d_E = d_C$)，或是点 $A$ 和 $E$ 分别在直线 $CM$ 的两侧(如果 $d_E > d_C$).

因此，$M$ 或在四边形 $ABCE$ 内，或在边 $CE$ 上，且 $M \neq C$，$M \neq E$. 由于五边形 $ABCDE$ 是凸的，所以点 $M$ 在凸五边形的内部.




设 $A(x_A, y_A)$，$B(x_B, y_B)$，$C(x_C, y_C)$，$D(x_D, y_D)$ 都是整点，则

$$x_M = x_A + x_C - x_B, \quad y_M = y_A + y_C - y_B$$

是整数，因而 $M$ 是整点.

对于非凸五边形是不正确的，如图 $A, B, C, D, E$ 都是整点，然而在其内部没有整点.

13·36　对于什么样的整数 $n \geqslant 3$，平面上有一正 $n$ 边形，它的顶点全是整点？

（第 26 届国际数学奥林匹克候选题，1985 年）

［解］　我们证明，当且仅当 $n = 4$ 时，有一正 $n$ 边形的顶点全是整点.

当 $n = 4$ 时，正方形的顶点全部是整点是显然的.

若 $n = 3$，即正三角形 $ABC$ 的顶点都是整点，设 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，$C(x_3, y_3)$，其中 $x_i$ 和 $y_i$ $(i = 1, 2, 3)$ 都是整数. $\triangle ABC$ 的面积为 $S$，则

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

的绝对值.

显然，$S$ 是有理数.

另一方面，

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}AB^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2],$$

则 $S$ 是无理数.

出现矛盾.

所以 $n=3$ 时,正三角形的三个顶点不能都是整点.

由此推出 $n=6$ 时,正六边形的六个顶点不能都是整点.

设 $n\neq 3,4,6$.且正 $n$ 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 是所有以整点为顶点的正 $n$ 边形中边长最短的一个.

设 $B_i$ 是 $A_i$ 按着向量 $\overrightarrow{A_{i+1}A_{i+2}}$ 的方向和大小做平行移动得到的点,即 $\overrightarrow{A_iB_i}=\overrightarrow{A_{i+1}A_{i+2}}$,这时,$B_1B_2\cdots B_n$ 是正 $n$ 边形,它的顶点都是整点,然而它的边长小于正 $n$ 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的边长,与正 $n$ 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的选取相矛盾.

所以,仅当 $n=4$ 时,正 $n$ 边形的顶点都是整点.

**13·37** 设 $P_1,P_2,\cdots,P_{1993}=P_0$ 是平面 $xoy$ 上具有下列性质的不同的点:

(1) $P_i$ 的坐标是两个整数,其中 $i=1,2,\cdots,1993$;

(2) 除 $P_i$ 和 $P_{i+1}$ 外,在线段 $P_iP_{i+1}$ 上没有坐标是两个整数的点,其中 $i=0,1,2,\cdots,1992$.

证明对于某个 $i$, $0\leqslant i\leqslant 1992$,在线段 $P_iP_{i+1}$ 上存在一个点 $Q(q_x,q_y)$ 使得 $2q_x$ 和 $2q_y$ 是奇整数.

(亚太地区数学奥林匹克,1993 年)

**[证]** 设向量 $\overrightarrow{P_iP_{i+1}}$ 有分量 $u_i,v_i$,其中 $i=0,1,2,\cdots,1992$.

则每对 $u_i,v_i$ 满足 $(u_i,v_i)=1$.

否则,在 $P_i$ 和 $P_{i+1}$ 间还应有另外一个整点.

假设在任一线段 $P_iP_{i+1}$ 上均不包含所需的点 $Q$,则

$$u_i+v_i\equiv 1 \pmod 2.$$

其中 $i=0,1,2,\cdots,1992$.因此

$$\sum_{i=0}^{1992}(u_i+v_i)\equiv 1993\equiv 1 \pmod 2.$$

然而,向量 $\overrightarrow{P_iP_{i+1}}$ 的总和为零向量,这意味着

$$\sum_{i=0}^{1992}u_i=0$$

和

$$\sum_{i=0}^{1992}v_i=0,$$

数论卷

这时就有

$$\sum_{i=0}^{1992}(u_i+v_i)=0.$$

出现了矛盾.

所以对某个 $i$, $0\leqslant i\leqslant 1992$,在线段 $P_iP_{i+1}$ 上存在一个点 $Q(q_x, q_y)$,使得 $2q_x$ 和 $2q_y$ 是奇整数.

13·38 在平面直角坐标系中给定一个 100 边形 $P$,满足

(i) $P$ 的顶点坐标都是整数;

(ii) $P$ 的边都与坐标轴平行;

(iii) $P$ 的边长都是奇数.

求证 $P$ 的面积是奇数.

(中国国家集训队选拔试题,1986 年)

[证 1] 先给出一个引理:

给定复平面上一个 $n$ 边形 $P$,其顶点对应的复数分别为 $z_1,z_2,\cdots,z_n$. 则 $P$ 的有向面积为

$$S=\frac{1}{2}Im(z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_3}+\cdots+z_{n-1}\overline{z_n}+z_n\overline{z_1})$$

其中 $Im(z)$ 表示复数 $z$ 的虚部.

此引理可以利用 $n=3$ 时的结论,用数学归纳法加以证明.

下面证明命题本身.

设 $P$ 的顶点对应的复数为

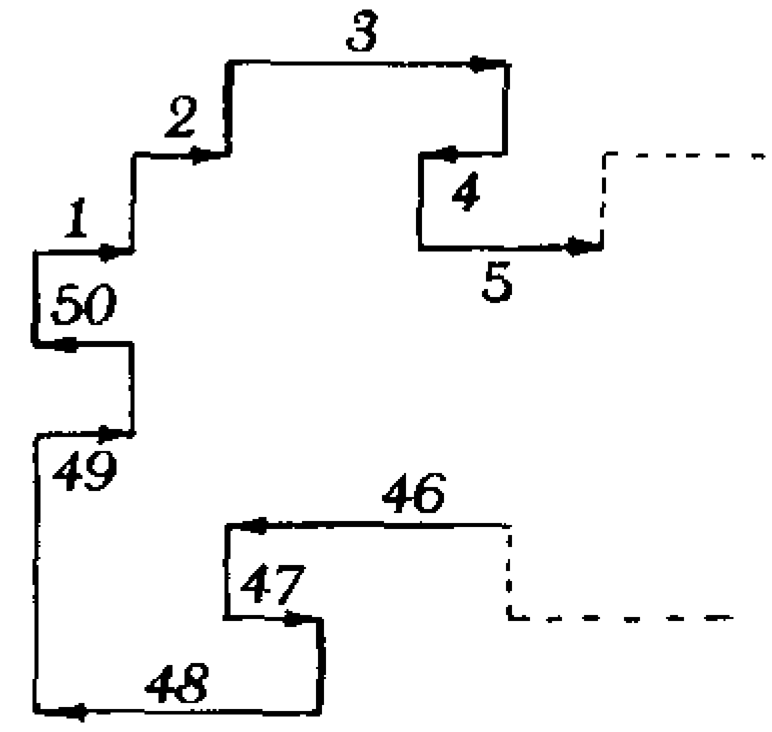
$$z_j=x_j+iy_j,\quad j=1,2,\cdots,100.$$

由题设可知,$x_j$ 和 $y_j$ 都是整数.

再由题设(ii) 和(iii),又可设

$$\begin{cases}x_{2j}=x_{2j-1},\\ y_{2j}=y_{2j-1}+\text{奇数},\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_{2j+1}=x_{2j}+\text{奇数},\\ y_{2j+1}=y_{2j}.\end{cases}$$




这里 $1\leqslant j\leqslant 50$, $x_{101}=x_1$, $y_{101}=y_1$, 并约定 $y_0=y_{100}$.

由引理,$P$ 的有向面积为

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2} Im \sum_{j=1}^{100} z_j \bar{z}_{j+1} \\
&= \frac{1}{2} Im \sum_{j=1}^{100} (x_j + iy_j)(x_{j+1} - iy_{j+1}) \\
&= \frac{1}{2} Im \sum_{j=1}^{100} [(x_j x_{j+1} + y_j y_{j+1}) + i(x_{j+1} y_j - x_j y_{j+1})] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{100} (x_{j+1} y_j - x_j y_{j+1}) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{50} (x_{2j+1} y_{2j} - x_{2j} y_{2j+1}) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{50} (x_{2j} y_{2j-1} - x_{2j-1} y_{2j}) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{50} (x_{2j+1} y_{2j} - x_{2j-1} y_{2j}) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{50} (x_{2j-1} y_{2j-2} - x_{2j-1} y_{2j}) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{50} (x_{2j+1} y_{2j} - x_{2j-1} y_{2j}) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{50} x_{2j+1} y_{2j} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{50} x_{2j-1} y_{2j} \\
&= \sum_{j=1}^{50} (x_{2j+1} y_{2j} - x_{2j-1} y_{2j}) \\
&= \sum_{j=1}^{50} (x_{2j+1} - x_{2j-1}) y_{2j} \\
&= \sum_{j=1}^{50} m_j y_{2j} \qquad (m_j \text{ 为奇数}) \\
&\equiv \sum_{j=1}^{50} y_{2j} \qquad (\bmod 2) \\
&\equiv \sum_{j=1}^{25} (y_{4j} - y_{4j-2}) \qquad (\bmod 2) \\
&\equiv \sum_{j=1}^{25} 1 \qquad (\bmod 2) \\
&\equiv 1. \qquad (\bmod 2)
\end{aligned}
$$

即 $P$ 的面积是奇数.

[证 2] 不妨设多边形 $P$ 全在第一象限内(否则可经适当的平移化成这一情形).

沿 $P$ 的边界循顺时针方向绕行一周($P$ 始终在行进方向的右侧),

依次将 50 条水平边编号为 1,2,…,50.将底边在 $OX$ 轴上,并且以第 $i$ 号水平边为顶点的矩形条面积记为 $S_i(i=1,2,\cdots,50)$.



于是,多边形 $P$ 的面积可以表示成各 $S_i$ 的代数和:

$$S=\sum_{i=1}^{50}(\pm S_i).$$

正负号则视沿该边前行时的方向与 $OX$ 轴的方向相同或相反而定.

例如,图中多边形 $P$ 的面积 $S$ 表示为

$S=S_1+S_2+S_3-S_4+S_5+\cdots-S_{46}+S_{47}-S_{48}+S_{49}-S_{50}$.

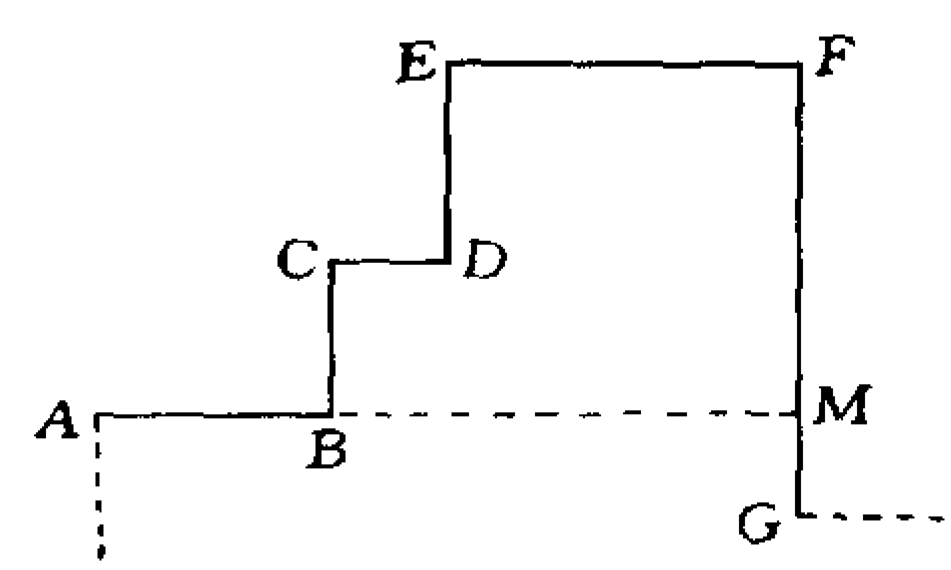
由于各矩形条的一条边长为奇数,则其面积的奇偶性由该矩形的高度决定.

由于边号相邻的两个矩形条,高度相差一个奇数,因而面积的奇偶性不同.

这样,在50个矩形条的面积当中,奇偶交替出现,从而恰有25个偶数,25 个奇数,其代数和 $S$ 必为奇数,即 100 边形 $P$ 的面积是奇数.

[证 3]　如图,设 $\cdots ABCDEFG\cdots$ 为 100 边形的一部分.

延长 $AB$ 交 $FG$ 所在的直线于 $M$ 点,易知 $AM$ 的长和 $GM$ 的长都是奇数,于是 96 边形 $\cdots AMG\cdots$ 的各边长都是奇数.




容易求出,六边形 $BCDEFM$ 的面积为奇数,从而100边形和96边形的面积有不同的奇偶性,同理,96 边形和 92 边形有不同的奇偶性,…,从而可推出 100 边形和 4 边形有相同的奇偶性,而边长都是奇数的满足条件的四边形的面积为奇数,于是所求的 100 边形的面积为奇数.

13·39　设 $M$ 为平面上坐标为$(p\times1994,7p\times1994)$的点,其中 $p$ 是素数.求满足下述条件的直角三角形的个数:

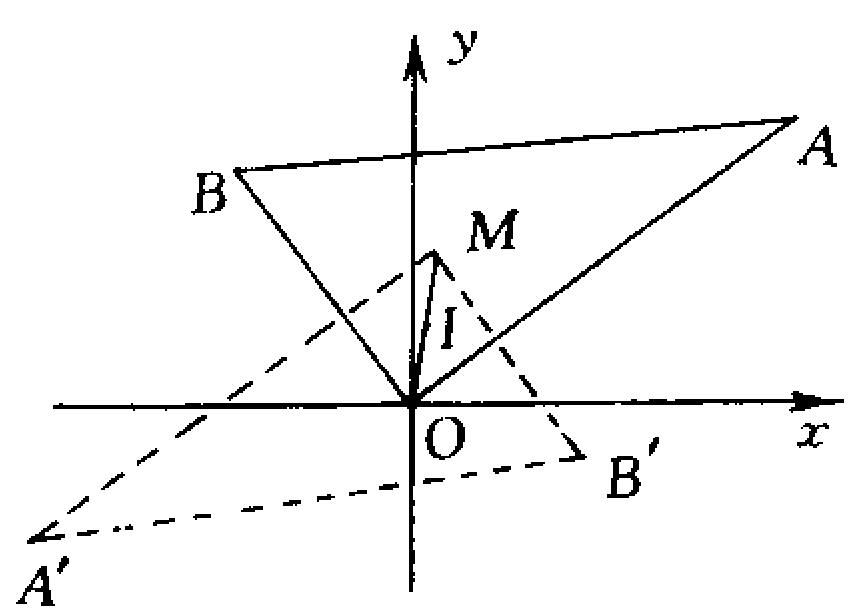
(1)三角形的三个顶点都是整点.而且 $M$ 是直角顶点;

(2)三角形的内心是坐标原点.

(第 9 届中国中学生数学冬令营,1994 年)

[解]　连坐标原点 $O$ 及点 $M$,取线段 $OM$ 的中点 $I$ $(p\times997,7p$

$\times 997$)，把满足条件的一个直角三角形关于点 $I$ 作一个中心对称，即把点$(x,y)$变换为点$(p\times 1994-x,7p\times 1994-y)$. 于是，满足题目条件的一个整点直角三角形变为一个与之全等的整点直角三角形，三角形的内心变为点 $M$，直角顶点变为坐标原点. 因此，所求整点直角三角形的个数，只须考虑直角顶点在坐标原点，内心在点 $M$ 的情况即可.




考虑满足上述条件的整点直角$\triangle OAB$.

设 $\angle xOA=\alpha, \angle xOM=\beta$. 则 $\alpha+\frac{\pi}{4}=\beta$.

由题设条件可知 $\mathrm{tg}\beta=7$.

$$\mathrm{tg}\alpha=\mathrm{tg}\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\mathrm{tg}\beta-\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}}{1+\mathrm{tg}\beta\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}}=\frac{3}{4}.$$

于是直角边 $OA$ 上的任一点的坐标可写成$(4t,3t)$.

由于 $A$ 是整点，若 $A(4t,3t)$，$t\in N$，则 $OA=5t$.

由$\angle yOB=\alpha$ 可知，$B$ 点的坐标为$(-3t_0,4t_0)$，$t_0\in N$，$OB=5t_0$.

直角三角形内切圆半径 $r=\frac{\sqrt{2}}{2}OM=5p\times 1994$.

设 $OA=2r+p_0, OB=2r+q_0$,

由于 $OA, OB, r$ 都是 5 的倍数，则 $p_0, q_0$ 也是 5 的倍数.

$$AB=OA+OB-2r=2r+p_0+q_0.$$

由勾股定理，$AB^2=OA^2+OB^2$，即

$$(2r+p_0+q_0)^2=(2r+p_0)^2+(2r+q_0)^2,$$

则 $\quad p_0q_0=2r^2$,

即 $\quad p_0q_0=2\cdot 5^2\cdot 1994^2\cdot p^2$

由$\frac{p_0}{5},\frac{q_0}{5}$都是自然数，可得

$$\frac{p_0}{5}\cdot\frac{q_0}{5}=2^3\times 977^2\times p^2.$$

当 $p\neq 2$ 和 $p\neq 997$ 时，

$$\begin{cases}\dfrac{p_0}{5}=2^i\times 997^j\times p^k,\\ \dfrac{q_0}{5}=2^{3-i}\times 997^{2-j}\times p^{2-k}.\end{cases}$$

其中 $i=0,1,2,3, j=0,1,2, k=0,1,2$.

于是$\left(\dfrac{p_0}{5},\dfrac{q_0}{5}\right)$有 $4\times3\times3=36$ 组不同的有序解.

当 $p=2$ 时,有

$$\begin{cases}\dfrac{p_0}{5}=2^i\times 997^j,\\ \dfrac{q_0}{5}=2^{5-i}\times 997^{2-j}.\end{cases}$$

其中 $i=0,1,2,3,4,5, j=0,1,2$.

于是$\left(\dfrac{p_0}{5},\dfrac{q_0}{5}\right)$有 $6\times3=18$ 组不同的有序解.

当 $p=997$ 时,有

$$\begin{cases}\dfrac{p_0}{5}=2^i\times 997^j,\\ \dfrac{q_0}{5}=2^{3-i}\times 997^{4-j}.\end{cases}$$

这里 $i=0,1,2,3, j=0,1,2,3,4$.

于是$\left(\dfrac{p_0}{5},\dfrac{q_0}{5}\right)$有 $4\times5=20$ 组不同的有序解.

由以上,所求直角三角形的个数:

$$S=\begin{cases}36, & \text{当 } p\neq2 \text{ 和 } p\neq997 \text{ 时},\\ 18, & \text{当 } p=2 \text{ 时},\\ 20, & \text{当 } p=997 \text{ 时}.\end{cases}$$

# 第十四章　函数[ $x$ ]

14·1　试问：对 $x>1$，下面的等式

$$\left[\sqrt{[\sqrt{x}]}\right]=\left[\sqrt{\sqrt{x}}\right]$$

一定能成立吗？

（第 44 届莫斯科数学奥林匹克，1981 年）

**[解]** 由函数 $[\alpha]$ 的定义得

$$\left[\sqrt{\sqrt{x}}\right]\leqslant\sqrt{\sqrt{x}}<\left[\sqrt{\sqrt{x}}\right]+1.$$

设 $\left[\sqrt{\sqrt{x}}\right]=n$，　则有　$n^4\leqslant x<(n+1)^4$，

从而　$n^2\leqslant\sqrt{x}<(n+1)^2$，

$$n^2\leqslant[\sqrt{x}]<(n+1)^2,$$

$$n\leqslant\sqrt{[\sqrt{x}]}<n+1,$$

$$n\leqslant\left[\sqrt{[\sqrt{x}]}\right]<n+1,$$

因此　$\left[\sqrt{[\sqrt{x}]}\right]=n$. 于是　$\left[\sqrt{[\sqrt{x}]}\right]=\left[\sqrt{\sqrt{x}}\right]$.

14·2　如果 $n$ 为一正整数，试证

$$[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}]=[\sqrt{4n+2}].$$

（第 8 届美国普特南数学竞赛，1948 年）

**[证]** 由公式

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}$$

可得　$$\left(\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}{2}\right)^2\leqslant\frac{n+n+1}{2}=\frac{4n+2}{4}.$$

从而　$\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\leqslant\sqrt{4n+2}$.

再由函数$[x]$的单调性,$[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}]\leqslant[\sqrt{4n+2}]$.

假设对某个正整数$n$,有

$$[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}]\neq[\sqrt{4n+2}].$$

则
$$[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}]<[\sqrt{4n+2}].$$

令$p=[\sqrt{4n+2}]$,则

$$\sqrt{n}+\sqrt{n+1}<p\leqslant\sqrt{4n+2}.$$

平方后得
$$2n+1+2\sqrt{n(n+1)}<p^2\leqslant 4n+2.$$
$$2\sqrt{n(n+1)}<p^2-2n-1\leqslant 2n+1.$$
$$4n(n+1)<(p^2-2n-1)^2\leqslant 4n^2+4n+1.$$

由于$4n^2+4n$与$4n^2+4n+1$是两个相继整数,而$(p^2-2n-1)^2$也是整数,于是$(p^2-2n-1)^2=4n^2+4n+1$,

$$p^2=4n+2.$$

然而任何整数的平方不能被4除余2,于是出现矛盾.

因此,对每一个正整数$n$,都有

$$[\sqrt{n}]+[\sqrt{n+1}]=[\sqrt{4n+2}].$$

14·3　对每一正整数$n$,证明

$$[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}]=[\sqrt{4n+1}]=[\sqrt{4n+2}]=[\sqrt{4n+3}].$$

(第19届加拿大数学竞赛,1987年)

[证]　设$x$为正整数,且$x^2>4n+1$.

若$x$为偶数,则$x^2=4m>4n+1$,因而

$$m\geqslant n+1.$$
$$x^2=4m\geqslant 4n+4>4n+3.$$

同样有
$$x^2>4n+2.$$

若$x$为奇数,则

$$x^2=4m+1>4n+1.$$

同样有
$$x^2>4n+3.$$

特别地,取$x=[\sqrt{4n+1}]+1$,则有

$$[\sqrt{4n+1}]+1>\sqrt{4n+3}>\sqrt{4n+1}\geqslant[\sqrt{4n+1}],$$

所以
$$[\sqrt{4n+3}]=[\sqrt{4n+1}],$$

从而
$$[\sqrt{4n+1}]=[\sqrt{4n+2}]=[\sqrt{4n+3}].$$

另一方面

$$(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})^2=2n+1+2\sqrt{n(n+1)}$$
$$>2n+1+2n$$
$$=4n+1,$$
$$(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})^2<2n+1+2(n+1)=4n+3.$$

所以有 $4n+1<(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})^2<4n+3$,即

$$[\sqrt{4n+1}]\leqslant[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}]\leqslant[\sqrt{4n+3}].$$

于是有

$$[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}]$$
$$=[\sqrt{4n+1}]=[\sqrt{4n+2}]=[\sqrt{4n+3}].$$

**14·4** 已知 $m,n$ 是任意的非负整数.证明若规定 $0!=1$,则 $\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$ 是整数.

（第 14 届国际数学奥林匹克,1972 年）

**[证 1]** 对 $n$ 施行数学归纳法.

(1) 当 $n=0$ 时,由于对一切非负整数 $m$,

$$\frac{(2m)!0!}{m!0!(m+0)!}=\frac{(2m)!}{m!m!}=C_{2m}^{m}$$

是组合数,所以它是整数.

所以 $n=0$ 时,命题成立.

(2) 假设 $n=k$ 时,对一切非负整数 $m$,$\frac{(2m)!(2k)!}{m!k!(m+k)!}$ 都是整数.

则当 $n=k+1$ 时,

$$\frac{(2m)!(2k+2)!}{m!(k+1)!(m+k+1)!}$$
$$=\frac{(2k+2)(2m)!(2k+1)(2k)!}{m!(k+1)k!(m+k+1)!}$$
$$=\frac{2(2m)!(2k+1)(2k)!}{m!k!(m+k+1)!}$$
$$=\frac{4(2m)!(2k)!}{m!k!(m+k)!}-\frac{(2m+2)!(2k)!}{(m+1)!k!(m+1+k)!}.$$

由归纳假设,上式中的两项均为整数,所以 $n=k+1$ 时,命题成立.

于是,对一切非负整数 $m$ 和 $n$,$\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$ 是整数.



[证 2]　记 $f(m,n)=\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$.

因为

$$\begin{aligned}&\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}\\ =&\frac{4(2m)!(2n-2)!}{m!(n-1)!(m+n-1)!}-\frac{(2m+2)!(2n-2)!}{(m+1)!(n-1)!(m+n)!}\\ =&\frac{4(2m)![2(n-1)]!}{m!(n-1)![m+(n-1)]!}\\ &-\frac{[2(m+1)]![2(n-1)]!}{(m+1)!(n-1)![(m+1)+(n-1)]!}\end{aligned}$$

所以有

$$f(m,\ n)=4f(m,\ n-1)-f(m+1,\ n-1).\quad ①$$

由 ① 得　$f(m,n)=\sum_{k=0}^{1}C_{k1}\cdot f(m+k,n-1)$.

其中 $C_{k1}$ 是整数($k=0,1$).

继续使用 ①,由

$$\begin{aligned}&f(m+i,\ n-j)\\ =&4f(m+i,\ n-j-1)-f(m+i+1,\ n-j-1),\end{aligned}$$

其中 $0\leqslant i\leqslant n,\ 0\leqslant j\leqslant n-1$,得

$$\begin{aligned}f(m,n)&=\sum_{k=0}^{2}C_{k2}\cdot f(m+k,n-2)\\ &=\sum_{k=0}^{3}C_{k3}\cdot f(m+k,n-3)\\ &\cdots\cdots\\ &=\sum_{k=0}^{n}C_{kn}f(m+k,0),\end{aligned}$$

其中 $C_{k2},C_{k3},\cdots,C_{kn}$ 是整数.

注意到

$$\begin{aligned}f(m+k,\ 0)&=\frac{[2(m+k)]!}{(m+k)!(m+k)!}\\ &=C_{2(m+k)}^{m+k}\end{aligned}$$

是一个整数,

因此，$f(m,n)$ 是整数.

[证 3]　先证明下面一个引理：

若$[\alpha]$表示不超过 $\alpha$ 的最大整数，则对于非负实数 $x$ 和 $y$，恒有

$$[2x]+[2y]\geqslant[x+y]. \qquad ①$$

事实上，若 $0\leqslant x+y<1$，则

$$[x+y]=0.$$

而

$$[2x]+[2y]\geqslant 0,$$

此时，① 式成立.

若 $x+y\geqslant 1$，则$[x+y-1]\geqslant 0$，

$$\begin{aligned}[2x]+[2y]&\geqslant[2x+2y-1]=[(x+y)+(x+y-1)]\\&\geqslant[x+y]+[x+y-1]\\&\geqslant[x+y].\end{aligned}$$

此时，① 式亦成立.

由于在 $k!$的标准分解式中质因数 $p$ 的次数等于

$$\left[\frac{k}{p}\right]+\left[\frac{k}{p^2}\right]+\left[\frac{k}{p^3}\right]+\cdots.$$

因此，欲证 $\dfrac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$ 是整数，只需证明

$$\left[\frac{2m}{p^r}\right]+\left[\frac{2n}{p^r}\right]\geqslant\left[\frac{m}{p^r}\right]+\left[\frac{n}{p^r}\right]+\left[\frac{m+n}{p^r}\right]. \qquad ②$$

设 $m=b\cdot p^r+c\quad(0\leqslant c<p^r)$.

$n=d\cdot p^r+e\quad(0\leqslant e<p^r)$.

则

$$\begin{aligned}&\left[\frac{2m}{p^r}\right]+\left[\frac{2n}{p^r}\right]\\&=2b+\left[\frac{2c}{p^r}\right]+2d+\left[\frac{2e}{p^r}\right]\\&=2b+2d+\left[\frac{2c}{p^r}\right]+\left[\frac{2e}{p^r}\right]. \qquad ③\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\left[\frac{m}{p^r}\right]+\left[\frac{n}{p^r}\right]+\left[\frac{m+n}{p^r}\right]\\&=b+\left[\frac{c}{p^r}\right]+d+\left[\frac{e}{p^r}\right]+b+d+\left[\frac{c+e}{p^r}\right]\\&=2b+2d+\left[\frac{c+e}{p^r}\right]. \qquad ④\end{aligned}$$

由引理，即 ① 式可得

$$\left[\frac{2c}{p^r}\right]+\left[\frac{2e}{p^r}\right]\geqslant\left[\frac{c+e}{p^r}\right]. \qquad ⑤$$



从而由③、④、⑤可得②式成立.

于是 $\dfrac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$ 是整数.

14·5 (1) 证明 $[5x]+[5y]\geqslant[3x+y]+[3y+x]$ 其中 $x, y\geqslant 0$.

(2) 应用(1)或其他方法, 证明对于一切正整数 $m, n$, $\dfrac{(5m)!(5n)!}{m!n!(3m+n)!(3n+m)!}$ 是整数.

(第4届美国数学奥林匹克,1975年)

[证] (1) 设 $x=[x]+\alpha$, $y=[y]+\beta$,这里 $0\leqslant\alpha<1$, $0\leqslant\beta<1$. 则原式化为

$$5[x]+[5\alpha]+5[y]+[5\beta]$$
$$\geqslant 3[x]+[y]+[3\alpha+\beta]+3[y]+[x]+[3\beta+\alpha].$$

于是原不等式等价于

$$[x]+[y]+[5\alpha]+[5\beta]\geqslant[3\alpha+\beta]+[3\beta+\alpha].$$

因为 $0\leqslant\alpha<1$, $0\leqslant\beta<1$,我们把 $[0,1)$ 平均分成五等分,列成下表来比较 $[5\alpha]+[5\beta]$ 与 $[3\alpha+\beta]+[3\beta+\alpha]$ 的大小.

$[5\alpha]+[5\beta]$

| $\beta \backslash \alpha$ | $\left[0,\frac{1}{5}\right)$ | $\left[\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right)$ | $\left[\frac{2}{5},\frac{3}{5}\right)$ | $\left[\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$ | $\left[\frac{4}{5},1\right)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\left[0,\frac{1}{5}\right)$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $\left[\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right)$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $\left[\frac{2}{5},\frac{3}{5}\right)$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $\left[\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$ | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| $\left[\frac{4}{5},1\right)$ | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |

$[3\alpha+\beta]+[3\beta+\alpha]$

| $\beta$ \ $\alpha$ | $\left[0,\frac{1}{5}\right)$ | $\left[\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right)$ | $\left[\frac{2}{5},\frac{3}{5}\right)$ | $\left[\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$ | $\left[\frac{4}{5},1\right)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\left[0,\frac{1}{5}\right)$ | 0 | $\leqslant 1$ | $\leqslant 2$ | $\leqslant 3$ | $\leqslant 4$ |
| $\left[\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right)$ | $\leqslant 1$ | $\leqslant 2$ | $\leqslant 3$ | $\leqslant 3$ | $\leqslant 5$ |
| $\left[\frac{2}{5},\frac{3}{5}\right)$ | $\leqslant 2$ | $\leqslant 3$ | $\leqslant 4$ | $\leqslant 4$ | $\leqslant 5$ |
| $\left[\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$ | $\leqslant 3$ | $\leqslant 3$ | $\leqslant 4$ | $\leqslant 6$ | $\leqslant 6$ |
| $\left[\frac{4}{5},1\right)$ | $\leqslant 4$ | $\leqslant 5$ | $\leqslant 5$ | $\leqslant 6$ | $\leqslant 6$ |

由上表可得

$$[5\alpha]+[5\beta]\geqslant[3\alpha+\beta]+[3\beta+\alpha].$$

又由 $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$ 得

$$[x]\geqslant 0,\quad [y]\geqslant 0.$$

于是 $[x]+[y]+[5\alpha]+[5\beta]\geqslant[3\alpha+\beta]+[3\beta+\alpha]$.

从而要证的不等式$[5x]+[5y]\geqslant[3x+y]+[3y+x]$成立.

(2) 由(1)的证明及$[\alpha]=[\beta]=0$可得

$$[5\alpha]+[5\beta]\geqslant[\alpha]+[\beta]+[3\alpha+\beta]+[3\beta+\alpha].$$

从而有

$$[5x]+[5y]\geqslant[x]+[y]+[3x+y]+[3y+x].\quad ①$$

由于能够除尽 $m!$的素数 $p$ 的最高次方指数是

$$\sum_{t=1}^{\infty}\left[\frac{m}{p^t}\right]=\left[\frac{m}{p}\right]+\left[\frac{m}{p^2}\right]+\left[\frac{m}{p^3}\right]+\cdots.$$

于是分母 $m!n!(3m+n)!(3n+m)!$中含素数 $p$ 的最高次方指

数是

$$\sum_{t=1}^{\infty}\left[\frac{m}{p^t}\right]+\sum_{t=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^t}\right]+\sum_{t=1}^{\infty}\left[\frac{3m+n}{p^t}\right]+\sum_{t=1}^{\infty}\left[\frac{3n+m}{p^t}\right]$$

$$=\sum_{t=1}^{\infty}\left(\left[\frac{m}{p^t}\right]+\left[\frac{n}{p^t}\right]+\left[\frac{3m+n}{p^t}\right]+\left[\frac{3n+m}{p^t}\right]\right).\qquad ②$$

分子$(5m)!(5n)!$中含素数 $p$ 的最高次方指数是

$$\sum_{t=1}^{\infty}\left[\frac{5m}{p^t}\right]+\sum_{t=1}^{\infty}\left[\frac{5n}{p^t}\right]$$

$$=\sum_{t=1}^{\infty}\left(\left[\frac{5m}{p^t}\right]+\left[\frac{5n}{p^t}\right]\right).\qquad ③$$

由 ②、③ 及不等式 ① 可知,分子中素数 $p$ 的方次数大于或等于分母中素数 $p$ 的方次数,因而对一切正整数 $m,n$,

$$\frac{(5m)!(5n)!}{m!n!(3m+n)!(3n+m)!}$$

是整数.

14·6 若 $x$ 为正实数,$n$ 为正整数.证明

$$[nx]\geqslant\frac{[x]}{1}+\frac{[2x]}{2}+\frac{[3x]}{3}+\cdots+\frac{[nx]}{n}.$$

(第 10 届美国数学奥林匹克,1981 年)

[证] 记 $x_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{[ix]}{i}$.

于是问题变为证明$[nx]\geqslant x_n$.

我们用数学归纳法证明这个不等式.

(1) 当 $n=1$ 时,显然有$[x]=x_1$,

所以 $n=1$ 时,命题成立;

(2) 假设当 $k=1,2,\cdots,n-1$ 时,命题成立.

即 $\qquad x_k\leqslant[kx]\quad(k=1,2,\cdots,n-1).$

由 $$x_k=x_{k-1}+\frac{[kx]}{k}$$

得 $$kx_k=(k-1)x_{k-1}+x_{k-1}+[kx].$$

对 $k$ 取 $n,n-1,n-2,\cdots,3,2$ 得

$$nx_n=(n-1)x_{n-1}+x_{n-1}+[nx],$$

$$(n-1)x_{n-1}=(n-2)x_{n-2}+x_{n-2}+[(n-1)x],$$

$$(n-2)x_{n-2}=(n-3)x_{n-3}+x_{n-3}+[(n-2)x],$$

……

$$3x_3=2x_2+x_2+[3x],$$
$$2x_2=x_1+x_1+[2x].$$

将以上$(n-1)$个等式的两边分别相加,消去两边相同的项,得

$$nx_n=x_{n-1}+x_{n-2}+\cdots+x_2+x_1+x_1+[nx]+[(n-1)x]+\cdots+[2x].$$

由归纳假设有

$$nx_n\leqslant[(n-1)x]+[(n-2)x]+\cdots+[2x]+[x]+[x]+[nx]+[(n-1)x]+\cdots+[2x]. \quad ①$$

函数 $y=[x]$ 有这样的性质:

$$[\alpha]+[\beta]\leqslant[\alpha+\beta].$$

这可由 $y=[x]$ 的不减性及定义得

$$[\alpha]\leqslant\alpha,\quad [\beta]\leqslant\beta,$$

即

$$[\alpha]+[\beta]\leqslant\alpha+\beta,$$
$$[[\alpha]+[\beta]]\leqslant[\alpha+\beta].$$

从而

$$[\alpha]+[\beta]\leqslant[\alpha+\beta].$$

应用这个性质对上式继续推导,①式右端等于

$$([(n-1)x]+[x])+([(n-2)x]+[2x])+\cdots+([x]+[(n-1)x])+[nx]$$
$$\leqslant[(n-1)x+x]+[(n-2)x+2x]+\cdots+[x+(n-1)x]+[nx]$$
$$=n[nx].$$

于是

$$x_n\leqslant[nx].$$

即 $k=n$ 时,命题成立.

由(1),(2),对所有自然数 $n$,命题成立.

14·7 试求出最大的正数 $c$,对于每个自然数 $n$,均有 $\{n\sqrt{2}\}\geqslant\frac{c}{n}$. 确定使 $\{n\sqrt{2}\}=\frac{c}{n}$ 的自然数 $n$.

(这里 $\{n\sqrt{2}\}=n\sqrt{2}-[n\sqrt{2}]$, $[x]$ 表示 $x$ 的整数部分)

（第 30 届国际数学奥林匹克候选题，1989 年）

**[解]**　我们证明，所求的最大正数 $c=\frac{1}{2\sqrt{2}}$.



若 $c$ 为正数，对 $n\in N$，恒有

$$\{n\sqrt{2}\}\geqslant\frac{c}{n}.$$

我们取

$$n_k=\frac{(\sqrt{2}+1)^{4k+1}+(\sqrt{2}-1)^{4k+1}}{2\sqrt{2}},$$

则 $n_k$ 为自然数，并且

$$\begin{aligned}\sqrt{2}n_k&=\frac{1}{2}((\sqrt{2}+1)^{4k+1}+(\sqrt{2}-1)^{4k+1})\\&=\frac{1}{2}((\sqrt{2}+1)^{4k+1}-(\sqrt{2}-1)^{4k+1})+(\sqrt{2}-1)^{4k+1}.\end{aligned}$$

由于 $0<(\sqrt{2}-1)^{4k+1}<1$，所以

$$[\sqrt{2}n_k]=\frac{1}{2}((\sqrt{2}+1)^{4k+1}-(\sqrt{2}-1)^{4k+1}),$$

$$\{\sqrt{2}n_k\}=(\sqrt{2}-1)^{4k+1}.$$

$$\begin{aligned}&n_k\{\sqrt{2}n_k\}\\=&\frac{[(\sqrt{2}+1)^{4k+1}+(\sqrt{2}-1)^{4k+1}](\sqrt{2}-1)^{4k+1}}{2\sqrt{2}}\\=&\frac{1+(\sqrt{2}-1)^{2(4k+1)}}{2\sqrt{2}}\\\to&\frac{1}{2\sqrt{2}}\quad(k\to\infty).\end{aligned}$$

于是

$$c\leqslant\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

另一方面，设 $m=[n\sqrt{2}]$，则

$$n\sqrt{2}>m>n\sqrt{2}-1,$$

从而

$$\begin{aligned}1&\leqslant 2n^2-m^2\\&=n^2(\sqrt{2}+\frac{m}{n})(\sqrt{2}-\frac{m}{n})\end{aligned}$$

$$< n^2(\sqrt{2}-\frac{m}{n})\cdot 2\sqrt{2}.$$

于是对一切 $n$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}n} < n(\sqrt{2}-\frac{m}{n}) = n\sqrt{2}-m = \{n\sqrt{2}\}.$$

综合以上讨论便知

$$c = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

并且使 $\{n\sqrt{2}\} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}n}$ 的 $n$ 不存在.

14·8 自某个 $x_1 \in [0,1]$ 开始定义数列 $x_1, x_2, x_3, \cdots$ 如下：如果 $x_n = 0$，则令 $x_{n+1} = 0$；否则，就令

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n} - [\frac{1}{x_n}].$$

证明 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n < \dfrac{F_1}{F_2} + \dfrac{F_2}{F_3} + \cdots + \dfrac{F_n}{F_{n+1}}$.

其中 $F_1 = F_2 = 1$，且对 $n \geqslant 1$，有 $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

（第 33 届国际数学奥林匹克预选题，1992 年）

［证］ 设 $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$，并设

$$g_n(x) = x + f(x) + f(f(x)) + \cdots + f(f(\cdots f(x))),$$

其中最后一项是以 $x$ 为自变量的函数 $f$ 的 $n$ 重复合.

首先证明下面的引理：

(1) 对于 $0 \leqslant x,\quad y \leqslant 1$，只要 $x \neq y$，则差数 $f(x) - f(y)$ 的绝对值严格小于 $x - y$ 的绝对值.且符号与之相反.

(2) 函数 $g_n(x)$ 在 $[0,1]$ 中递增.

(3) $g_{n-1}(1) = \dfrac{F_1}{F_2} + \dfrac{F_2}{F_3} + \cdots + \dfrac{F_n}{F_{n+1}}$.

(1) 由于

$$|f(x)-f(y)| = \left|\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+y}\right| = \left|\frac{y-x}{(1+x)(1+y)}\right| < |y-x|.$$

从而结论成立.

(2) 如果 $x > y$,则由(1) 的结论. 在表达式

$$g_n(x) - g_n(y) = (x - y) + [f(x) - f(y)] + [f(f(x)) - f(f(y))] + \cdots + [f(f(\cdots f(x))) - f(f(\cdots f(y)))]$$

中,每一个差数的绝对值都小于前一个差数,且符号相反,即

$$|f(x) - f(y)| < |y - x|,$$

$$|f(f(x)) - f(f(y))| < |f(x) - f(y)|,$$

$$\cdots\cdots$$

$$|\underbrace{f(f(\cdots f}_{n个}(x))) - \underbrace{f(f(\cdots f}_{n个}(y)))|$$

$$< |\underbrace{f(f(\cdots f}_{n-1个}(x))) - \underbrace{f(f(\cdots f}_{n-1个}(y)))|.$$

因此有 $\quad g_n(x) - g_n(y) > 0.$

于是 $g_n(x)$ 在$[0,1]$ 中递增.

(3) 只需注意到$\dfrac{F_1}{F_2} = 1$,而

$$f(\frac{F_i}{F_{i+1}}) = \frac{1}{1 + \frac{F_i}{F_{i+1}}} = \frac{F_{i+1}}{F_i + F_{i+1}} = \frac{F_{i+1}}{F_{i+2}},$$

就有
$$g_{n-1}(\frac{F_1}{F_2}) = \frac{F_1}{F_2} + \frac{F_2}{F_3} + \cdots + \frac{F_n}{F_{n+1}},$$

于是得
$$g_{n-1}(1) = \frac{F_1}{F_2} + \frac{F_2}{F_3} + \cdots + \frac{F_n}{F_{n+1}}.$$

由以上,引理(1),(2),(3) 得证.

下面证明本题的结论.

如果有某个 $x_i = 0$,则 $x_n = 0$,于是由关于前 $n - 1$ 项的归纳假设即得结论.

若每个 $x_i \neq 0$,则由

$$x_i = \frac{1}{x_{i-1}} - \left[\frac{1}{x_{i-1}}\right]$$

得
$$x_{i-1} = \frac{1}{\left[\frac{1}{x_{i-1}}\right] + x_i}.$$

令$\left[\frac{1}{x_{i-1}}\right]=a_i$为自然数,则

$$x_{i-1}=\frac{1}{a_i+x_i}.$$

于是有

$$\begin{aligned}&x_n+x_{n-1}+x_{n-2}+\cdots+x_1\\&=x_n+\frac{1}{a_n+x_n}+\frac{1}{a_{n-1}+\frac{1}{a_n+x_n}}+\cdots+\\&+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{a_n+x_n}}}}.\end{aligned}$$

下面我们证明:对于固定的$x_n\in[0,1]$,上式右端在对一切$i$,都有$a_i=1$时达到最大.

首先,不依赖于$x_n,a_n,a_{n-1},\cdots,a_3$之值,令$a_2=1$时,可使表达式达到最大.因为$a_2$仅出现在最后一项中.

现设对$i>2$,表达式在$a_{i-1}=a_{i-2}=\cdots=a_2=1$时,不依赖于$x_n,a_n,a_{n-1},\cdots,a_{i+1},a_i$之值而取最大值.此时仅在后面$i-1$项中含有$a_i$,且这些项的和确切地等于

$$g_{i-2}\left(\cfrac{1}{a_i+\cfrac{1}{a_{i+1}+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{a_n+x_n}}}}\right)$$

但由引理之(2)的结论,$g_{i-2}$是增函数,其值在$a_i$的最小可能值处达到最大,也就是在$a_i=1$时达到最大.

这样一来,便有

$$x_n+x_{n-1}+\cdots+x_1$$

$$\leqslant x_n+\frac{1}{1+x_n}+\frac{1}{1+\frac{1}{1+x_n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\ddots+\frac{1}{1+x_n}}}}$$

数论卷

$= g_{n-1}(x_n)$

$< g_{n-1}(1)$ （由引理的(2)）

$= \frac{F_1}{F_2}+\frac{F_2}{F_3}+\cdots+\frac{F_n}{F_{n+1}}$. （由引理的(3)）.

14·9　试证方程

$$[x]+[2x]+[4x]+[8x]+[16x]+[32x]=12345$$

没有实数解.

（第 13 届加拿大数学竞赛，1981 年）

**[证]**　记 $f(x)=[x]+[2x]+[4x]+[8x]+[16x]+[32x]$.

假设方程有一实数解 $x$，则

$$f(x)=12345.$$

又因为 $$f(195)=12285<12345,$$

$$f(196)=12348>12345.$$

则 $$f(195)<f(x)<f(196).$$

又因为 $f(x)$ 是一个不减函数，则

$$195<x<196.$$

记 $y=x-195$，　则 $0<y<1$.

$f(y)=[x-195]+[2x-2\cdot 195]+\cdots+[32x-32\cdot 195]$

$\quad = f(x)-f(195)$

$\quad = 12345-12285$

$\quad = 60.$　　①

由于 $0<y<1$，则对一切正整数 $n$，

$$0<ny<n,$$

从而 $$[ny]\leqslant n-1.$$

因而又有

$f(y)=[y]+[2y]+[4y]+[8y]+[16y]+[32y]$

$\quad \leqslant 0+1+3+7+15+31$

$= 57.$ ②

① 与 ② 矛盾.

因此原方程没有实数解.

**14·10** 设正实数 $a > 1$,自然数 $n \geqslant 2$,且方程 $[ax] = x$ 恰有 $n$ 个不同的解. 试求 $a$ 的取值范围.

(中国四川省高中数学联赛,1992 年)

**[解]** 由题设可知,$x$ 必为整数,且 $x \geqslant 0$.

令 $\{a\} = a - [a]$,则

$$ax = [a]x + \{a\}x,$$

从而原方程化为

$$x = [ax] = [a]x + [\{a\}x]. \quad ①$$

因为 $[a] \geqslant 1$,所以 ① 式成立的充要条件是

$$[a] = 1,且\{a\}x < 1. \quad ②$$

因为 $x = 0$ 显然是方程的一个解,所以

$$[ax] = x$$

只对 $n - 1$ 个正整数成立.

又若 $\{a\}x < 1$, $x' < x$,则显然

$$\{a\}x' < 1.$$

故 $\{a\}x < 1$ 的正整数解必是 $x = 1, 2, \cdots, n - 1$.

这时有 $$\{a\} < \frac{1}{n-1}.$$

又当 $x \geqslant n$ 时,$x$ 不是 ① 的解(否则至少有 $n + 1$ 个解),即要求 $\{a\}x \geqslant 1$ 成立.

由 $\{a\}x \geqslant 1$ 及 $x \geqslant n$,因而有 $\{a\}n \geqslant 1$,即

$$\{a\} \geqslant \frac{1}{n}.$$

于是 $$\frac{1}{n} \leqslant \{a\} < \frac{1}{n-1}.$$

又由 $[a] = 1$,则

$$1 + \frac{1}{n} \leqslant a < 1 + \frac{1}{n-1}.$$

**14·11** $[a]$ 表示不大于数 $a$ 的最大整数, 例如 $[\sqrt{2}] = 1$, $[-\sqrt{2}] = -2$. 那么方程

$$[3x+1]=2x-\frac{1}{2}$$

的所有根的和是多少？

（中国初中数学联赛，1987 年）

**[解]** 设$[3x+1]=t$，则 $t$ 是整数，且

$$0 \leqslant (3x+1)-t<1. \quad ①$$

于是原方程化为

$$t=2x-\frac{1}{2},$$

$$x=\frac{1}{2}t+\frac{1}{4},$$

代入不等式 ① 可得

$$0 \leqslant \frac{3}{2}t+\frac{3}{4}+1-t<1,$$

$$-\frac{7}{2} \leqslant t \leqslant -\frac{3}{2}. \quad ②$$

满足 ② 的整数 $t$ 为

$$t=-2 \quad \text{或} \ t=-3.$$

当 $t=-2$ 时， $x_1=-\frac{3}{4}$.

当 $t=-3$ 时， $x_2=-\frac{5}{4}$.

所以 $x_1+x_2=\left(-\frac{3}{4}\right)+\left(-\frac{5}{4}\right)=-2$.

**14·12** 解方程$[x]\{x\}+x=2\{x\}+10$.

（前苏联教委推荐试题，1991 年）

**[解]** 因 $x=[x]+\{x\}$，则已知方程可化为

$$[x]\{x\}+[x]-\{x\}=10,$$

$$([x]-1)(\{x\}+1)=9.$$

因为$[x]-1$ 是整数，则$\{x\}+1$ 是有理数.

因为$0 \leqslant \{x\}<1$，

故可令 $\{x\}=\frac{n}{k}$，其中$0 \leqslant n<k$.

于是有

$$([x]-1)(n+k)=9k.$$

当 $n=0$ 时，$\{x\}=0$，由已知方程得

$$x=10.$$

当 $n>0$ 时，可设 $(n,k)=1$，这是

$$(n+k,k)=1.$$

于是 9 应是 $n+k$ 的倍数．

$$n+k=3 \text{ 或 } 9.$$

(1) $n+k=3$ 时，由 $0 \leqslant n<k$ 得

$$n=1, \quad k=2,$$

$$\{x\}=\frac{1}{2}, \quad [x]=7.$$

(2) $n+k=9$ 时，

若 $n=1, k=8$，则

$$\{x\}=\frac{1}{8}, \quad [x]=9.$$

若 $n=2, k=7$，则

$$\{x\}=\frac{2}{7}, \quad [x]=8.$$

若 $n=4, k=5$，则

$$\{x\}=\frac{4}{5}, \quad [x]=6.$$

于是已知方程有 5 个解：

$$x=10, \quad 7\frac{1}{2}, \quad 9\frac{1}{8}, \quad 8\frac{2}{7}, \quad 6\frac{4}{5}.$$

**14·13** 求方程 $\left[\frac{x}{1!}\right]+\left[\frac{x}{2!}\right]+\cdots+\left[\frac{x}{10!}\right]=1001$ 的整数解．

（第 24 届全苏数学奥林匹克，1990 年）

**[解]** 由已知方程可知 $x>0$．且 $x \leqslant 6!$

若 $x=6!$，则原方程化为

$$720+360+120+30+6=1001,$$

这是不可能的．

所以 $x<6!$．

设 $\quad x=a \cdot 5!+b \cdot 4!+c \cdot 3!+d \cdot 2!+k \cdot 1!$．

其中 $a,b,c,d,k$ 为非负整数，且有

$$a \leqslant 5, b \leqslant 4, c \leqslant 3, d \leqslant 2, k \leqslant 1.$$

数论卷

把 $x$ 的表达式代入已知方程得

$$206a+41b+10c+3d+k=1001.$$

由于 $41b+10c+3d+k\leqslant 201,$

由此可知

$$800\leqslant 206a\leqslant 1001,$$

所以 $a=4.$

于是 $41b+10c+3d+k=177.$

由于 $10c+3d+k\leqslant 37,$

则 $140\leqslant 41b\leqslant 177,$

所以 $b=4.$

于是 $10c+3d+k=13.$

从而可得 $c=1,d=1,k=0.$

因此, $x=4\cdot 5!+4\cdot 4!+3!+2!=584.$

**14·14** 求方程 $x^2-8[x]+7=0$ 的所有解.

(第 13 届全俄数学奥林匹克,1987 年)

**[解]** 设 $x$ 是已知方程的根.并设 $[x]=n$.

于是,已知方程化为

$$x^2+7=8n.$$

因此 $n>0$.由

$$n\leqslant x<n+1$$

可得 $n^2+7\leqslant x^2+7<(n+1)^2+7=n^2+2n+8.$

$$n^2+7\leqslant 8n<n^2+2n+8.$$

$$\begin{cases}n^2-8n+7\leqslant 0,\\ n^2-6n+8>0.\end{cases}$$

解得 $1\leqslant n<2$ 或 $4<n\leqslant 7.$

即 $n=1,5,6,7.$

则有 $x^2+7=8,40,48,56.$

解得 $x=\pm 1,\pm\sqrt{33},\pm\sqrt{41},\pm 7.$

因为 $n\geqslant 0$,所以 $x\geqslant 0$,即只有

$$x=1,\sqrt{33},\sqrt{41},7.$$

**14·15** 已知 $\alpha$ 是方程 $x^2-1989x-1=0$ ①

的正根.证明存在无穷多个自然数 $n$,满足方程

$$[\alpha n+1989\alpha[\alpha n]]=1989n+(1989^2+1)[\alpha n]. \qquad ②$$

（第 30 届国际数学奥林匹克候选题，1989 年）

**[证]** 事实上，我们可以证明，对每个自然数 $n$，② 式均能成立.

首先，$-\frac{1}{\alpha}$ 也是方程 ① 的根.

由韦达定理

$$\alpha-\frac{1}{\alpha}=1989,$$

$$\alpha=1989+\frac{1}{\alpha}>1989. \qquad ③$$

$$[\alpha n+1989\alpha[\alpha n]]=1989n+(1989^2+1)[\alpha n]$$

$$\Longleftrightarrow \left[\left(1989+\frac{1}{\alpha}\right)n+1989\left(1989+\frac{1}{\alpha}\right)[\alpha n]\right]$$

$$=1989n+(1989^2+1)[\alpha n]$$

$$\Longleftrightarrow \left[\frac{n}{\alpha}+\frac{1989}{\alpha}[\alpha n]\right]=[\alpha n].$$

令 $r=\alpha n-[\alpha n]$，则 $0\leqslant r<1$.

继续上面的等价变换

$$\left[\frac{n}{\alpha}+\frac{1989}{\alpha}[\alpha n]\right]=[\alpha n]$$

$$\Longleftrightarrow \left[\frac{n}{\alpha}+\frac{1989}{\alpha}(\alpha n-r)\right]=[\alpha n]$$

$$\Longleftrightarrow \left[n\left(\frac{1}{\alpha}+1989\right)-\frac{1989}{\alpha}r\right]=[\alpha n]$$

$$\Longleftrightarrow \left[n\alpha-\frac{1989}{\alpha}r\right]=[\alpha n]$$

$$\Longleftrightarrow \left[[\alpha n]+r-\frac{1989}{\alpha}r\right]=[\alpha n]$$

$$\Longleftrightarrow \left[r-\frac{1989}{\alpha}r\right]=0.$$

由 ③ 及 $0\leqslant r<1$ 有

$$0\leqslant\left(1-\frac{1989}{\alpha}\right)r<r<1,$$

所以 $$\left[r-\frac{1989}{\alpha}r\right]=0.$$

因而 ② 成立，即对每个自然数 $n$，满足

$$[\alpha n+1989\alpha[\alpha n]]=1989n+(1989^2+1)[\alpha n].$$

14·16　解方程 $x^2-2x-3=12\cdot\left[\frac{x-1}{2}\right]$.

（中国四川省初中数学联赛，1990 年）

[解]　原方程可化为

$$\left(\frac{x-1}{2}\right)^2-1=3\cdot\left[\frac{x-1}{2}\right]. \qquad ①$$

令 $\left[\frac{x-1}{2}\right]=m$，$\frac{x-1}{2}=m+r$，　$0\leqslant r<1$.

由 ① 知，$m$ 为非负整数，且 $\left(\frac{x-1}{2}\right)^2$ 为整数.

$$\left(\frac{x-1}{2}\right)^2=m^2+2mr+r^2. \qquad ②$$

令 $2mr+r^2=n$，则 $n$ 为非负整数.

将 ② 代入 ① 得　　$m^2+2mr+r^2-1=3m$，

$$m^2-3m+n-1=0.$$

所以　　$m=\dfrac{3\pm\sqrt{9-4(n-1)}}{2}$.

当 $n=1$ 时，$m=0,3$；

当 $n=3$ 时，$m=1,2$.

而 $n$ 为其余非负整数时，$m$ 均不是非负整数.

当 $m=0$ 时，$r^2=1$，与 $0\leqslant r<1$ 矛盾.

当 $m=1$ 时，

$$r^2+2r-3=0$$

解得 $r=1$ 或 $-3$，与 $0\leqslant r<1$ 矛盾.

当 $m=2$ 时，由

$$r^2+4r-3=0$$

得 $r=-2+\sqrt{7}$，于是

$$\frac{x-1}{2}=m+r=2+(-2+\sqrt{7})=\sqrt{7},$$

$$x=1+2\sqrt{7}.$$

当 $m=3$ 时，由

$$r^2+6r-1=0$$

得 $r=-3+\sqrt{10}$，于是

$$\frac{x-1}{2}=3+(-3+\sqrt{10})=\sqrt{10},$$

$$x=1+2\sqrt{10}.$$

所以，$x=1+2\sqrt{7}$ 或 $x=1+2\sqrt{10}$ 是原方程的解.

**14·17** 设 $n$ 是自然数，问 $x^2-[x^2]=(x-[x])^2$ 在 $1\leqslant x\leqslant n$ 中共有多少解？

（瑞典数学竞赛，1982年）

**[解]** 显然，$x=n$ 是方程的一个解.

设 $1\leqslant x<n$.

记 $m=[x],\{x\}=\alpha$，则

$$x=m+\alpha,$$

$$x^2=m^2+2m\alpha+\alpha^2,\quad 0\leqslant\alpha<1.$$

代入已知方程得

$$m^2+2m\alpha+\alpha^2-[m^2+2m\alpha+\alpha^2]=\alpha^2,$$

$$m^2+2m\alpha-m^2-[2m\alpha+\alpha^2]=0,$$

$$2m\alpha-[2m\alpha+\alpha^2]=0,$$

$$2m\alpha=[2m\alpha+\alpha^2].$$

于是 $2m\alpha$ 是整数.

为使 $2m\alpha$ 是整数，又由于 $0\leqslant\alpha<1$，则

$$\alpha=0,\ \frac{1}{2m},\ \frac{2}{2m},\ \cdots,\ \frac{2m-1}{2m}.$$

因此，对于每一个确定的 $m$，$\alpha$ 可取 $2m$ 个，即有 $2m$ 个解.

由于 $m$ 可取 $1,2,\cdots,n-1$，则有

$$2[1+2+\cdots+(n-1)]=n(n-1)$$

个解，再加上 $x=n$ 的解，则共有

$$n(n-1)+1=n^2-n+1\text{ 个解.}$$

**14·18** 在 $(x,y)$ 平面上指出满足 $[x]^2+[y]^2=4$ 的一切点 $(x,y)$.

（第7届加拿大数学竞赛，1975年）

**[解]** 因为 $[x]$ 和 $[y]$ 都是整数，所以有下面的四种可能性：

(1) $[x]=2,[y]=0$，即

$$2\leqslant x<3,\quad 0\leqslant y<1;$$

(2) $[x]=0,\quad [y]=2$，即

$$0\leqslant x<1,\quad 2\leqslant y<3;$$

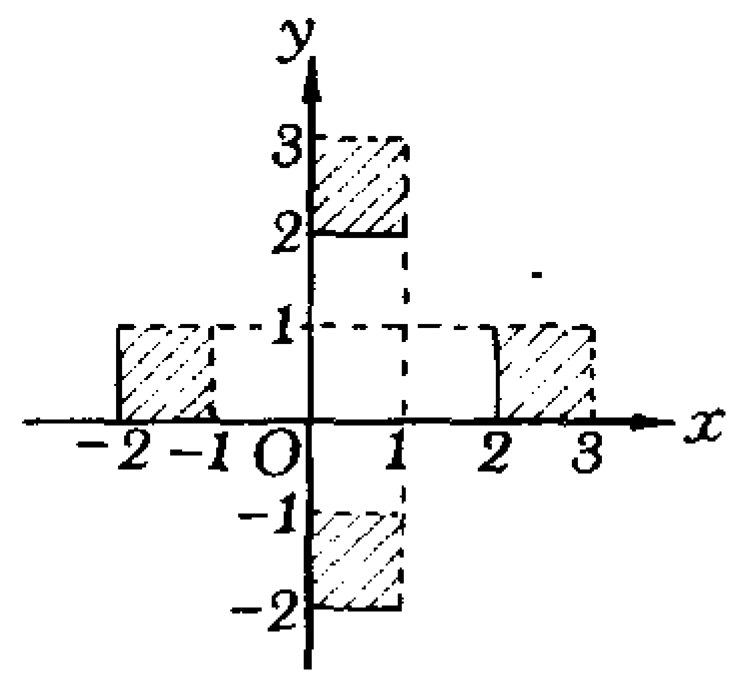
(3) $[x]=-2,\quad [y]=0$，即

$$-2\leqslant x<-1,\quad 0\leqslant y<1;$$

(4) $[x]=0,\quad [y]=-2$,即

$$0\leqslant x<1,\quad -2\leqslant y<-1.$$

由此可得到如右图有阴影的区域.




14·19 解方程 $x^3-[x]=3$.

(第 20 届莫斯科数学奥林匹克,1957 年)

[解] 设 $x=[x]+r,\quad 0\leqslant r<1$,

则已知方程可化为

$$x^3-x=3-r.$$

于是由 $0\leqslant r<1$ 得

$$2<x^3-x\leqslant 3. \qquad ①$$

由 $x^3-x>0$ 可知

$$-1<x<0 \quad 或\ x>1.$$

然而显然有 $x>0$,于是 $x>1$.

若 $x\geqslant 2$,则

$$x^3-x=x(x^2-1)\geqslant 2\cdot 3=6, \qquad ②$$

② 与 ① 矛盾.

于是 $$1<x<2,$$

从而 $[x]=1$.

已知方程化为 $x^3=4$.

解得 $$x=\sqrt[3]{4}.$$

14·20 求方程 $3x^3-[x]=3$ 的实数解.

(第 30 届国际数学奥林匹克候选题,1989 年)

[解] (1) 若 $x\leqslant -1$,则

$$3x^3-[x]\leqslant 3x-x+1<0,$$

(2) 若 $-1\leqslant x<0$,则

$$3x^3-[x]=3x^3+1\leqslant 1,$$

(3) 若 $x\geqslant 2$,则

$$3x^3-[x]\geqslant 3x^3-x>3x-x\geqslant 4,$$

(4) 若 $0\leqslant x<1$,则

$$3x^3-[x]=3x^3<3.$$

以上各种情况,方程

$$3x^3-[x]=3$$

均无实数解.

最后一种情况.

(5) 若 $1\leqslant x<2$,则

$$3x^3-[x]=3x^3-1=3.$$

$$x=\sqrt[3]{\frac{4}{3}}.$$

因此,已知方程只有一个解 $x=\sqrt[3]{\frac{4}{3}}$.

14·21 $n$ 为一正整数,试确定有多少个实数 $x$,满足

$$1\leqslant x<n \text{ 和 } x^3-[x^3]=(x-[x])^3.$$

(澳大利亚数学竞赛,1992 年)

[解] 设 $[x]=a$, $x=a+r$, $1\leqslant a\leqslant n-1$, $0\leqslant r<1$. 于是

$$(a+r)^3-[(a+r)^3]=(a+r-[a+r])^3.$$

所以 $$a^3+3a^2r+3ar^2=[(a+r)^3].$$

于是 $a^3+3a^2r+3ar^2$ 是一个整数. 当 $r$ 从 0 增大至 1 时, $a^3+3a^2r+3ar^2$ 从 $a^3$ 增大到 $a^3+3a^2+3a$,

从而有

$$a^3\leqslant a^3+3a^2r+3ar^2<a^3+3a^2+3a=(a+1)^3-1.$$

所以对 $0\leqslant r<1$,取 $(a+1)^3-1-a^3$ 个整数值,由于 $1\leqslant a\leqslant n-1$,所以满足题设的实数 $x$ 的个数为

$$\begin{aligned}&\sum_{a=1}^{n-1}[(a+1)^3-1-a^3]\\&=\sum_{a=1}^{n-1}(3a^2+3a)\\&=3[\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}+\frac{n(n-1)}{2}]\\&=n^3-n.\end{aligned}$$

14·22 解方程 $[x^3]+[x^2]+[x]=\{x\}-1$.

(基辅数学奥林匹克,1972 年)

[解] 因为已知方程的左边 $[x^3]+[x^2]+[x]$ 是整数,所以方程的右边也是整数. 又因为

$$0 \leqslant \{x\} < 1,$$

则必有 $\{x\} = 0.$

于是 $x$ 是整数，从而方程化为

$$x^3 + x^2 + x = -1,$$

$$x^3 + x^2 + x + 1 = 0.$$

$$(x+1)(x^2+1) = 0.$$

$$x = -1.$$

于是，方程有惟一解：$x = -1$.

14·23 令 $\{x\} = x - [x]$.

(1) 找出一个实数 $x$，满足 $\{x\} + \{\frac{1}{x}\} = 1$.

(2) 证明满足上述等式的 $x$，都不是有理数.

（中国初中数学联赛，1990 年）

[解] 设 $x = m + \alpha$，$\frac{1}{x} = n + \beta$，这里 $m, n$ 为整数，$0 \leqslant \alpha < 1, 0 \leqslant \beta < 1$.

若 $\{x\} + \{\frac{1}{x}\} = \alpha + \beta = 1,$

则 $x + \frac{1}{x} = m + n + \alpha + \beta = m + n + 1$

是整数. 令 $x + \frac{1}{x} = k \quad (k \in Z)$，则

$$x^2 - kx + 1 = 0.$$

解得 $x = \frac{k \pm \sqrt{k^2 - 4}}{2}.$

当 $|k| = 2$ 时，$|x| = 1$，容易验证它不满足所设的等式.

当 $k \geqslant 3$ 时，$x = \frac{k \pm \sqrt{k^2-4}}{2}$ 是满足等式的全体实数.

若 $k^2 - 4$ 是完全平方数，即

$$k^2 - 4 = h^2, (h \in N),$$

则 $k^2 - h^2 = 4.$

$$(k+h)(k-h) = 4.$$

由于 $k + h$ 与 $k - h$ 的奇偶性相同，则只能有

$$\begin{cases} k + h = 2, \\ k - h = 2. \end{cases}$$

从而与 $k \geqslant 3$ 矛盾.

所以 $x$ 是无理数.即满足题设等式的 $x$ 都不是有理数.

**14·24** 解方程 $x+\frac{92}{x}=[x]+\frac{92}{[x]}$,

(第18届全俄数学奥林匹克,1992年)

**[解]** 由方程知 $x \neq 0$, $[x] \neq 0$,且

$$(x-[x])+\left(\frac{92}{x}-\frac{92}{[x]}\right)=0,$$

$$(x-[x])\left(1-\frac{92}{x[x]}\right)=0.$$

于是 $x=[x]$ 或者 $\frac{92}{x[x]}=1$,

当 $x=[x]$ 时,$x=n$, $n$ 是任意非零整数.

当 $\frac{92}{x[x]}=1$ 时,

$$x[x]=92.$$

设 $x=[x]+a$, $[x]=n$, $n \in Z$,且 $0 \leqslant a<1$,则

$$n(n+a)=92.$$

由 $n \leqslant n+a<n+1$

得 $n>0$ 时,$n^2 \leqslant 92<n(n+1)$.

此不等式无整数解.

$n<0$ 时,

$$n^2 \geqslant 92>n(n+1).$$

此时有整数解 $n=-10$.于是

$$(-10)(-10+a)=92,$$

$$a=0.8.$$

因此 $x=-10+0.8=-9.2$.

于是本题的解为

$$x=n, \quad n \text{ 为非零整数,或 } x=-9.2.$$

**14·25** 求使方程 $\left[\frac{10^n}{x}\right]=1989$ 具有整数解 $x$ 的最小的自然数 $n$.

(第23届全苏数学奥林匹克,1989年)

**[解]** 由于

$$\frac{10^n}{x}-1<\left[\frac{10^n}{x}\right]\leqslant\frac{10^n}{x},$$

则
$$\frac{10^n}{x}-1<1989\leqslant\frac{10^n}{x},$$

即
$$\frac{10^n}{1990}<x\leqslant\frac{10^n}{1989}.$$

于是有

$$10^n\cdot 0.000502512<x\leqslant 10^n\cdot 0.000502765.$$

由此不等式可以看出,仅当 $n=7$ 时,有

$$5025.12<x\leqslant 5027.65.$$

此时有整数解 $x=5026$.

于是所求的最小的 $n=7$.

14·26　若 $a,b$ 都是整数,求满足方程组

$$\begin{cases}[x]+2y=a,\\ [y]+2x=b\end{cases}$$

的实数对 $(x,y)$?

(加拿大数学奥林匹克训练题,1992 年)

[解]　由已知

$$2y=a-[x],$$
$$2x=b-[y].$$

都是整数.

(1) 若 $x,y$ 都是整数,则有

$$\begin{cases}2y=a-x,\\ 2x=b-y.\end{cases}$$

解得
$$\begin{cases}x=\dfrac{2b-a}{3},\\ y=\dfrac{2a-b}{3}.\end{cases}\qquad ①$$

当且仅当 $2b-a$ 与 $2a-b$ 都能被 3 整除,即 $a+b$ 能被 3 整除时,① 是方程的解.

(2) 若 $x$ 是整数,$y$ 是半整数,即是与整数相差 $\frac{1}{2}$ 的数.

令 $y=k+\frac{1}{2},k\in Z$,于是

$$\begin{cases}2(k+\frac{1}{2})=a-x,\\2x=b-k.\end{cases}$$

解得
$$\begin{cases}x=\dfrac{2b-a+1}{3}\\y=\dfrac{2a-b-2}{3}+\dfrac{1}{2}\end{cases} \quad ②$$

当且仅当 $2b-a+1$ 和 $2a-b-2$ 能被3整除,或等价地 $a+b\equiv 1 \pmod 3$ 时,② 是方程的解.

(3) 若 $x$ 是半整数,$y$ 是整数,同(2)可得
$$\begin{cases}x=\dfrac{2b-a-2}{3}+\dfrac{1}{2}\\y=\dfrac{2a-b+1}{3}\end{cases} \quad ③$$

当且仅当 $a+b\equiv 1 \pmod 3$ 时,③ 是方程的解.

(4) 若 $x,y$ 都是半整数,同理可得
$$\begin{cases}x=\dfrac{2b-a-1}{3}+\dfrac{1}{2}\\y=\dfrac{2a-b-1}{3}+\dfrac{1}{2}\end{cases} \quad ④$$

当且仅当 $a+b\equiv 1 \pmod 3$ 时,④ 是方程的解.

(5) 当 $a+b\equiv 2 \pmod 3$ 时,方程无解.

**14·27** 求出方程 $[n\sqrt{2}]=[2+m\sqrt{2}]$ ① 的所有整数解.

(第28届国际数学奥林匹克候选题,1987年)

**[解]** (1) 先求 $m$ 是正整数的解.由 ①
$$[n\sqrt{2}]=2+[m\sqrt{2}].$$
则 $m$ 是正整数时,$n$ 也是正整数解.

显然,$m<n$.

若 $n\geqslant m+3$,则
$$\begin{aligned}[n\sqrt{2}]&\geqslant[(m+3)\sqrt{2}]\\&=[m\sqrt{2}+3\sqrt{2}]\\&\geqslant[m\sqrt{2}+4]\\&=[m\sqrt{2}]+4\end{aligned}$$

$$> 2 + [m\sqrt{2}].$$

因此 $$n < m + 3.$$

即 $n = m + 1$ 或 $n = m + 2$.

( i ) $n = m + 1$ 时,

$$\begin{aligned}[m\sqrt{2}] + 2 &= [n\sqrt{2}] \\ &= [(m+1)\sqrt{2}] \\ &= [m\sqrt{2} + \sqrt{2}] \\ &= [[m\sqrt{2}] + \{m\sqrt{2}\} + \sqrt{2}] \\ &= [m\sqrt{2}] + [\{m\sqrt{2}\} + \sqrt{2}].\end{aligned}$$

所以 $$2 = [\{m\sqrt{2}\} + \sqrt{2}].$$

即 $$\{m\sqrt{2}\} + \sqrt{2} \geqslant 2,$$

$$\{m\sqrt{2}\} \geqslant 2 - \sqrt{2}.$$

( ii ) $n = m + 2$ 时,

$$\begin{aligned}[m\sqrt{2}] + 2 &= [n\sqrt{2}] \\ &= [m\sqrt{2} + 2\sqrt{2}] \\ &= [m\sqrt{2}] + [\{m\sqrt{2}\} + 2\sqrt{2}].\end{aligned}$$

所以 $$2 = [\{m\sqrt{2}\} + 2\sqrt{2}].$$

$$2 \leqslant \{m\sqrt{2}\} + 2\sqrt{2} < 3,$$

$$\{m\sqrt{2}\} < 3 - 2\sqrt{2}.$$

我们熟知,当 $\alpha,\beta$ 为正无理数,并且

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$$

时,集 $\{[m\alpha] \mid m = 1,2,\cdots\}$ 与 $\{[n\beta] \mid n = 1,2,\cdots\}$ 是互补的.(见 14 · 66 题)

由于 $$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2+\sqrt{2}} = 1,$$

则集 $\{[m\sqrt{2}] \mid m = 1,2,\cdots\}$ 与集 $\{[(2+\sqrt{2})h] \mid h = 1, 2,\cdots\}$ 是互补的.

若 $n = m+1$,则 $[m\sqrt{2}]$ 与 $[(m+1)\sqrt{2}]$ 之间,由 $[m\sqrt{2}]+2 = [(m+1)\sqrt{2}]$ 可知,恰有一个整数 $[(2+\sqrt{2})h]$,所以

$$m\sqrt{2} < (2+\sqrt{2})h < (m+1)\sqrt{2}.$$

即 $$m < (\sqrt{2}+1)h < m+1.$$

从而这时必有 $m=[(\sqrt{2}+1)h]$.

若 $n=m+2$,则由

$$[m\sqrt{2}]+2=[(m+2)\sqrt{2}]$$

可知$[m\sqrt{2}]$,$[(m+1)\sqrt{2}]$,$[(m+2)\sqrt{2}]$是三个连续整数.由于

$$\begin{aligned}3&\leqslant[(2+\sqrt{2})(h+1)]-[(2+\sqrt{2})h]\\&\leqslant[2+\sqrt{2}+1]\\&=4,\end{aligned}$$

所以,$[m\sqrt{2}]$前面的整数为$[(2+\sqrt{2})h]$,$[n\sqrt{2}]$后面的整数为$[(2+\sqrt{2})(h+1)]$,并且$[(2+\sqrt{2})h]$前面的整数为$[(m-1)\sqrt{2}]$,从而

$$\begin{aligned}(m-1)\sqrt{2}&<(2+\sqrt{2})h<m\sqrt{2}\\&<(m+2)\sqrt{2}<(2+\sqrt{2})(h+1).\end{aligned}$$

即 $m-1<(1+\sqrt{2})h<m<m+2<(1+\sqrt{2})(h+1)$.

这时必有

$$\begin{aligned}m&=[(1+\sqrt{2})h]+1\\&=[(1+\sqrt{2})h]+\left[\frac{[(1+\sqrt{2})(h+1)]-[(1+\sqrt{2})h]}{3}\right].\end{aligned}$$

已知方程 ① 的正整数解为

$$\begin{cases}m=[(1+\sqrt{2})h]\\\qquad+\left[\dfrac{[(1+\sqrt{2})(h+1)]-[(1+\sqrt{2})h]}{3}\right]\\n=[(1+\sqrt{2})h]+1\\\qquad+2\cdot\left[\dfrac{[(1+\sqrt{2})(h+1)]-[(1+\sqrt{2})h]}{3}\right].\end{cases}\quad ②$$

$$h=1,2,3,\cdots.$$

下面证明:这样得到的正整数$(m,n)$确为方程 ① 的解.

令 $\sqrt{2}h=l+t$, $l$是正整数,$0<t<1$.

若 $t<2-\sqrt{2}$,则

$$\begin{aligned}&[(1+\sqrt{2})(h+1)]-[(1+\sqrt{2})h]\\&=[1+\sqrt{2}+\{(1+\sqrt{2})h\}]\\&=[1+\sqrt{2}+t]\\&=2.\end{aligned}$$

所以

$$m=[(1+\sqrt{2})h]=h+l.$$

$$n=h+l+1=m+1.$$

由于 $\{m\sqrt{2}\}=\{(h+l)\sqrt{2}\}$

$$=\{l+t+(\sqrt{2}h-t)\sqrt{2}\}$$

$$=\{1-(\sqrt{2}-1)t\}$$

$$\geqslant 1-(\sqrt{2}-1)$$

$$=2-\sqrt{2}.$$

所以 ① 式成立.

若 $t>2-\sqrt{2}$,则

$$m=[(1+\sqrt{2})h]+1$$

$$=h+l+1,$$

$$n=m+2.$$

$$\{m\sqrt{2}\}=\{(h+l+1)\sqrt{2}\}$$

$$=\{\sqrt{2}-1-(\sqrt{2}-1)t\}$$

$$=(\sqrt{2}-1)(1-t)$$

$$<(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)$$

$$=3-2\sqrt{2}.$$

所以 ① 式成立.

而 $t=2-\sqrt{2}$ 的情况不会发生.

因为若$\sqrt{2}h=l+2-\sqrt{2}$,则

$$\sqrt{2}=\frac{l+2}{h+1}$$

为有理数,矛盾.

于是,由 ② 得到的$(m,n)$ 是 ① 的解,并且 ② 包括了所有的正整数解.

(2) 当 $m=0$ 时,$n=2$.

(3) 当 $m=-1$ 时,$n=0$.

(4) 当 $m<-1$ 时,则 $n<0$.

由于 $[-x]=-[x]-1 \quad (x\notin Z)$,

所以由 ① 式得

$$-[-2-m\sqrt{2}]-1=-[-h\sqrt{2}]-1,$$

即
$$[-m\sqrt{2}]=[-n\sqrt{2}+2]..$$

从而可得

$$m=-[(\sqrt{2}+1)h]-1$$
$$-2\left[\frac{[(\sqrt{2}+1)(h+1)]-[(\sqrt{2}+1)h]}{3}\right]$$
$$n=-[(\sqrt{2}+1)h]$$
$$-\left[\frac{[(\sqrt{2}+1)(h+1)]-[(\sqrt{2}+1)h]}{3}\right].$$
$$h=1,2,\cdots.$$

**14·28** 数列$\{a_n\}$定义为$a_1=1$, $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}$ $(n\geqslant 1)$. 求$[a_{100}]$.

(日本数学奥林匹克,1990 年)

**[解]** 由 $a_{n+1}^2=a_n^2+\frac{1}{a_n^2}+2$ 可得

$$a_{n+1}^2-a_1^2$$
$$=\sum_{i=1}^{n}(a_{i+1}^2-a_i^2)$$
$$=2n+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i^2},$$

即
$$a_{n+1}^2=2n+1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i^2}.$$

于是
$$199<a_{100}^2=199+\sum_{i=1}^{99}\frac{1}{a_i^2}.$$

由于当$i\geqslant 2$时,$a_i^2\geqslant 4$,故

$$199<a_{100}^2\leqslant 200+\frac{98}{4}<225.$$

从而
$$14^2<a_{100}^2<15^2.$$

所以
$$[a_{100}]=14.$$

**14·29** 求形式为$\left[\frac{n^2}{3}\right]$的一切素数,其中$n$是自然数.

(第 9 届全俄数学奥林匹克,1983 年)

**[解]** 设 $p=\left[\frac{n^2}{3}\right]$.

(1) 当 $n=3k(k\in N)$ 时,

$$p=\left[\frac{9k^2}{3}\right]=3k^2.$$

仅当 $k=1$ 时, $p$ 是素数, $p=3$.

(2) 当 $n=3k+1(k\in N\cup\{0\})$ 时,

$$p=\left[\frac{n^2}{3}\right]=\left[\frac{(3k+1)^2}{3}\right]=3k^2+2k=k(3k+2).$$

仅当 $k=1$ 时, $p$ 是素数, $p=5$.

(3) 当 $n=3k+2\quad(k\in N\cup\{0\}$ 时),

$$p=\left[\frac{n^2}{3}\right]=\left[\frac{(3k+2)^2}{3}\right]=3k^2+4k+1=(k+1)(3k+1).$$

当 $k=0$ 时, $p=1$, 当 $k>0$ 时, $p$ 是合数. 因而, 当 $n=3k+2$ 时, $p$ 不是素数.

综合以上, $p=3$ 和 5.

**14·30** 能使 $\left[\frac{n^2}{5}\right]$ 为素数的所有自然数 $n$ 的倒数之和等于多少?

(中国北京市高中一年级数学竞赛, 1991 年)

**[解]** 设 $m=\left[\frac{n^2}{5}\right]$.

(1) $n=5k$ ($k$ 是自然数) 时,

$$m=\left[\frac{25k^2}{5}\right]=5k^2.$$

当 $k=1$ 时, $m$ 为素数, 此时 $n=5$.

(2) $n=5k+1\quad$ ($k$ 是非负整数) 时,

$$m=\left[\frac{(5k+1)^2}{5}\right]=5k^2+2k+\left[\frac{1}{5}\right]=k(5k+2).$$

当 $k=1$ 时, $m$ 为素数, 此时 $n=6$.

(3) $n=5k+2\quad$ ($k$ 是非负整数) 时,

$$m=\left[\frac{(5k+2)^2}{5}\right]=5k^2+4k=k(5k+4).$$

当 $k=1$ 时, $m=9$ 是合数, 因此对所有正整数 $k$, $m$ 都是合数.

(4) $n=5k+3\quad$ ($k$ 是非负整数) 时,

$$m=\left[\frac{(5k+3)^2}{5}\right]=(5k+1)(k+1).$$

当 $k=0$ 时，$m=1$，当 $k$ 是正整数时，$m$ 是合数.

(5)$n=5k+4$ （$k$ 是非负整数）时，

$$m=\left[\frac{(5k+4)^2}{5}\right]=(5k+3)(k+1).$$

当 $k=0$ 时，$m=3$ 是素数，当 $k$ 是正整数时，$m$ 是合数. 此时 $n=4$.

所以 $n=4,5,6$ 时，$\left[\frac{n^2}{5}\right]$ 是素数.

这样的 $n$ 的倒数之和为

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{37}{60}.$$

14·31　求 $\left[\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right]+\left[\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right]+\left[\frac{4+\sqrt{4}}{4}\right]+\cdots+\left[\frac{1989+\sqrt{1989}}{1989}\right]+\left[\frac{1990+\sqrt{1990}}{1990}\right]$.

（第 1 届"希望杯"数学竞赛，1990 年）

［解］　当 $k>1$ 时，

$$\sqrt{k}<k.$$

则

$$0<\frac{\sqrt{k}}{k}<1,$$

$$\left[\frac{\sqrt{k}}{k}\right]=0.$$

于是 $\left[\frac{k+\sqrt{k}}{k}\right]=\left[1+\frac{\sqrt{k}}{k}\right]=1.\quad(k>1).$

从而原式 $=1989$.

14·32　设 $S=[\sqrt{1}]+[\sqrt{2}]+\cdots+[\sqrt{1988}]$. 求 $[\sqrt{S}]$.

（理科实验班入学数学复试，1988 年）

［解］　注意到，

若　$x\in M=\{n^2,n^2+1,\cdots,(n+1)^2-1\}$，则

$$[\sqrt{x}]=n.$$

而 $M$ 中有 $2n+1$ 个元素. 从而

$$[\sqrt{n^2}]+[\sqrt{n^2+1}]+\cdots+[\sqrt{(n+1)^2-1}]$$

$= n \cdot (2n+1).$

由于 $44^2 = 1936$,所以

$$[\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + \cdots + [\sqrt{1935}]$$
$$= 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + \cdots + 43 \cdot 87.$$

又 $1988 - 1936 + 1 = 53$,所以

$$[\sqrt{1936}] + [\sqrt{1937}] + \cdots + [\sqrt{1988}] = 44 \cdot 53.$$

则有

$$S = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + \cdots + 43 \cdot 87 + 44 \cdot 53$$
$$= 58146.$$

所以 $[\sqrt{S}] = 241.$

**14·33** 求$[\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + \cdots + [\sqrt{1989 \cdot 1990}] + [-\sqrt{1}] + [-\sqrt{2}] + [-\sqrt{3}] + \cdots + [-\sqrt{1989 \cdot 1990}]$的值等于多少?

(第1届"希望杯"数学竞赛,1990年)

**[解]** 当 $x$ 为平方数时,

$$[\sqrt{x}] + [-\sqrt{x}] = 0,$$

当 $x$ 为非平方数时,

$$[\sqrt{x}] + [-\sqrt{x}] = -1.$$

已知的式子中有 $1989 \cdot 1990$ 对数,其中有 1989 对平方数,有 $1989^2$ 对非平方数,所以其和为

$$-1989^2 = -3956121.$$

**14·34** 计算和式$\sum_{n=0}^{502}\left[\frac{305n}{503}\right]$之值.

(第1届中国东北三省数学邀请赛,1986年)

**[解]** 因为 503 是素数

所以当 $n = 0,1,2,\cdots,502$ 时,$\frac{305n}{503}$ 不是整数.

由于

$$\frac{305n}{503} + \frac{305(503-n)}{503} = 305,$$

所以 $\frac{305n}{503}$ 与$\frac{305(503-n)}{503}$ 的小数部分之和为 1,于是

$$\left[\frac{305n}{503}\right] + \left[\frac{305(503-n)}{503}\right] = 304.$$

$$\sum_{n=0}^{502}\left[\frac{305n}{503}\right] = \sum_{n=1}^{502}\left[\frac{305n}{503}\right]$$

$$=\sum_{n=1}^{251}\left(\left[\frac{305n}{503}\right]+\left[\frac{305(503-n)}{503}\right]\right)$$
$$=304\cdot 251$$
$$=76304.$$

14·35 求出$\left[\frac{10^{20000}}{10^{100}+3}\right]$的个位数字.

（第47届美国普特南数学竞赛,1986年）

[解] 令$10^{100}=t$, 则

$$A=\left[\frac{10^{20000}}{10^{100}+3}\right]$$
$$=\left[\frac{t^{200}}{t+3}\right]$$
$$=\left[\frac{t^{200}-3^{200}}{t+3}+\frac{3^{200}}{t+3}\right],$$

因为$3^{200}=9^{100}<t+3$,所以

$$0<\frac{3^{200}}{t+3}<1.$$

又因为$t+3\mid t^{200}-3^{200}$,则

$$A=\frac{t^{200}-3^{200}}{t+3}$$
$$=\frac{t^{200}-81^{50}}{t+3}.$$

因为$A$的分母$t+3$的个位数码是3,分子$t^{200}-81^{50}$的个位数码是9

所以$A$的个位数码是3.

14·36 在数列$\left[\frac{1^2}{1980}\right],\left[\frac{2^2}{1980}\right],\left[\frac{3^2}{1980}\right],\cdots,\left[\frac{1980^2}{1980}\right]$中,有多少个不同的数?

（第6届全俄数学奥林匹克,1980年）

[解] 设$x_k=\left[\frac{k^2}{1980}\right]$.

则数列$\{x_k\}$是不减数列.

(1) 当$k\leqslant 44$时,由$44^2=1936<1980$可得

$$0<\frac{k^2}{1980}<1.$$

于是 $x_1 = x_2 = \cdots = x_{44} = 0.$

(2) 由于 $k = 62$ 时，$62^2 = 3844 < 2 \cdot 1980$，而

$$63^2 > 2 \cdot 1980,$$

所以当 $45 \leqslant k \leqslant 62$ 时，

$$1 < \frac{k^2}{1980} < 2,$$

于是 $x_{45} = x_{46} = \cdots = x_{62} = 1.$

由以上可知，数列 $\{x_k\}$ 的前 62 项只有两个不同的数 0 和 1.

下面考察 $k \geqslant 63$ 时的情形.

(3) $y_k = \dfrac{(k+1)^2}{1980} - \dfrac{k^2}{1980} = \dfrac{2k+1}{1980}.$

当 $y_k > 1$ 时，$x_{k+1}$ 与 $x_k$ 显然不同.

此时由 $2k + 1 > 1980$ 解得 $k > 989$.

于是当 $989 < k \leqslant 1980$ 时，所有的 $x_k$ 都不同，即 $x_{990}, x_{991}, \cdots, x_{1980}$ 这 991 个数是不同的.

(4) 当 $k = 989$ 时，

$$\left[\frac{989^2}{1980}\right] = 494.$$

当 $k \leqslant 989$ 时，$y_k < 1$，此时 $x_k$ 与 $x_{k+1}$ 或者相同，或者差 1，于是在 $x_1, x_2, \cdots, x_{989}$ 中，必然会出现 $0, 1, 2, \cdots, 494$ 这些不同的整数.

因此，已知数列 $\{x_k\}$ 中，出现不同的数的总数为

$$991 + 495 = 1486(\text{个}).$$

**14·37** 通项为 $a_n = b[\sqrt{n+c}] + d$ 的数列，逐次算得各项是

$$1,\ 3,\ 3,\ 3,\ 5,\ 5,\ 5,\ 5,\ 5, \cdots$$

其中每一个正奇数 $m$ 恰好连续出现 $m$ 次. 上述 $b, c, d$ 是待定的整数. 求 $b + c + d$ 的值.

(理科实验班入学数学复试，1989 年)

**[解]** 由于

$$a_{n+1} - a_n = b[\sqrt{n+1+c}] - b[\sqrt{n+c}],$$

且 $a_n$ 是奇数，$a_{n+1} \geqslant a_n$，则

$$a_{n+1} - a_n \in \{0, 2\}.$$

即 $$b[\sqrt{n+1+c}] - b[\sqrt{n+c}] = 0 \text{ 或 } 2.$$

对任何自然数 $n$，恒有

$$[\sqrt{n+1+c}]-[\sqrt{n+c}]\in\{0,1\}. \quad ①$$

显然，$b\neq 0$.

当 $a_{n+1}-a_n=2$ 时，即

$$b([\sqrt{n+1+c}]-[\sqrt{n+c}])=2$$

时，由 ① 知，只能有

$$[\sqrt{n+1+c}]-[\sqrt{n+c}]=1.$$

因此 $b=2$.

由于 $b$ 是常数，所以 $b=2$.

下面求 $c$.

由

$$a_1=b[\sqrt{1+c}]+d=2[\sqrt{1+c}]+d$$

可知，$c\geqslant -1$.

由题设数列的特征，我们有

$$a_{k^2}=2k-1.$$

取充分大的 $k$，使 $2k+3>c$，这时

$$(k+1)^2+c<(k+1)^2+2k+3=(k+2)^2.$$

从而有 $[\sqrt{(k+1)^2+c}]<k+2$. ②

另一方面，又有

$$a_{(k+1)^2}=2(k+1)-1,$$

则

$$a_{(k+1)^2}-a_1=[2(k+1)-1]-1=2k.$$

即

$$2[\sqrt{(k+1)^2+c}]-2[\sqrt{1+c}]=2k.$$

$$[\sqrt{(k+1)^2+c}]-[\sqrt{1+c}]=k.$$

由不等式 ②，有

$$[\sqrt{1+c}]<2,$$

因此 $c<3$.

从而 $-1\leqslant c<3$，$c=-1,0,1,2$.

若 $c=0,1,2$，则均有

$$a_5-a_4=[\sqrt{5+c}]-[\sqrt{4+c}]=2-2=0$$

与

$$a_5-a_4=2$$

第十四章 函数 $[x]$

矛盾.

于是,只能有 $c=-1$.

下面求 $d$.

由
$$a_1=2[\sqrt{1+c}]+d=1$$
可知
$$d=1.$$

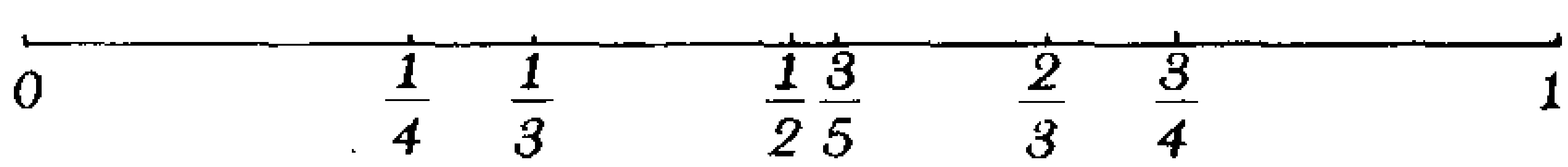
因此, $b+c+d=2+(-1)+1=2$.

14·38 当 $0\leqslant x\leqslant 100$ 时,求函数
$$f(x)=[x]+[2x]+\left[\frac{5x}{3}\right]+[3x]+[4x]$$
所取的不同整数的个数.

(第 29 届国际数学奥林匹克候选题,1988 年
亚太地区数学奥林匹克,1993 年)

**[解 1]** (1) 若 $x=3k+\alpha$, $k$ 是非负整数, $0\leqslant\alpha<1$, 则
$$\begin{aligned}f(x)&=3k+[6k+2\alpha]+[5k+\frac{5}{3}\alpha]+[9k+3\alpha]+[12k+4\alpha]\\&=35k+[\frac{5}{3}\alpha]+[2\alpha]+[3\alpha]+[4\alpha]\\&=35k+\begin{cases}0, & 若 0\leqslant\alpha<\frac{1}{4};\\1, & 若\frac{1}{4}\leqslant\alpha<\frac{1}{3};\\2, & 若\frac{1}{3}\leqslant\alpha<\frac{1}{2};\\4, & 若\frac{1}{2}\leqslant\alpha<\frac{3}{5};\\5, & 若\frac{3}{5}\leqslant\alpha<\frac{2}{3};\\6, & 若\frac{2}{3}\leqslant\alpha<\frac{3}{4};\\7, & 若\frac{3}{4}\leqslant\alpha<1.\end{cases}\end{aligned}$$

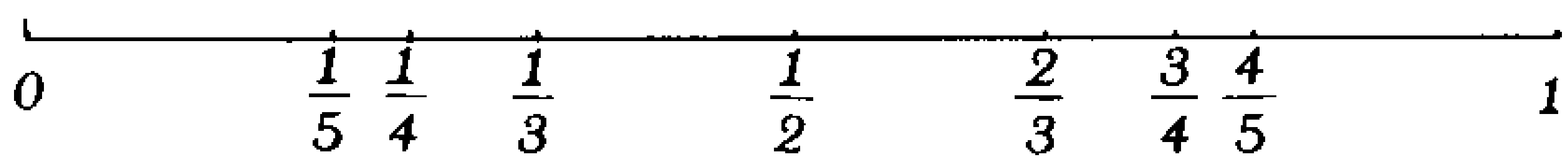
对固定的 $k$, $f(x)$ 有 7 个不同的值,即当 $\alpha$ 从图中的一个区间变到另一个区间时, $f(x)$ 的值变动一次.




(2) 若 $x=3k+1+\alpha$, $k$ 是非负整数, $0\leqslant\alpha<1$, 则

$$f(x) = 35k + 11 + [2\alpha] + [3\alpha] + [4\alpha] + \left[\frac{5}{3}\alpha + \frac{2}{3}\right]$$

$$= 35k + 11 + \begin{cases} 0, & 若 0 \leqslant \alpha < \frac{1}{5}; \\ 1, & 若 \frac{1}{5} \leqslant \alpha < \frac{1}{4}; \\ 2, & 若 \frac{1}{4} \leqslant \alpha < \frac{1}{3}; \\ 3, & 若 \frac{1}{3} \leqslant \alpha < \frac{1}{2}; \\ 5, & 若 \frac{1}{2} \leqslant \alpha < \frac{2}{3}; \\ 6, & 若 \frac{2}{3} \leqslant \alpha < \frac{3}{4}; \\ 7, & 若 \frac{3}{4} \leqslant \alpha < \frac{4}{5}; \\ 8, & 若 \frac{4}{5} \leqslant \alpha < 1. \end{cases}$$

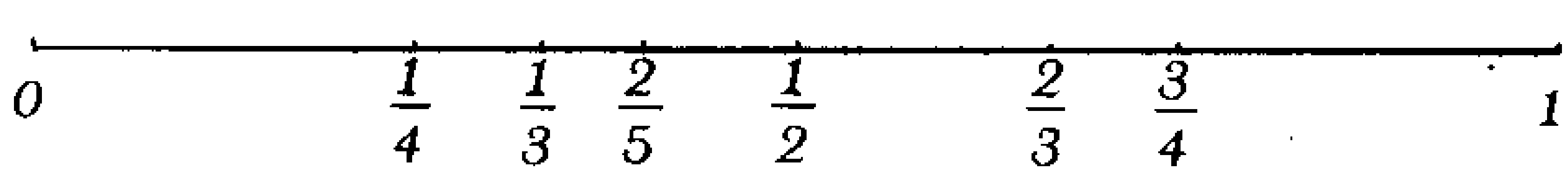



对固定的 $k$， $f(x)$ 有 8 个不同的值，当 $\alpha$ 从图中的一个区间变到另一个区间时，$f(x)$ 的值变动一次.

(3) 若 $x = 3k + 2 + \alpha$，$k$ 是非负整数，$0 \leqslant \alpha < 1$. 则

$$f(x) = 35k + 23 + [2\alpha] + [3\alpha] + [4\alpha] + \left[\frac{5}{3}\alpha + \frac{1}{3}\right]$$

$$= 35k + 23 + \begin{cases} 0, & 若 0 \leqslant \alpha < \frac{1}{4}; \\ 1, & 若 \frac{1}{4} \leqslant \alpha < \frac{1}{3}; \\ 2, & 若 \frac{1}{3} \leqslant \alpha < \frac{2}{5}; \\ 3, & 若 \frac{2}{5} \leqslant \alpha < \frac{1}{2}; \\ 5, & 若 \frac{1}{2} \leqslant \alpha < \frac{2}{3}; \\ 6, & 若 \frac{2}{3} \leqslant \alpha < \frac{3}{4}; \\ 7, & 若 \frac{3}{4} \leqslant \alpha < 1. \end{cases}$$



对固定的 $k$，$f(x)$ 有7个不同的值，当 $\alpha$ 从图中的一个区间变到另一个区间时，$f(x)$ 的值变动一次.

当 $x = 100$，即对第二种情况的 $k = 33$，$\alpha = 0$ 时，$f(x)$ 只有一个值 $35 \cdot 33 + 11$.

而当 $0 \leqslant x \leqslant 99$ 时，第一种情况，$k$ 可取从0至33共34个值，第二种情况，$k$ 可取从0至32共33个值，第三种情况，$k$ 可取从0至32共33个值.

所以当 $0 \leqslant x \leqslant 100$ 时，$f(x)$ 共可取

$$34 \cdot 7 + 33 \cdot 8 + 33 \cdot 7 + 1 = 734$$

个不同的整数值.

**[解 2]** 设 $x = 3n + r$，$n \geqslant 0$，$0 \leqslant r < 3$，则

$$\begin{aligned} f(x) &= f(3n + r) \\ &= [3n + r] + [6n + 2r] + [5n + \frac{5r}{3}] + [9n + 3r] + [12n + 4r] \\ &= 3n + 6n + 5n + 9n + 12n + [r] + [2r] + [\frac{5r}{3}] + [3r] + [4r] \\ &= 35n + f[r]. \end{aligned}$$

这样，对于每个 $n \geqslant 0$，在区间 $[n, n+3)$ 上函数 $f(x)$ 给出的不同整数值的个数相同.

为此，只需考虑区间 $[0,3)$ 上的情形.

注意到 $f(x)$ 是一个阶梯函数，且它的值至少在点 $[x]$，$[2x]$，$\left[\frac{5x}{3}\right]$，$[3x]$，$[4x]$ 之一跳跃. 显然 $f(x)$ 在区间 $[0,3)$ 上有22次跳跃，即在

$$0,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{5},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},$$

$$1,\ \frac{6}{5},\ \frac{5}{4},\ \frac{4}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{3},\ \frac{7}{4},\ \frac{9}{5},$$

$$2,\ \frac{9}{4},\ \frac{7}{3},\ \frac{12}{5},\ \frac{5}{2},\ \frac{8}{3},\ \frac{11}{4}$$

处跳跃.

因此，在区间 $[0,3)$ 上函数 $f(x)$ 所取的不同整数值的个数是22.

于是，在区间 $[0,99)$ 上不同整数值的个数为

$$22 \cdot 33 = 726.$$

同理,函数在区间[99,100]所取的不同整数值的个数与[0,1]上相同,而在[0,1]上函数有8次跳跃,即在

$$0,\quad \frac{1}{4},\quad \frac{1}{3},\quad \frac{1}{2},\quad \frac{3}{5},\quad \frac{2}{3},\quad \frac{3}{4},\quad 1$$

处跳跃.

因此,在区间[0,1]上函数 $f(x)$ 所取的不同整数值的个数是8,从而在[99,100]上 $f(x)$ 所取的不同整数值的个数也是8.

所以,$f(x)$ 在区间[0,100]上所取的不同整数值的个数是

$$726+8=734.$$

14·39 若实数 $r$ 使得

$$\left[r+\frac{19}{100}\right]+\left[r+\frac{20}{100}\right]+\cdots+\left[r+\frac{91}{100}\right]=546.$$

求$[100r]$.

(第9届美国数学邀请赛,1991年)

**[解]** 设 $r=[r]+\alpha,\quad 0\leqslant\alpha<1.$

则原式化为

$$73[r]+\left[\alpha+\frac{19}{100}\right]+\left[\alpha+\frac{20}{100}\right]+\cdots+\left[\alpha+\frac{91}{100}\right]=546.$$

因为$\left[\alpha+\frac{i}{100}\right]=0$ 或 1, $i=19,20,\cdots,91$,则

$$0\leqslant\sum_{i=19}^{91}\left[\alpha+\frac{i}{100}\right]<73.$$

又 $$546=73\cdot 7+35,$$

所以 $$[r]=7.$$

并且

$$\left[\alpha+\frac{i}{100}\right](i=19,20,\cdots,91)$$

中有35个1,因此需

$$\left[\alpha+\frac{57}{100}\right]=\left[\alpha+\frac{58}{100}\right]=\cdots=\left[\alpha+\frac{91}{100}\right]=1.$$

于是

$$\frac{43}{100}\leqslant\alpha<\frac{44}{100}.$$

因为 $r=[r]+\alpha=7+\alpha$,所以

$$7+\frac{43}{100}\leqslant r<7+\frac{44}{100},$$

$$743\leqslant 100r<744.$$

即 $$[100r]=743.$$

14·40 设

$$S=\sqrt{2+\sqrt[3]{3+\sqrt[4]{4+\cdots+\sqrt[1989]{1989+\sqrt[1990]{1990}}}}},$$

求 $S$ 的整数部分的值.

（中国福建省福州市高中数学竞赛,1990年）

[解] 首先用数学归纳法证明：

对一切大于2的自然数 $n$,恒有

$$n+2<2^n.$$

当 $n=3$ 时,$n+2=5<8=2^3$,不等式成立.

假设 $n=k(n\geqslant 3)$ 时,不等式成立,即

$$k+2<2^k.$$

那么,$n=k+1$ 时,

$$k+3<2^k+1<2^k+2^k=2^{k+1},$$

则 $n=k+1$ 时,不等式成立.

所以对一切大于2的自然数 $n$,恒有

$$n+2<2^n,$$

即 $$\sqrt[n]{n+2}<2.$$

所以

$$\begin{aligned}S&=\sqrt{2+\sqrt[3]{3+\sqrt[4]{4+\cdots+\sqrt[1989]{1989+\sqrt[1990]{1990}}}}}\\&<\sqrt{2+\sqrt[3]{3+\sqrt[4]{4+\cdots+\sqrt[1989]{1989+2}}}}\\&<\cdots\\&<\sqrt{2+\sqrt[3]{3+\sqrt[4]{4+2}}}\\&<\sqrt{2+\sqrt[3]{3+2}}\\&<\sqrt{2+2}\\&=2.\end{aligned}$$

又因为 $$S>1,$$

所以 $$1<S<2.$$

即 $$[S]=1.$$

**14·41** 试对任意正整数 $n$,计算和 $\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]$.

(第 10 届国际数学奥林匹克,1968 年)

**[解]** 首先证明一个等式:

对一切实数 $x$,有

$$\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]-[x]. \qquad ①$$

为此,设 $x=[x]+\alpha$,则 $0\leqslant\alpha<1$.

于是有

$$\left[x+\frac{1}{2}\right]=\left[[x]+\alpha+\frac{1}{2}\right]=[x]+\left[\alpha+\frac{1}{2}\right], \qquad ②$$

$$\begin{aligned}[2x]-[x]&=[2[x]+2\alpha]-[[x]+\alpha]\\&=[x]+[2\alpha]-[\alpha]. \qquad ③\end{aligned}$$

比较 ②,③ 可知,① 式等价于

$$\left[\alpha+\frac{1}{2}\right]=[2\alpha]-[\alpha],\quad 0\leqslant\alpha<1.$$

当 $0\leqslant\alpha<\frac{1}{2}$ 时,$\frac{1}{2}\leqslant\alpha+\frac{1}{2}<1,\quad 0\leqslant 2\alpha<1$,于是

$$\left[\alpha+\frac{1}{2}\right]=0,\quad [2\alpha]-[\alpha]=0.$$

等式 $\left[\alpha+\frac{1}{2}\right]=[2\alpha]-[\alpha]$ 成立.

当 $\frac{1}{2}\leqslant\alpha<1$ 时,$1\leqslant\alpha+\frac{1}{2}<\frac{3}{2}$,$1\leqslant 2\alpha<2$,于是

$$\left[\alpha+\frac{1}{2}\right]=1,[2\alpha]-[\alpha]=1.$$

等式 $\left[\alpha+\frac{1}{2}\right]=[2\alpha]-[\alpha]$ 成立.

因此,① 式成立.

由 ① 式可得

$$\begin{aligned}&\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]\\=&\left[\frac{n}{2^{k+1}}+\frac{1}{2}\right]\\=&\left[2\cdot\frac{n}{2^{k+1}}\right]-\left[\frac{n}{2^{k+1}}\right]\\=&\left[\frac{n}{2^k}\right]-\left[\frac{n}{2^{k+1}}\right].\end{aligned}$$

于是有

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]$$

$$=\left([n]-\left[\frac{n}{2}\right]\right)+\left(\left[\frac{n}{2}\right]-\left[\frac{n}{2^2}\right]\right)+\left(\left[\frac{n}{2^2}\right]-\left[\frac{n}{2^3}\right]\right)+\cdots$$

因为当 $k$ 适当大之后,对固定的自然数 $n$, $n<2^k$, $\left[\frac{n}{2^k}\right]=0$. 从而上式为

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]=[n]=n.$$

14·42　在区域 $x>0$, $y>0$, $xy=1$ 中,求函数

$$f(x,y)=\frac{x+y}{[x][y]+[x]+[y]+1}$$

的值域.

(奥地利数学竞赛,1988 年)

[解]　由对称性,设 $x\geqslant 1$.

(1) 当 $x=1$, $y=1$ 时,

$$f(1,1)=\frac{1}{2}.$$

(2) 当 $x>1$ 时,令 $x=n+\alpha$,其中 $n\geqslant 1, n\in N, 0\leqslant\alpha<1$. 则

$$y=\frac{1}{n+\alpha},\quad [y]=0,\quad [x]=n.$$

$$f(x,y)=\frac{n+\alpha+\dfrac{1}{n+\alpha}}{n+1}. \qquad ①$$

首先证明函数 $y=x+\frac{1}{x}$ 在 $x>1$ 时是增函数.

为此,设 $x_1>x_2>1$,则

$$y_1-y_2=(x_1-x_2)+\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right)$$

$$=(x_1-x_2)\left(1-\frac{1}{x_1x_2}\right).$$

由于 $x_1>x_2>1$,则 $x_1-x_2>0$, $1-\frac{1}{x_1x_2}>0$,于是

$$y_1-y_2>0,\quad y_1>y_2.$$

即函数 $y = x + \frac{1}{x}$ 在 $x > 1$ 时是增函数.

考虑函数 ①,由于

$$n \leqslant n + \alpha < n + 1,$$

则 $$\frac{n + \frac{1}{n}}{n + 1} \leqslant f(x, y) < \frac{n + 1 + \frac{1}{n + 1}}{n + 1}.$$

记 $a_n = \frac{n + \frac{1}{n}}{n + 1}$, $b_n = \frac{n + 1 + \frac{1}{n + 1}}{n + 1}$,则

$$a_n - a_{n+1} = \frac{n^2 + 1}{n(n + 1)} - \frac{(n + 1)^2 + 1}{(n + 1)(n + 2)} = \frac{2 - n}{n(n + 1)(n + 2)},$$

于是,当 $n \geqslant 1$ 时,有

$$a_1 > a_2 = a_3 < a_4 < a_5 < \cdots,$$

即 $a_2 = a_3$ 最小.

$$b_n - b_{n+1} = \frac{(n + 1)^2 + 1}{(n + 1)^2} - \frac{(n + 2)^2 + 1}{(n + 2)^2}$$

$$= \frac{2n + 3}{(n + 1)^2(n + 2)^2} > 0.$$

于是,当 $n \geqslant 1$ 时,有

$$b_1 > b_2 > b_3 > b_4 > b_5 > \cdots,$$

即 $b_1$ 最大.

所以,当 $x > 1$ 时,$f(x, y)$ 的值域为

$$[a_2, b_1) = \left[\frac{5}{6}, \frac{5}{4}\right).$$

于是,$f(x, y)$ 的值域为

$$\left\{\frac{1}{2}\right\} \cup \left[\frac{5}{6}, \frac{5}{4}\right).$$

14·43　求 $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^{1980}$ 的小数点的前一位与后一位的数码.并且证明你的结论.

(芬兰等四国数学竞赛,1980 年)

注:芬兰等四国指芬兰、英国、匈牙利和瑞典.

[解]　$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^{1980} = (5 + 2\sqrt{6})^{990}$.

因为　$2.4 < \sqrt{6} < 2.5$,

$4.8 < 2\sqrt{6} < 5$,

所以 $$0<5-2\sqrt{6}<0.2.$$

$$(5-2\sqrt{6})^{990}<0.2^{990}=0.008^{330}<0.01^{330}=0.1^{660}.$$

由于 $m=(5+2\sqrt{6})^{990}+(5-2\sqrt{6})^{990}$ 是一个整数,所以

$$(5+2\sqrt{6})^{990}=m-(5-2\sqrt{6})^{990},$$

$$(5+2\sqrt{6})^{990}=m-1+[1-(5-2\sqrt{6})^{990}].$$

于是 $[(5+2\sqrt{6})^{990}]=m-1,$

$$\{(5+2\sqrt{6})^{990}\}=1-(5-2\sqrt{6})^{990}=0.99\cdots$$

由于

$$\begin{aligned}m-1&=(5+2\sqrt{6})^{990}+(5-2\sqrt{6})^{990}-1\\&=2[5^{990}+C_{990}^{2}5^{988}(2\sqrt{6})^{2}+\cdots+C_{990}^{988}5^{2}(2\sqrt{6})^{988}\\&\quad+(2\sqrt{6})^{990}]-1,\end{aligned}$$

从而 $$\begin{aligned}m-1&=10\cdot S+2(2\sqrt{6})^{990}-1\\&=10\cdot S+2\cdot 24^{495}-1.\end{aligned}$$

由于 $24^{495}$ 的个位数与 $4^{495}$ 的个位数相同,而 $4^{495}$ 的个位数是 4,所以 $2\cdot 24^{495}$ 的个位数是 8.

于是 $m-1$ 的个位数是 7.

即 $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{1980}$ 的个位数是 7.

又因为 $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{1980}$ 的小数部分为 0.99…,

所以小数点后的第一位数码是 9.

**14·44** 证明如果 $n$ 是任意自然数,那么将数 $(5+\sqrt{26})^n$ 写成十进制小数时,小数部分开头的 $n$ 个数码是相同的.

(匈牙利数学奥林匹克,1966 年)

**[证]** 我们证明,将数 $(5+\sqrt{26})^n$ 写成十进制小数时,小数点以后的前 $n$ 个数码或者都是 0,或者都是 9.

这就等价于证明

$$|(5+\sqrt{26})^n-[(5+\sqrt{26})^n]|<10^{-n}.$$

为此只要证明

$$(5+\sqrt{26})^n+(5-\sqrt{26})^n$$

是整数,以及

$$|5-\sqrt{26}|<\frac{1}{10}$$

即可.

对$(5+\sqrt{26})^n+(5-\sqrt{26})^n$进行二项式展开可以看出含有$\sqrt{26}$的奇次幂的项相互抵消了,而只剩下含有$\sqrt{26}$的偶次幂的项,因而$(5+\sqrt{26})^n+(5-\sqrt{26})^n$一定是整数.

另一方面,由$5.1^2=26.01>26$,所以

$$5<\sqrt{26}<5.1,$$

$$|5-\sqrt{26}|<\frac{1}{10}.$$

由以上可知

$$|(5+\sqrt{26})^n-[(5-\sqrt{26})^n]|<10^{-n}.$$

由于$5-\sqrt{26}$是负数,则$n$是奇数时,小数点后的前$n$个数字是0;$n$是偶数时,小数点后的前$n$个数字是9.

**14·45** 对于像3.27这样的正数,3叫做这个数的整数部分,0.27叫做这个数的小数部分.求一个正数,它的小数部分,它的整数部分和这个数本身是等比数列的连续三项.

(第7届加拿大数学竞赛,1975年)

**[解]** 由题设,有

$$\frac{[x]}{\{x\}}=\frac{x}{[x]}.$$

由于$x=[x]+\{x\}$,则

$$\frac{[x]}{\{x\}}=\frac{[x]+\{x\}}{[x]}=1+\frac{\{x\}}{[x]}. \quad ①$$

由于$\{x\},[x],x$是等比数列的三项,则

$$[x]\neq 0.$$

于是 $[x]\geqslant 1.$

所以有 $[x]<\frac{[x]}{\{x\}}=1+\frac{\{x\}}{[x]}<2.$

因此必有 $[x]=1.$

故①式化为 $\frac{1}{\{x\}}=1+\{x\}.$

为简便计,记$\{x\}=r$,则有

$$r^2+r-1=0,$$

$$r=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2},$$

由 $r>0$　得　$r=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

所得正数 $x$ 为

$$x=[x]+r=1+\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

14·46　前1000个正整数当中,有多少个可以表示成$[2x]+[4x]+[6x]+[8x]$的形式.

(第3届美国数学邀请赛,1985年)

**[解1]**　令 $f(x)=[2x]+[4x]+[6x]+[8x]$.

设 $n$ 是整数,则

$$\begin{aligned}&f(x+n)\\&=[2x+2n]+[4x+4n]+[6x+6n]+[8x+8n]\\&=[2x]+[4x]+[6x]+[8x]+20n\\&=f(x)+20n.\end{aligned}\quad ①$$

如果某个整数 $k$ 可以表示为 $f(x_0)$,即

$$f(x_0)=k.$$

其中 $x_0$ 为某一实数.

则由①,对 $n=1,2,3,\cdots$,

$$k+20n=f(x_0)+20n=f(x_0+n).$$

即 $k+20$ 也可表示为 $f(x)$ 的形式.

由此,我们只要注意,当 $x$ 在$(0,1]$中变化时,$f(x)$可能产生前20个正整数中的几个.

其次,如果让 $x$ 增加,那么仅当 $2x,4x,6x,8x$ 达到某个整数时,$f(x)$ 才会改变,而且总是变成某个较大的整数.

在$(0,1]$中,这种变化恰好发生于下述情况:即 $x$ 具有$\frac{m}{n}$的形式,其中 $1\leqslant m\leqslant n$,而 $n=2,4,6,8$,这样的分数共有12个,它们从小到大的排列是:

$$\frac{1}{8},\frac{1}{6},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{3}{8},\frac{1}{2},\frac{5}{8},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{5}{6},\frac{7}{8},1.$$

因此前20个正整数中只有12个可以表示成所要求的形式.

由于 $1000=50\cdot 20$,由①知,前1000个正整数共分成50段,每段连续20个相邻正整数,其中有12个可以表示成所要求的形式.

所以适合要求的数共有 $50 \cdot 12 = 600$ 个.

**[解 2]** 令 $f(x) = [2x] + [4x] + [6x] + [8x]$.

由此可得

$$\begin{aligned} f(x+\frac{1}{2}) &= [2x+1] + [4x+2] + [6x+3] + [8x+4] \\ &= [2x] + [4x] + [6x] + [8x] + 10 \\ &= f(x) + 10. \end{aligned}$$

我们只须注意,当 $x \in [0,\frac{1}{2})$ 时,$f(x)$ 能表达哪些自然数.

在 $x \in [0,\frac{1}{2})$ 时,$[2x] = 0$,因此

$$f(x) = [4x] + [6x] + [8x].$$

分以下情况讨论:

(1) 当 $x \in [0,\frac{1}{8})$,这时

$$f(x) = 0.$$

(2) 当 $x \in \left[\frac{1}{8},\frac{1}{6}\right)$,这时 $[4x] = [6x] = 0$,

$$f(x) = [8x] = 1,$$

(3) 当 $x \in \left[\frac{1}{6},\frac{1}{4}\right)$,这时 $[4x] = 0$,

$$f(x) = [6x] + [8x] = 1 + 1 = 2,$$

(4) 当 $x \in \left[\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right)$,这时

$$f(x) = 1 + 1 + 2 = 4,$$

(5) 当 $x \in \left[\frac{1}{3},\frac{3}{8}\right)$,这时

$$f(x) = 1 + 2 + 2 = 5,$$

(6) 当 $x \in \left[\frac{3}{8},\frac{1}{2}\right)$,这时

$$f(x) = 1 + 2 + 3 = 6,$$

(7) 当 $x = \frac{1}{2}$,这时

$$f(x) = 10.$$

因此,当 $x \in \left(0,\frac{1}{2}\right]$ 时,$f(x)$ 能表达 1,2,4,5,6,10 这 6 个自然

数.

这些数加上10的倍数也能表示成这种形式,因此前1000个自然数中,有 $6 \cdot 100 = 600$ 个能表达成这种形式.



**14·47** 数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_{k+1} = x_k^2 + x_k, k \in N$. 求出和 $\frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} + \cdots + \frac{1}{x_{100}+1}$ 的整数部分.

(中国国家集训队训练题,1990 年)

**[解]** 由 $x_{k+1} = x_k^2 + x_k$ 及 $x_1 = \frac{1}{2} > 0$ 可得

$$x_{k+1} > x_k > 0.$$

且

$$x_{k+1} - x_k^2 - x_k + x_k x_{k+1} = x_k x_{k+1},$$

$$(x_k + 1)(x_{k+1} - x_k) = x_k x_{k+1},$$

$$\frac{1}{x_k+1} = \frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_{k+1}}.$$

从而有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} + \cdots + \frac{1}{x_{100}+1} \\
&= \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right) + \left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{x_{100}} - \frac{1}{x_{101}}\right) \\
&= \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_{101}} \\
&= 2 - \frac{1}{x_{101}} \\
&> 2 - \frac{1}{x_3}.
\end{aligned}$$

由 $x_1 = \frac{1}{2}$ 得

$$x_2 = \frac{3}{4}, \quad x_3 = \frac{21}{16} > 1,$$

于是 $1 < \frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} + \cdots + \frac{1}{x_{100}+1} < 2.$

即 $\left[\frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} + \cdots + \frac{1}{x_{100}+1}\right] = 1.$

**14·48** 试问:数 $n$!能否以数码组 1976000…000 结尾?

(第 39 届莫斯科数学奥林匹克,1976 年)

[解]　由于 $n!$ 的末尾的0的个数取决于 $n!$ 中5的最高次幂，这是因为 $n!$ 中 2 的最高次幂大于 5 的最高次幂，并且在 $n\geqslant 8$ 时，至少多 4 个.

所以将 $n!$ 除以 10 的最高次幂而去掉 $n!$ 中末尾的 0 之后，所得的结果应是 2 的较高次方幂的倍数.

去掉末尾的0之后的末四位是1976应至少是 $16=2^4$ 的倍数，然而 1976 不能被 16 整除.

因此 $n!$ 不能以 1976000…000 结尾.

14·49　$k$ 是自然数，且 $\dfrac{1001\cdot 1002\cdot\cdots\cdot 1985\cdot 1986}{11^k}$ 是整数，$k$ 的最大值是多少?

（中国北京市高中一年级数学竞赛，1986 年）

[解]　原式可化为

$$\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots 1000\cdot 1001\cdot 1002\cdots 1985\cdot 1986}{11^k\cdot 1000!}$$

$$=\frac{1986!}{11^k\cdot 1000!}.$$

1986!中含因子 11 的最高幂次为

$$\left[\frac{1986}{11}\right]+\left[\frac{1986}{11^2}\right]+\left[\frac{1986}{11^3}\right]$$

$$=180+16+1$$

$$=197.$$

1000!中含因子 11 的最高幂次为

$$\left[\frac{1000}{11}\right]+\left[\frac{1000}{11^2}\right]$$

$$=90+8=98.$$

所以 $k$ 的最大值为 $197-98=99$.

14·50　现有一些正整数，其中的每一个数都小于 1951，而其中每两个数的最小公倍数都大于 1951，证明这些数的倒数之和小于 2.

（第 14 届莫斯科数学奥林匹克，1951 年）

[证]　设已知的整数为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$.

由已知，每两数的最小公倍数都大于 1951，

因此，1,2,3,…,1951 中的每一个数都不能同时被 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中的两个数整除.

所以 $1,2,\cdots,1951$ 中能被 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 之一整除的数的个数为

$$M=\left[\frac{1951}{a_1}\right]+\left[\frac{1951}{a_2}\right]+\cdots+\left[\frac{1951}{a_n}\right],$$

则
$$M\leqslant 1951.$$

另一方面 $\left[\frac{1951}{a_i}\right]>\frac{1951}{a_i}-1,\quad i=1,2,\cdots,n.$

于是有 $\left(\frac{1951}{a_1}-1\right)+\left(\frac{1951}{a_2}-1\right)+\cdots+\left(\frac{1951}{a_n}-1\right)<1951,$

$$\frac{1951}{a_1}+\frac{1951}{a_2}+\cdots+\frac{1951}{a_n}<1951+n<2\cdot 1951.$$

于是有 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}<2.$

**14·51** 设 $a,b$ 为整数，$n$ 为正整数，证明

$$\frac{b^{n-1}a(a+b)(a+2b)\cdots[a+(n-1)b]}{n!}$$

是整数.

（第 26 届国际数学奥林匹克候选题，1985 年）

［证］ 设 $p$ 是不大于 $n$ 的素数.

则 $p$ 在 $n!$ 中的幂指数为

$$\begin{aligned}&\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\cdots\\&<\frac{n}{2}+\frac{n}{2^2}+\cdots\\&=\frac{\frac{1}{2}n}{1-\frac{1}{2}}\\&=n.\end{aligned}$$

(1) 如果 $p\mid b$，则 $p$ 在分子中的次数 $\geqslant n-1$，而分母中 $p$ 的次数 $\leqslant n-1$，于是，分母中的素因数 $p$ 可约去.

(2) 如果 $p\nmid b$，则 $p$ 必能整除

$$a,a+b,\cdots,a+(p-1)b$$

中的一个，

因此，$n$ 个数

$$a,a+b,\cdots,a+(n-1)b$$

中至少有$\left[\frac{n}{p}\right]$个数能被$p$整除，

同样，至少有$\left[\frac{n}{p^2}\right]$个数能被$p^2$整除，….

所以素数$p$在乘积$a(a+b)\cdots[a+(n-1)b]$中的次数$k$满足

$$k \geqslant \left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\cdots$$

因此，分母中$n!$的素因数$p$可以全部约去.

综上可知，

$$\frac{b^{n-1}a(a+b)(a+2b)\cdots[a+(n-1)b]}{n!}$$

是整数.

14·52　设$s,t$为非负整数，满足$s+t=n$，$p$为素数，将$n$写成下列表达式

$$n = n_k p^k + n_{k-1}p^{k-1} + \cdots + n_1 p + n_0,$$

其中$0 \leqslant n_i < p$，　$0 \leqslant i \leqslant k$.

对$s,t$也有类似的表达式.

(1) 证明$\frac{(s_0+t_0-n_0)+(s_1+t_1-n_1)+\cdots+(s_k+t_k-n_k)}{p-1}$是能整除二项式系数$C_n^s$的$p$的最高次幂.

(2) 证明恰有$(n_0+1)(n_1+1)\cdots(n_k+1)$个二项式系数$C_n^s$，$0 \leqslant s \leqslant n$，不能被$p$整除.

（加拿大数学奥林匹克训练题，1988年）

[证]　(1) 在$n!$中，$p$的最高次幂为

$$\begin{aligned}&\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\cdots+\left[\frac{n}{p^k}\right]\\
&= n_k + (n_k p + n_{k-1}) + (n_k p^2 + n_{k-1}p + n_{k-2}) + \cdots + (n_k p^{k-1} + n_{k-1}p^{k-2} + \cdots + n_1)\\
&= n_k(1+p+\cdots+p^{k-1}) + \cdots + n_2(1+p) + n_1\\
&= \frac{1}{p-1}[n_k(p^k-1)+\cdots+n_2(p^2-1)+n_1(p-1)]\\
&= \frac{1}{p-1}(n-n_k-n_{k-1}\cdots-n_1-n_0)\end{aligned}$$

所以在 $C_n^s=\frac{n!}{s!(n-s)!}=\frac{n!}{s!t!}$ 中 $p$ 的最高次幂为

$$\frac{n-n_k-n_{k-1}-\cdots-n_1-n_0-s+s_k+\cdots+s_0-t+t_k+\cdots+t_0}{p-1}$$

$$=\frac{(s_0+t_0-n_0)+(s_1+t_1-n_1)+\cdots+(s_k+t_k-n_k)}{p-1}$$

(2) 由于 $s+t=n$,则当且仅当 $s_i\leqslant n_i,\quad i=1,2,\cdots,k$ 时,(1) 中的表达式,即能整除 $C_n^s$ 的 $p$ 的最高次幂为 0,亦即 $C_n^s$ 不能被 $p$ 整除.

因为 $s_i$ 有 $n_i+1(i=0,1,2,\cdots,k)$ 种选择,所以共有 $(n_0+1)(n_1+1)\cdots(n_k+1)$ 个二项式系数 $C_n^s(0\leqslant s\leqslant n)$ 不能被 $p$ 整除.

14·53 证明对每一整数 $n>1$,方程

$$\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\cdots+\frac{x^2}{2!}+\frac{x}{1!}+1=0$$

没有有理根.

(第 30 届国际数学奥林匹克预选题,1989 年)

[证] 首先证明,对每个正整数 $k$ 及每个素数 $p$, $p^k\nmid k!$.

设 $s\geqslant 0$ 为整数,满足

$$p^s\leqslant k<p^{s+1},$$

则满足 $p^r\mid k!$的最大整数 $r$ 满足

$$\begin{aligned}r&=\left[\frac{k}{p}\right]+\left[\frac{k}{p^2}\right]+\cdots+\left[\frac{k}{p^s}\right]\\&\leqslant\frac{k}{p}+\frac{k}{p^2}+\cdots+\frac{k}{p^s}\\&=k\cdot\frac{1-\frac{1}{p^s}}{1-\frac{1}{p}}\cdot\frac{1}{p}\\&<k.\end{aligned}$$

所以 $\qquad p^k\nmid k!.$

设方程 $$\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\cdots+\frac{x^2}{2!}+\frac{x}{1!}+1=0 \qquad ①$$

有有理根 $\alpha$,则

$$\alpha^n+n\alpha^{n-1}+\cdots+\frac{n!}{k!}\alpha^k+\cdots+\frac{n!}{2!}\alpha^2+\frac{n!}{1!}\alpha+n!=0.$$

设 $\alpha = \dfrac{c}{d}, c, d \in N, (c, d) = 1$,则

$$c^n + nc^{n-1}d + \cdots + \frac{n!}{1!}cd^{n-1} + n!d^n = 0. \quad ②$$

于是 $d \mid c$,从而 $d = 1$.

即若方程 ① 有有理根 $\alpha$,则 $\alpha$ 必为整数.

设 $p$ 为 $n$ 的素因数,则由上面的方程 ② 可知 $p \mid c^n$,即 $p \mid \alpha^n$. 从而 $p \mid \alpha$.

设 $r$ 为满足 $p^r \mid n!$ 的最大整数,则由

$$p^k \mid \alpha^k, \quad p^k \nmid k!$$

可得

$$p^{r+1} \mid \frac{n!}{k!}\alpha^k, \quad k = 1, 2, \cdots, n,$$

从而由方程 ② 可知

$$p^{r+1} \mid n!$$

出现矛盾. 即方程 ① 没有有理根.

14·54 如果有正整数 $m$,使得 $m!$ 末尾恰有 $n$ 个零,则正整数 $n$ 称做"阶乘尾数". 问比 1992 小的正整数中,有多少个非"阶乘尾数"?

(第 10 届美国数学邀请赛,1992 年)

[**解**] 令 $f(m)$ 为数 $m!$ 末尾零的个数.

显然,$f(m)$ 是 $m$ 的不减函数.

而且,当 $m$ 是 5 的倍数时,有

$$\begin{aligned} f(m) &= f(m+1) = f(m+2) = f(m+3) \\ &= f(m+4) < f(m+5). \end{aligned}$$

这样,我们可把 $f(k)(k = 0, 1, 2, \cdots)$ 列出:

0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 6, 6, 6, 6, 6, $\cdots$ ①

其中每个数在这列数中出现 5 次.

下面来看 1991 是否出现在 ① 中.

易知,$m!$ 末尾零的个数是

$$f(m) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{m}{5^k}\right]. \quad ②$$

若有 $m$,使 $f(m) = 1991$,则

$$1991 < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m}{5^k} = \frac{\frac{1}{5}m}{1-\frac{1}{5}} = \frac{m}{4}.$$



因此， $m > 4 \cdot 1991 = 7964.$

利用 ② 易得

$$f(7965) = 1988, \quad f(7970) = 1989, \quad f(7975) = 1991.$$

现将数列 ① 一直排到 $f(7979) = 1991$ 这一项,得

$$0,0,0,0,0,1,1,1,1,1,\cdots,1989,1989,1989,1989,1989,1991,1991,1991,1991,1991. \quad ③$$

数列 ③ 共有 7980 个数.

由于每个不同的整数都恰好出现 5 次,所以数列 ③ 中共有 $\frac{7980}{5} = 1596$ 个不同的整数,且都是集合$\{0,1,2,\cdots,1991\}$ 中的元素.

因此有 $1992 - 1596 = 396$ 个整数没有出现在数列 ③ 中.

所以有 396 个正整数比 1992 小且不是"阶乘尾数".

**14·55** 设 $m$ 为正整数,$m!$中所含因子 2 的个数记为 $n(m)$. 求证存在自然数 $m > 1990^{1990}$,使 $m = 3^{1990} + n(m)$.

(中国浙江省高中数学夏令营,1990 年)

**[证]** 令 $m = 2^\alpha - 1$.

$m!$中含因子 2 的个数为

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{2^\alpha - 1}{2}\right] + \left[\frac{2^\alpha - 1}{2^2}\right] + \cdots + \left[\frac{2^\alpha - 1}{2^\alpha}\right] \\
&= (2^{\alpha-1} - 1) + (2^{\alpha-2} - 1) + \cdots + (1 - 1) \\
&= (2^{\alpha-1} + 2^{\alpha-2} + \cdots + 1) - \alpha \\
&= 2^\alpha - 1 - \alpha.
\end{aligned}$$

即 $\qquad n(m) = 2^\alpha - 1 - \alpha.$

只要取 $\alpha = 3^{1990}$,则有

$$\begin{aligned}
m &= 2^\alpha - 1 = (2^\alpha - 1 - \alpha) + \alpha \\
&= 3^{1990} + n(m).
\end{aligned}$$

下面证明 $m > 1990^{1990}$.

$$m = 2^{3^{1990}} - 1 > 2^{3^{1989}}$$

$$=(2^{27})^{3^{1986}}>1990^{3^{1986}}>1990^{1990}.$$

14·56　数列$\{a_n\}$按下列递推关系给出：

$$a_1=1,\quad a_{n+1}=a_n+\frac{1}{[a_n]},\quad n\geqslant 1.$$

求使不等式$a_n>20$成立的所有$n$.

（第18届全俄数学奥林匹克，1992年）

［解］　首先计算数列的前若干项：

$$a_2=2,\quad a_3=2\frac{1}{2},\quad a_4=3,\quad a_5=3\frac{1}{3},$$

$$a_6=3\frac{2}{3},\quad a_7=4,\quad a_8=4\frac{1}{4},\cdots.$$

下面证明：此数列单调增加，且它的项具有形式

$$m+\frac{k}{m},\quad 0\leqslant k\leqslant m-1.$$

当$n=1$时，结论显然成立.

若$a_n=m+\dfrac{k}{m},\quad 0\leqslant k\leqslant m-1$，则

$$[a_n]=\left[m+\frac{k}{m}\right]=m.$$

因而有

$$\begin{aligned}a_{n+1}&=a_n+\frac{1}{[a_n]}\\&=\left(m+\frac{k}{m}\right)+\frac{1}{m}\\&=m+\frac{k+1}{m}.\end{aligned}$$

于是我们得

$$a_{n+1}=\begin{cases}m+1, & 若\ k=m-1,\\ m+\dfrac{l}{m}, & l\leqslant m-1,若\ k<m-1.\end{cases}$$

因此，数列有1项的整数部分为1，有2项的整数部分为2，有3项的整数部分为3，…，于是，整数部分不超过19的项有

$$1+2+3+\cdots+19=\frac{19\cdot 20}{2}=190,$$

而$a_{191}=20$.

所以当 $n>191$ 时,$a_n>20$.

14·57　定义函数 $f(n)(n\in N)$ 如下:设

$$\frac{(2n)!}{n!(n+1000)!}=\frac{A(n)}{B(n)}.$$

这里 $A(n),B(n)$ 是互素的正整数.

若 $B(n)=1$,则 $f(n)=1$,

若 $B(n)\neq 1$,则 $f(n)=B(n)$ 的最大素因数.

求证 $f(n)$ 的不同值只有有限个,并求出它的最大值.

(第 31 届国际数学奥林匹克候选题,1990 年)

[证]　先证明下面的引理:

引理　设 $n,a$ 是正整数,且设分数

$$\frac{(2n)!}{n!(n+a)!}$$

被写成既约形式,则分母不能被任意大于 $2a$ 的素数整除.

引理的证明如下:

设 $x=\frac{(2n)!(2a)!}{n!(n+a)!}$.

任一素数 $p$ 在 $x$ 中的最大的幂等于

$$\sum_{r\geqslant 1}\left(\left\{\left[\frac{2n}{p^r}\right]+\left[\frac{2a}{p^r}\right]\right\}-\left\{\left[\frac{n}{p^r}\right]+\left[\frac{n+a}{p^r}\right]\right\}\right)\qquad ①$$

由于对任意非负数 $y,z$,不等式

$$[2y]+[2z]\geqslant[y]+[y+z]\qquad ②$$

成立.

事实上,设 $y=[y]+\alpha$,　$z=[z]+\beta$,　$0\leqslant\alpha$,　$\beta<1$.
则不等式 ② 等价于

$$2[y]+[2\alpha]+2[z]+[2\beta]\geqslant[y]+[y]+[z]+[\alpha+\beta].$$

$$[z]+[2\alpha]+[2\beta]\geqslant[\alpha+\beta].\qquad ③$$

由 $0\leqslant\alpha,\beta<1$ 可得

$$0\leqslant\alpha+\beta<2.$$

若 $[\alpha+\beta]=0$,则 ③ 式显然成立.

若 $[\alpha+\beta]=1$,则 $\alpha,\beta$ 中至少有一个不小于 $\frac{1}{2}$,从而 $[2\alpha]$ 与 $[2\beta]$ 中至少有一个为 1,则 ③ 式成立.

从而可证 ② 式成立.

由 ② 式可知,① 中的每一项均不小于 0,因此 $x$ 是整数.

从而$\frac{x}{(2a)!}$的分母不可能包含任意大于 $2a$ 的素数.引理得证.

由引理及 $f(n)$ 的定义可得

$$f(n) < 2000.$$

从而 $f(n)$ 的值只有有限个.

小于 2000 的最大素数为 1999,可以证明

$$f(999) = 1999.$$

当 $n = 999$ 时.

$$\frac{(2n)!}{n!(n+1000)!} = \frac{1998!}{999!1999!} = \frac{1}{1999 \cdot 999!}$$

所以 $B(999) = 1999(999!)$.

因为 1999 是素数,所以 $f(999) = 1999$.

因此,$f(n)$ 的最大值是 1999.

**14·58** 证明由 $a_n = [n\sqrt{2}]$ 定义的数列 $\{a_n\}$ 中含有无限多个 2 的整数幂.

(第 26 届国际数学奥林匹克候选题,1985 年)

**[证]** 显然,

$$[1 \cdot \sqrt{2}] = 1 = 2^0,$$
$$[2 \cdot \sqrt{2}] = 2 = 2^1,$$
$$[3 \cdot \sqrt{2}] = 4 = 2^2.$$

一般地,必存在无穷多个自然数 $k$,使

$$\left\{\frac{2^k}{\sqrt{2}}\right\} > 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad ①$$

成立.

事实上,如果 $\{x\} < \frac{1}{2}$,则

$$\{2x\} = 2\{x\}.$$

如果 $\left\{\frac{2^k}{\sqrt{2}}\right\} \leqslant 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{1}{2}$,那么

$$\left\{\frac{2^{k+1}}{\sqrt{2}}\right\} = \left\{2 \cdot \frac{2^k}{\sqrt{2}}\right\} = 2\left\{\frac{2^k}{\sqrt{2}}\right\},$$

于是

$$\left\{\frac{2^{k+2}}{\sqrt{2}}\right\}=2\left\{\frac{2^{k+1}}{\sqrt{2}}\right\}=4\left\{\frac{2^k}{\sqrt{2}}\right\},$$

$$\left\{\frac{2^{k+3}}{\sqrt{2}}\right\}=2\left\{\frac{2^{k+2}}{\sqrt{2}}\right\}=4\left\{\frac{2^{k+1}}{\sqrt{2}}\right\}=8\left\{\frac{2^k}{\sqrt{2}}\right\},$$

……

如此继续下去,必有一个 $k' > k$,使得

$$\left\{\frac{2^{k}}{\sqrt{2}}\right\}>1-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

因而 ① 式成立.

此时令 $n=\left[\frac{2^k}{\sqrt{2}}\right]+1$,则由

$$x-1<[x]\leqslant x$$

得

$$\frac{2^k}{\sqrt{2}}<n. \qquad ②$$

则

$$1+\frac{2^k}{\sqrt{2}}=n+\left\{\frac{2^k}{\sqrt{2}}\right\}>n+1-\frac{1}{\sqrt{2}},$$

所以

$$n<\frac{2^k}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}. \qquad ③$$

由 ②,③ 得

$$\frac{2^k}{\sqrt{2}}<n<\frac{2^k}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$2^k<n\cdot\sqrt{2}<2^k+1.$$

所以

$$[n\cdot\sqrt{2}]=2^k.$$

即取 $n=\left[\frac{2^k}{\sqrt{2}}\right]+1$ 时,$[\sqrt{2}n]=2^k$,其中 $\left\{\frac{2^k}{\sqrt{2}}\right\}>1-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

**14·59** 求所有的自然数 $n$,使得 $\min\limits_{k\in N}\left(k^2+\left[\frac{n}{k^2}\right]\right)=1991$,这里 $N$ 是自然数集.

(第 6 届中国中学生数学冬令营,1991 年)

**[解]** 由于

$$k^2+\frac{n}{k^2}-1<k^2+\left[\frac{n}{k^2}\right]\leqslant k^2+\frac{n}{k^2},$$

则

$$\min_{k\in N}\left(k^2+\left[\frac{n}{k^2}\right]\right)=1991$$

等价于：

对所有的 $k \in N$，

$$k^2 + \frac{n}{k^2} \geqslant 1991, \quad ①$$

且存在 $k_0 \in N$，使得

$$k_0^2 + \frac{n}{k_0^2} < 1992. \quad ②$$

由于 ① 有

$$k^4 - 1991k^2 + n \geqslant 0,$$

$$\left(k^2 - \frac{1991}{2}\right)^2 + n - \frac{1991^2}{4} \geqslant 0,$$

$$n \geqslant \frac{1991^2}{4} - \left(k^2 - \frac{1991}{2}\right)^2.$$

为使此式成立，只要 $\frac{1991^2}{4} - \left(k^2 - \frac{1991}{2}\right)^2$ 的最大值小于或等于 $n$ 即可.

由于最接近 $\frac{1991}{2}$ 的平方数为 $32^2 = 1024$，所以当 $k = 32$ 时，$\left(k^2 - \frac{1991}{2}\right)^2$ 有最小值 $\left(1024 - \frac{1991}{2}\right)^2$.

从而有

$$n \geqslant \frac{1991^2}{4} - \left(1024 - \frac{1991}{2}\right)^2 = 967 \cdot 1024.$$

由于 ②，存在 $k_0 \in N$，使得

$$k_0^4 - 1992k_0^2 + n < 0,$$

即

$$-(k_0^2 - 996)^2 - n + 996^2 > 0,$$

$$n < -(k_0^2 - 996)^2 + 996^2.$$

为使此式成立，只要求出使 $-(k_0^2 - 996)^2 + 996^2$ 的最大值大于 $n$ 的 $k_0$ 的值即可.

显然，$k_0 = 32$ 时，$-(k_0^2 - 996)^2 + 996$ 有最大值 $-(1024 - 996)^2 + 996^2$，即

$$n < -(1024 - 996)^2 + 996^2 = 1024 \cdot 968.$$

于是 $1024 \cdot 967 \leqslant n < 1024 \cdot 968$.

即集合 $\{n \mid 1024 \cdot 967 \leqslant n < 1024 \cdot 968, \quad n \in N\}$ 为所求.

14·60 设 $n$ 是一个固定的正整数,$b(n)$ 是 $k+\frac{n}{k}$ 关于所有正整数 $k$ 的最小值.证明 $[b(n)]=[\sqrt{4n+1}]$.

(第 34 届美国普特南数学竞赛,1973 年)

[证] 令 $c(n)=\sqrt{4n+1}$.

又设 $k(n)$ 是使得 $k+\frac{n}{k}$ 为最小的 $k$ 值.则

$$\begin{aligned}b(n-1)&\leqslant k(n)+\frac{n-1}{k(n)}\\&<k(n)+\frac{n}{k(n)}\\&=b(n).\end{aligned}$$

即有 $\quad b(n-1)<b(n)$. ①

由 $\quad k+\frac{m^2}{k}\geqslant 2\sqrt{k\cdot\frac{m^2}{k}}=2m(m\in N)$,

则当 $k=m$ 时,$k+\frac{m^2}{k}$ 取得最小值 $2m$,

即对正整数 $m$, $b(m^2)=2m$. ②

又对正整数 $m$,当且仅当 $k=m$ 或 $k=m+1$ 时,$k+\frac{m^2+m}{k}$ 取得最小值 $2m+1$,即

$$b(m^2+m)=2m+1. \quad ③$$

由 ①,②,③ 可得

$$\begin{aligned}&[b(n)]=2m,\quad 当\ m^2\leqslant n<m^2+m;\\&[b(n)]=2m+1,当\ m^2+m\leqslant n<(m+1)^2.\end{aligned} \quad ④$$

另一方面,$c(n)=\sqrt{4n+1}$ 也是一个增函数,并且

$$c(m^2-1)=\sqrt{4m^2-3}<2m,$$

$$c(m^2)=\sqrt{4m^2+1}>2m,$$

$$c(m^2+m)=\sqrt{4m^2+4m+1}=2m+1.$$

由此也可得

$$\begin{aligned}&[c(n)]=2m,\qquad 当\ m^2\leqslant n<m^2+m;\\&[c(n)]=2m+1,\quad 当\ m^2+m\leqslant n<(m+1)^2.\end{aligned} \quad ⑤$$

由 ④,⑤ 得 $\quad [b(n)]=[c(n)]=[\sqrt{4n+1}]$.

14·61　证明对每一个自然数 $k(k\geqslant 2)$,存在一个无理数 $r$,使得对每一个自然数 $m$,$[r^m]\equiv -1 \pmod k$.

（第 28 届国际数学奥林匹克候选题,1987 年）

［证］　首先用数学归纳法证明

当 $r+s$,$rs$ 为整数,且能被 $k$ 整除时,对任意自然数 $m$,$r^m+s^m$ 是整数且能被 $k$ 整除.

设 $r+s=kp$,　$rs=kq$,其中 $k\in N$,　$p,q\in Z$.

则
$$r^2+s^2=(r+s)^2-2rs$$
$$=k^2p^2-2kq$$
是整数,且能被 $k$ 整除.

因此,当 $m=1,2$ 时结论成立.

假设对于小于 $m$ 的自然数,结论成立.即
$$r+s,r^2+s^2,\cdots,r^{m-1}+s^{m-1}$$
都是整数且能被 $k$ 整除.

由于　$r^m+s^m=(r+s)(r^{m-1}+s^{m-1})-rs(r^{m-2}+s^{m-2})$,

则 $r^m+s^m$ 是整数,且能被 $k$ 整除.

于是对所有自然数 $m$,$r^m+s^m$ 都是整数,且能被 $k$ 整除.

下面我们证明存在这样的 $r$ 和 $s$,其中 $r$ 是无理数,$s$ 满足 $0<s<1$,使得 $r+s$ 和 $rs$ 都是整数,且能被 $k$ 整除.

为此考虑方程
$$x^2-kpx+kq=0.$$

如果 $r,s$ 存在,且 $0<s<1$,则必须满足
$$\begin{cases}\Delta=k^2p^2-4kq>0,\\ 0<\dfrac{kp-\sqrt{k^2p^2-4kq}}{2}<1.\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}p^2>\dfrac{4q}{k},\\ p>q>0.\end{cases} \quad ①$$

显然,满足这样条件的整数 $p,q$ 是存在的,从而 $r,s$ 是存在的.

为使 $r$ 是无理数,只要 $k^2p^2-4kq$ 不是平方数就可以了,为此设 $q=k$,则
$$\Delta=k^2p^2-4kq$$

$$= k^2(p^2 - 4).$$

因为 $p > q$，所以 $p^2 > 4$.



显然，$p^2 - 4$ 不是平方数，否则若

$$p^2 - 4 = u^2,$$

则

$$(p + u)(p - u) = 4,$$

这是不可能的.

于是，对任意自然数 $k$，我们选择 $q = k$，$p$ 满足条件①，则存在 $r$ 和 $s$，使 $r + s$ 与 $rs$ 都是整数，且能被 $k$ 整除，$r$ 是无理数，$0 < s < 1$.

于是 $r^m + s^m = [r^m] + 1 \equiv 0 \pmod{k}$.

14·62 证明：如果自然数 $A$ 不是完全平方数，则可找到自然数 $n$，使得 $A = \left[n + \sqrt{n} + \frac{1}{2}\right]$.

（圣彼得堡数学奥林匹克，1992 年）

**[证]** 令 $n = A - [\sqrt{A}]$.

我们证明 $n$ 即为所求.

记 $[\sqrt{A}] = x$，则有

$$x^2 < A < (x + 1)^2,$$

即

$$x^2 + 1 \leqslant A \leqslant x^2 + 2x,$$

$$x^2 - x + 1 \leqslant A - x \leqslant x^2 + x.$$

由于 $A - x = n$，于是有

$$\sqrt{x^2 - x + 1} \leqslant \sqrt{n} \leqslant \sqrt{x^2 + x},$$

从而

$$\sqrt{x^2 - x + 1} + \frac{1}{2} \leqslant \sqrt{n} + \frac{1}{2} \leqslant \sqrt{x^2 + x} + \frac{1}{2},$$

$$x \leqslant \sqrt{x^2 - x + 1} + \frac{1}{2} \leqslant \sqrt{n} + \frac{1}{2} \leqslant \sqrt{x^2 + x} + \frac{1}{} < x + 1.$$

此不等式表明

$$\left[\sqrt{n} + \frac{1}{2}\right] = x,$$

即有

$$\left[n + \sqrt{n} + \frac{1}{2}\right] = n + x = A.$$

14·63 求证 当且仅当存在某个正整数 $k$，使得 $n = 2^{k-1}$ 时，

$2^{n-1}$ 能整除 $n!$.

（第 17 届加拿大数学竞赛，1985 年）

［证］ 对于任意给定的正整数 $n$，总可以找到正整数 $k$，使得

$$2^{k-1} \leqslant n < 2^k. \qquad ①$$

因此，$n!$ 中含有因子 2 的个数 $m$ 为

$$m = \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{2^2}\right] + \left[\frac{n}{2^3}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{2^{k-1}}\right],$$

由函数 $[x]$ 的性质

$$[x] + [y] \leqslant [x + y]$$

可得

$$\begin{aligned} m &\leqslant \left[n\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{k-1}}\right)\right] \\ &= \left[n\left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}\right)\right] \\ &= \left[n - \frac{n}{2^{k-1}}\right]. \end{aligned}$$

由于 $1 \leqslant \frac{n}{2^{k-1}} < 2$，可知

$$m \leqslant \left[n - \frac{n}{2^{k-1}}\right] \leqslant n - 1. \qquad ②$$

如果 $2^{n-1}$ 能整除 $n!$，由 ② 式可知，必须

$$m = n - 1.$$

再由 ① 式知有 $\frac{n}{2^{k-1}} = 1$，即 $n = 2^{k-1}$.

反之，如果 $n = 2^{k-1}$，由 $m$ 的定义知

$$\begin{aligned} m &= 2^{k-2} + 2^{k-3} + \cdots + 2 + 1 \\ &= 2^{k-1} - 1 \\ &= n - 1. \end{aligned}$$

即 $n!$ 中有 $n-1$ 个因数 2，从而 $2^{n-1}$ 能够整除 $n!$.

14·64 设 $\alpha = \frac{r}{s}$，这里 $r, s$ 是正整数，且 $r > s$，$(r, s) = 1$，令集合 $N_\alpha = \{[n\alpha] \mid n = 1, 2, \cdots\}$. 求证对任何 $m \in N_\alpha$，$r \nmid m + 1$.

（中国安徽省数学奥林匹克学校集训试题，1989 年）

［证］ 分两种情况讨论：

(1) 若 $s=1$,则 $\alpha$ 为正整数,

$$N_\alpha=\{rn \mid n=1,2,\cdots\}$$



因为 $r>1$,则

$$\begin{aligned} r &\nmid rn+1 \\ &= m+1, \end{aligned}$$

结论显然成立.

(2) 若 $s>1$,因为 $\frac{r}{s}>1$,所以

$$1\leqslant\left[\frac{r}{s}\right]<\left[\frac{2r}{s}\right]<\cdots<\left[\frac{(s-1)r}{s}\right]=\left[r-1+\frac{s-r}{s}\right]<r-1. \qquad ①$$

任取 $m=[n_0\alpha]\in N_\alpha$,令

$$n_0=qs+k \quad (0\leqslant k\leqslant s-1).$$

$$\begin{aligned}[n_0\alpha]&=\left[(qs+k)\cdot\frac{r}{s}\right]\\ &=[qr+k\alpha]\\ &=qr+[k\alpha].\end{aligned}$$

$$m+1=[n_0\alpha]+1=qr+1+[k\alpha]. \qquad ②$$

由不等式 ①

$$0\leqslant[k\alpha]<r-1,$$
$$1\leqslant[k\alpha]+1<r.$$

则由 ②

$$qr+1\leqslant m+1<(q+1)r=qr+r.$$

所以 $\qquad r\nmid m+1.$

**14·65** 设 $S(x)$ 表示数列 $\{[nx]\}_{n\in N}$,证明方程

$$x^3-10x^2+29x-25=0$$

有相异的两实根 $\alpha,\beta$,使 $S(\alpha)\cap S(\beta)$ 中有无穷多个正整数.

(中国国家集训队训练题,1990 年)

**[证]** 记 $f(x)=x^3-10x^2+29x-25$,则

$$f(1)=-5<0,\quad f(2)=1>0,$$
$$f(2)=1>0,\quad f(3)=-1<0,$$
$$f(5)=-5<0,\quad f(6)=5>0.$$

于是，方程 $f(x)=x^3-10x^2+29x-25=0$

在区间(1,2),(2,3),(5,6) 中各有一根，设这三个实根为 $\alpha,\beta,\gamma$，则

$$\alpha>0,\quad \beta>0,\quad \gamma>0,$$

且
$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{29}{25}.$$

若用 $S'(\alpha),S'(\beta),S'(\gamma)$ 表示 $S(\alpha),S(\beta),S(\gamma)$ 中小于或等于 $M$($M$ 为任意给定的自然数) 的数的集合，则

$$|S'(\alpha)|=\left[\frac{M}{\alpha}\right],\quad |S'(\beta)|=\left[\frac{M}{\beta}\right],\quad |S'(\gamma)|=\left[\frac{M}{\gamma}\right],$$

$$|S'(\alpha)\cap S'(\beta)|+|S'(\beta)\cap S'(\gamma)|+|S'(\alpha)\cap S'(\gamma)|$$
$$\geqslant|S'(\alpha)|+|S'(\beta)|+|S'(\gamma)|-M$$
$$>M\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}-1\right)-3$$
$$>\frac{4}{25}M-3.$$

由此可得，当 $M$ 趋向于无穷时，① 式中的三项中必有一项趋于无穷. 所以，必有满足方程的两实根(不妨设为 $\alpha,\beta$)，使 $S(\alpha)\cap S(\beta)$ 中有无穷多个自然数.

14·66　设正无理数 $x$ 与 $y$ 满足 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$.

求证两数列 $[x],[2x],\cdots,[nx],\cdots$ 与 $[y],[2y],\cdots,[ny],\cdots$ 合在一起恰好不重复地构成自然数集.

(第 20 届美国普特南数学竞赛，1959 年)

**[证]**　易知 $x>1,y>1$，则必有

$$[(k+1)x]-[kx]>1,$$
$$[(k+1)y]-[ky]>1,$$

从而可知数列

$$[x],\quad [2x],\quad \cdots,\quad [nx],\cdots \qquad ①$$
$$[y],\quad [2y],\quad \cdots,\quad [ny],\cdots \qquad ②$$

都是严格递增的.

假定存在某个整数 $p$ 在数列①和②中重复出现，那么必定存在两个整数 $a$ 与 $b$，使得

$$p=[ax]=[by],$$

即
$$p<ax<p+1,$$

$$p < by < p+1.$$

因为 $x$ 和 $y$ 都是无理数，则上面两个不等式中不可能有等号出现.

由此推得

$$p = \frac{p}{x} + \frac{p}{y} < a+b < \frac{p+1}{x} + \frac{p+1}{y} = p+1.$$

这时就出现在相邻整数 $p$ 和 $p+1$ 之间还有整数 $a+b$ 的情形，这是不可能的.

因此，在数列 ① 和 ② 中决不会有相同的整数.

再假定存在某个整数 $p$ 在数列 ① 与 ② 中都不出现，那么也会存在两个整数 $a$ 与 $b$，使得

$$ax < p < p+1 < (a+1)x,$$
$$by < p < p+1 < (b+1)y.$$

由此可推得

$$\frac{a}{p} + \frac{b}{p} < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 < \frac{a+1}{p+1} + \frac{b+1}{p+1},$$

即
$$a+b < p < p+1 < a+b+2.$$

这时，在数 $a+b$ 与 $a+b+2$ 之间出现了两个整数，这是不可能的.

因此不可能在数列 ①，② 中有某个整数不出现.

由以上，本题得证.

**14·67** 若 $n$ 历遍所有正整数. 证明 $f(n) = \left[n + \sqrt{\frac{n}{3}} + \frac{1}{2}\right]$ 历遍除数列 $a_n = 3n^2 - 2n$ 的项之外的所有正整数.

（第 29 届国际数学奥林匹克候选题，1988 年）

**[证 1]** 令 $k = \left[\sqrt{\frac{n}{3}} + \frac{1}{2}\right]$，则

$$f(n) = \left[n + \sqrt{\frac{n}{3}} + \frac{1}{2}\right] = n + \left[\sqrt{\frac{n}{3}} + \frac{1}{2}\right] = n + k.$$

正整数 $k$ 满足

$$k \leqslant \sqrt{\frac{n}{3}} + \frac{1}{2} < k+1.$$

于是 $\quad k+2 > \sqrt{\frac{n}{3}} + 1 + \frac{1}{2} > \sqrt{\frac{n+1}{3}} + \frac{1}{2} \geqslant k.$

$$f(n+1) = \left[n+1+\sqrt{\frac{n+1}{3}} + \frac{1}{2}\right] = n+1+\left[\sqrt{\frac{n+1}{3}} + \frac{1}{2}\right]$$

$$=\begin{cases} n+k+1, & 若\sqrt{\dfrac{n+1}{3}}+\dfrac{1}{2}<k+1, \\ n+k+2, & 若\sqrt{\dfrac{n+1}{3}}+\dfrac{1}{2}\geqslant k+1. \end{cases}$$

若不发生$\sqrt{\dfrac{n+1}{3}}+\dfrac{1}{2}\geqslant k+1$的情况，$f(n)$随$n$的增加逐次增加1.

发生$\sqrt{\dfrac{n+1}{3}}+\dfrac{1}{2}\geqslant k+1$的情况，$f(n)$跳过1个自然数$n+k+1$.由于

$$\sqrt{\frac{n+1}{3}}+\frac{1}{2}\geqslant k+1\geqslant\sqrt{\frac{n}{3}}+\frac{1}{2}$$

$$\Longleftrightarrow n+1\geqslant 3\left(k+\frac{1}{2}\right)^2>n$$

$$\Longleftrightarrow n+1\geqslant 3k^2+3k+\frac{3}{4}>n$$

$$\Longleftrightarrow n=3k^2+3k.$$

所以$f(n)$跳过的数为

$$\begin{aligned} n+k+1 &= 3k^2+3k+k+1 \\ &= 3(k+1)^2-2(k+1) \\ &= a_{k+1}. \end{aligned}$$

又$f(1)=2$.

所以$f(n)$历遍除数列

$$a_1=1,\quad a_2=8,\quad \cdots,\quad a_k=3k^2-2k,\cdots$$

之外的所有自然数.

**[证2]** 设$m$为自然数.

在区间$(0,m)$中，$f(n)$的个数即为满足不等式

$$n+\sqrt{\frac{n}{3}}+\frac{1}{2}<m$$

的$n$的个数.因此有

$$m-1-\left[\frac{1+\sqrt{3m-\dfrac{5}{4}}}{3}\right] \qquad ①$$

个$f(n)\in(0,m)$.

同样,在区间$(0,m)$中,有

$$\left[\frac{1+\sqrt{3m-2}}{3}\right] \tag{②}$$

个$a_n$(这可从不等式$3n^2-2n\leqslant m-1$解出).

由于

$$0<\sqrt{3m-\frac{5}{4}}-\sqrt{3m-2}=\frac{2-\frac{5}{4}}{\sqrt{3m-\frac{5}{4}}+\sqrt{3m-2}}<1,$$

所以

$$\left[\frac{1+\sqrt{3m-\frac{5}{4}}}{3}\right]=\left[\frac{1+\sqrt{3m-2}}{3}\right], \tag{③}$$

于是由①,②,③,在区间$(0,m)$内,$f(n)$与$a_n$的个数一共有$m-1$个.

在区间$(0,m+1)$内,$f(n)$与$a_n$的个数一共有$m$个值.

因此,在区间$[m,m+1)$内恰有一个$f(n)$或一个$a_n$.即对自然数$m$,或者

$$f(n)=m,$$

或者

$$a_n=m.$$

但两者不能同时成立.

于是$f(n)$历遍除$a_n$之外的所有正整数.

14·68　对实数$x,y$,令

$$S(x,y)=\{s\mid s=[nx+y],\quad n\in N\}.$$

证明若$r>1$为有理数,则存在实数$u,v$,使得

$$S(r,0)\cap S(u,v)=\varnothing,$$
$$S(r,0)\cup S(u,v)=N.$$

(第26届国际数学奥林匹克候选题,1985年)

[证]　设$r=\dfrac{p}{q}$,$p,q\in N$,　$p>q$,则

$$u=\frac{p}{p-q}\text{ 及适合 }-\frac{1}{p-q}\leqslant v<0\text{ 的 }v,\text{即为所求}.$$

(1) 如果$S(r,0)\cap S(u,v)\neq\varnothing$,则存在一个$k$是$S(r,0)$与$S(u,v)$的公共元素,即

$$k=[nr]=[mu+v].$$

因为 $r=\frac{p}{q}$，且 $k=[\frac{np}{q}]$，则

$$\frac{np}{q}=k+\left\{\frac{np}{q}\right\},0\leqslant\left\{\frac{np}{q}\right\}<1.$$

即有 $np=kq+c,\quad 0\leqslant c\leqslant q-1.$ ①

又由 $k=[mu+v]=\left[\frac{mp}{p-q}+v\right]$，则

$mp+v(p-q)=k(p-q)+d,0\leqslant d<p-q.$ ②

① + ② 可得

$$(m+n)p+v(p-q)=kp+c+d. \quad ③$$

因为 $-\frac{1}{p-q}\leqslant v<0,p>q$，则

$$v(p-q)<0.$$

又 $c+d\geqslant 0,$

于是由 ③ 式得

$$k<m+n. \quad ④$$

另一方面，由 $-\frac{1}{p-q}\leqslant v$ 及 ①，② 得

$$v(p-q)\geqslant -1,c+d<p-1.$$

则由 ③ 式得

$$\begin{aligned}(m+n)p&=kp-v(p-q)+(c+d)\\&<kp+1+p-1\\&=(k+1)p.\end{aligned}$$

从而 $m+n<k+1.$ ⑤

④ 式与 ⑤ 式矛盾，

所以 $S(r,0)\cap S(u,v)=\varnothing.$

(2) 在 $n>m$ 时，

$$[nr]>[mr],(\text{因为 } r>1),$$
$$[nu+v]>[mu+v].$$

所以，在 $S(u,v)$ 中没有相同的元素.

从而 $S(u,v)\cap\{1,2,\cdots,k-1\}$ 的元素个数等于满足 $[mu+v]<k$ 的 $m$ 的最大值 $m_1$，即 $m_1$ 满足

$$\begin{cases} m_1 u + v < k, \\ (m_1+1)u + v \geqslant k. \end{cases}$$

解得 $$\frac{k-v}{u} - 1 \leqslant m_1 < \frac{k-v}{u},$$

即 $$\frac{u+v-k}{u} \geqslant -m_1 > -\frac{k-v}{u}.$$

所以 $$m_1 = -\left[\frac{u+v-k}{u}\right].$$

同样，$S(r,0) \cap \{1,2,\cdots,k-1\}$ 的元素个数 $n_1$ 满足(此时 $u=r$，$v=0$)

$$n_1 = -\left[\frac{r-k}{r}\right].$$

于是有

$$\begin{aligned} -m_1 - n_1 &\leqslant \frac{u+v-k}{u} + \frac{r-k}{r} \\ &= 2-k+\frac{v(p-q)}{p} \\ &< 2-k. \end{aligned}$$

所以 $$m_1 + n_1 > k-2,$$

即 $$m_1 + n_1 \geqslant k-1.$$

又由于 $S(u,v) \cap S(r,0) = \varnothing$，所以得

$(S(u,v) \cup S(r,0)) \cap \{1,2,\cdots,k-1\} = \{1,2,\cdots,k-1\}$.

此式对所有的 $k$ 均成立.

因此 $$S(u,v) \cup S(r,0) = N.$$

14·69 设 $\{x\}$ 表示不小于实数 $x$ 的最小整数，则

$$\{\log_2 1\} + \{\log_2 2\} + \{\log_2 3\} + \cdots + \{\log_2 1991\}$$

的值等于多少？

(第2届“希望杯”数学竞赛，1991年)

[解] 由 $\{x\}$ 的定义

$\{\log_2 1\} = 0$,

$\{\log_2 2\} = 1$,

$\{\log_2 3\} = \{\log_2 4\} = 2$,

$\{\log_2 5\} = \{\log_2 6\} = \{\log_2 7\} = \{\log_2 8\} = 3$,

……

$$\{\log_2 513\} = \{\log_2 514\} = \cdots = \{\log_2 1024\} = 10,$$
$$\{\log_2 1025\} = \cdots = \{\log_2 1991\} = 11.$$

则所求的和为

$$0 + 1 + 2^1 \cdot 2 + 2^2 \cdot 3 + 2^3 \cdot 4 + \cdots + 2^9 \cdot 10 + 967 \cdot 11$$
$$= 19854.$$

**14·70** 求方程$[x^2 - 2x] = [x]^2 - 2[x]$的实数解.

(匈牙利数学奥林匹克,1990年)

**[解]** 设 $y = x - 1$,则

$$[y^2] = [x^2 - 2x + 1] = [x^2 - 2x] + 1,$$
$$[y]^2 = ([x] - 1)^2 = [x]^2 - 2[x] + 1.$$

于是
$$[y^2] = [y]^2.$$

(1) 当 $y \geqslant 0$ 时,则

$$y^2 \geqslant [y]^2 > y^2 - 1,$$

所以
$$[y] \leqslant y < \sqrt{1 + [y]^2},$$

即 $\quad x \in [n + 1, 1 + \sqrt{1 + n^2}), \quad n = 0, 1, 2, \cdots.$

(2) 当 $y < 0$ 时,则

$$[y]^2 \geqslant y^2 \geqslant [y^2],$$

所以必须 $y$ 为整数时,才能有

$$[y]^2 = [y^2].$$

即 $x = 0, -1, -2, \cdots.$

**14·71** 整数$\left[\dfrac{10^{93}}{10^{31} + 3}\right]$的末尾两位数字是多少?(先写十位数字,后写个位数字)

(中国高中数学联赛,1993年)

**[解]** 设 $10^{31} = t$,则

$$\left[\frac{10^{93}}{10^{31} + 3}\right] = \left[\frac{t^3}{t + 3}\right] = \left[\frac{t^3 + 3^3}{t + 3} - \frac{3^3}{t + 3}\right]$$

$$= t^2 - 3t + 3^2 + \left[-\frac{3^3}{t+3}\right]$$
$$= t^2 - 3t + 3^2 - 1$$
$$= t(t-3) + 8$$
$$= 10^{31}(10^{31} - 3) + 8.$$

所以$\left[\frac{10^{93}}{10^{31}+3}\right]$的末两位是08.

14·72　求方程 $4x^2 - 40[x] + 51 = 0$ 的所有实数解.

（加拿大数学奥林匹克,1999年）

**[解]**　因为$[x] \leqslant x$,

所以 $0 = 4x^2 - 40[x] + 51 \geqslant 4x^2 - 40x + 51$
$= (2x-3)(2x-17)$.

即　$\frac{3}{2} \leqslant x \leqslant \frac{17}{2}$.

于是$[x] = 1,2,3,4,5,6,7,8$.

当$[x]=1$时,方程化为 $4x^2 + 11 = 0$　无实数解.

当$[x]=2$时,方程化为 $4x^2 - 29 = 0$,

由$\frac{3}{2} \leqslant x \leqslant \frac{7}{2}$得　　$x = \frac{\sqrt{29}}{2}$.

当$[x]=3$时,可得 $x = \frac{\sqrt{69}}{2}$,与$[x]=3$矛盾,

当$[x]=4$时,可得 $x = \frac{\sqrt{109}}{2}$,与$[x]=4$矛盾,

当$[x]=5$时,可得 $x = \frac{\sqrt{149}}{2}$,与$[x]=5$矛盾,

当$[x]=6$时,可得 $x = \frac{\sqrt{189}}{2}$,此时$\left[\frac{\sqrt{189}}{2}\right]=6$,

因此,$x = \frac{\sqrt{189}}{2}$是方程的解.

当$[x]=7$时,可得 $x = \frac{\sqrt{229}}{2}$,此时$\left[\frac{\sqrt{229}}{2}\right]=7$,

因此,$x = \frac{\sqrt{229}}{2}$是方程的解.

当$[x]=8$时,可得 $x = \frac{\sqrt{269}}{2}$,此时$\left[\frac{\sqrt{269}}{2}\right]=8$,

因此，$x=\frac{\sqrt{269}}{2}$是方程的解.

由以上，题设方程的解集为$\left\{\frac{\sqrt{29}}{2},\frac{\sqrt{189}}{2},\frac{\sqrt{229}}{2},\frac{\sqrt{269}}{2}\right\}$.

**14·73** 求满足方程$\left[\frac{a}{2}\right]+\left[\frac{a}{3}\right]+\left[\frac{a}{5}\right]=a$的实数$a$.

（加拿大数学奥林匹克，1998 年）

［解］ 由$x-1<[x]\leqslant x$，可得

$$a>\left(\frac{a}{2}-1\right)+\left(\frac{a}{3}-1\right)+\left(\frac{a}{5}-1\right)$$
$$=\frac{31}{30}a-3.$$
$$a\leqslant\frac{a}{2}+\frac{a}{3}+\frac{a}{5}=\frac{31}{30}a$$

即 $\frac{31}{30}a-3<a\leqslant\frac{31}{30}a$

所以 $0\leqslant a<90$.

又$a$是非负整数，故有

$$a\geqslant\left(\frac{a}{2}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{a}{3}-\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{a}{5}-\frac{4}{5}\right)=\frac{31}{30}a-\frac{59}{30},$$

因而 $a\leqslant59$.

由题设可知 $\frac{a}{2}-\left\{\frac{a}{2}\right\}+\frac{a}{3}-\left\{\frac{a}{3}\right\}+\frac{a}{5}-\left\{\frac{a}{5}\right\}=a$,

即 $$\left\{\frac{a}{2}\right\}+\left\{\frac{a}{3}\right\}+\left\{\frac{a}{5}\right\}=\frac{1}{30}a.\qquad(※)$$

由于 $\left\{\frac{a}{2}\right\}=0,\frac{1}{2}$,

又 $\left\{\frac{a}{3}\right\}=0,\frac{1}{3},\frac{2}{3}$,

且 $\left\{\frac{a}{5}\right\}=0,\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5}$.

(※)式共有$2\times3\times5=30$个结果.

又 $15i+10j+6k\ (i=0,1;j=0,1,2;k=0,1,2,3,4)$是方程的解，

所以 $a=15i+10j+6k\ (i=0,1;j=0,1,2;k=0,1,2,3,4)$

**14·74** 对实数$x$，$[x]$表示不超过$x$的最大整数.求使

$[\log_2 1]+[\log_2 2]+[\log_2 3]+\cdots+[\log_2 n]=1994$

成立的正整数 $n$.

（第12届美国数学邀请赛，1994年）

**[解]** 令 $S_n=\sum_{i=1}^{n}[\log_2 i]$.

注意到，对非负整数 $k$，有 $2^k$ 个正整数 $x$，使 $[\log_2 x]=k$，即 $x=2^k,2^k+1,\cdots,2^{k+1}-1$.

所以，对正整数 $r$，有

$$\begin{aligned}S_{2^r-1}&=0+(1+1)+(2+2+2+2)+\cdots\\&\quad+\underbrace{[(r-1)+(r-1)+\cdots+(r-1)]}_{2^{r-1}\text{个}}\\&=1\cdot 2+2\cdot 2^2+\cdots+(r-1)\cdot 2^{r-1}\\&=(r-1)\cdot 2^r-(2^r-2)\\&=(r-2)\cdot 2^r+2\end{aligned}$$

令 $r=8$，得 $S_{255}=1538<1994$，

令 $r=9$，得 $S_{511}=3586>1994$.

因此，如果 $S_n=1994$，那么 $2^8-1<n<2^9-1$，

$$\begin{aligned}1994&=S_n=S_{255}+(n-255)\cdot 8\\&=1538+8n-255\times 8=8n-502.\end{aligned}$$

所以 $n=312$.

**14·75** 求满足下式的所有自然数 $a$ 和 $b$：$\left[\frac{a^2}{b}\right]+\left[\frac{b^2}{a}\right]=\left[\frac{a^2+b^2}{ab}\right]+ab$.

（第37届国际数学奥林匹克预选题，1996年）

**[解]** 由对称性，不妨设 $a\leqslant b$.

由 $x-1<[x]\leqslant x$，

有 $\frac{b^2}{a}+\frac{a^2}{b}-2<\left[\frac{a^2}{b}\right]+\left[\frac{b^2}{a}\right]\leqslant\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}$，

及 $ab+\frac{a^2+b^2}{ab}-1<\left[\frac{a^2+b^2}{ab}\right]+ab\leqslant\frac{a^2+b^2}{ab}+ab$，

即 $$-1<\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}-\frac{a^2+b^2}{ab}-ab<2,$$

或 $$-ab<a^3+b^3-a^2-b^2-a^2b^2<2ab,$$

整理得 $$\begin{cases}b^3-(a^2+1)b^2-2ab+a^3-a^2<0, & ①\\ b^3-(a^2+1)b^2+ab+a^3-a^2>0. & ②\end{cases}$$

先考虑①式,

若 $b\geqslant a^2+2$,则

$$
\begin{aligned}
&b^3-(a^2+1)b^2-2ab+a^3-a^2\\
&=b\left[b(b-a^2-1)-2a\right]+a^3-a^2\geqslant b(b-2a)+a^3-a^2\\
&=(b-a)^2+a^3-2a^2\geqslant(a^2-a+2)^2+a^3-2a^2\\
&=(a^2-a+2)^2-a^2+a^2(a-1)\\
&=(a^2+2)(a^2-2a+2)+a^2(a-1)>0.
\end{aligned}
$$

与①式矛盾. $b\geqslant a^2+2$ 不真,于是 $b\leqslant a^2+1$.

再考虑②式,

设 $f(x)=x^3-(a^2+1)x^2+ax+a^3-a^2$.

当 $a\geqslant 2$ 时,有 $f(-a)=-a^3-(a^2+1)a^2-a^2+a^3-a^2<0$,

又 $f(0)=a^3-a^2>0$,

且 $f(a)=a^2(-a^2+2a-1)<0$,

而 $f(a^2)=a^2(-a^2+2a-1)<0$,

同时 $f(a^2+1)=a(2a^2-a+1)>0$.

因此,方程 $f(x)=0$ 的三个根在区间 $(-a,0)$,$(0,a)$,$(a^2,a^2+1)$中各有一个.

故,当 $a\leqslant b\leqslant a^2$ 时,有 $f(b)<0$. 与②式矛盾. 于是 $b\geqslant a^2+1$.

当 $a=1$ 时,②式化为 $b^3-2b^2+b>0$,

即 $b(b-1)^2>0$ ,所以 $b\geqslant 2=a^2+1$.

总之,若②式成立,则 $b\geqslant a^2+1$.

综上,只能有 $b=a^2+1$.

将 $b=a^2+1$ 代入原式得

$$\left[\frac{a^2}{a^2+1}\right]+\left[\frac{a^4+2a^2+1}{a}\right]=\left[\frac{a^2+1}{a}+\frac{1}{a^2+1}\right]+a(a^2+1).$$

当 $a\geqslant 2$ 时,上式化为 $a^3+2a=a+a(a^2+1)$,这是一个恒等式.

当 $a=1$ 时,上式化为

$$\left[\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{1+2+1}{1}\right]=\left[\frac{2}{1}+\frac{1}{2}\right]+(1+1)$$

此时显然成立.

因此,$a\leqslant b$ 时,原方程的所有解为

$$b=a^2+1,a\in N.$$

数论卷

同理,$b\leqslant a$ 时,原方程的所有解为

$$a=b^2+1,b\in N.$$

因此,原方程的所有解为

$$b=a^2+1,a\in N \quad 或 a=b^2+1,b\in N.$$

14·76 设 $p_1,p_2,p_3,\cdots$是依递增次序排列的素数,$x_0$ 是 0 与 1 之间的实数.对正整数 $k$,定义

$$x_k=\begin{cases}0, & 若 x_{k-1}=0\\ \left\{\dfrac{p_k}{x_{k-1}}\right\}. & 若 x_{k-1}\neq 0\end{cases}$$

这里$\{x\}$表示 $x$ 的小数部分.求出一切 $x_0$ 满足 $0<x_0<1$ 且使数列 $x_0,x_1,x_2,\cdots$中最终出现 0,并加以证明.

(第 26 届美国数学奥林匹克,1997 年)

[解] 我们证明,该数列最终出现 0,当且仅当 $x_0$ 为有理数.

首先,我们证明对 $k\geqslant 1$,若 $x_k$ 为有理数,则它的前一项 $x_{k-1}$也是有理数.

若 $x_k=0$(为有理数),则由题设定义,或者有 $x_{k-1}=0$,或者有$\dfrac{p_k}{x_{k-1}}$为正整数,从而 $x_{k-1}$为有理数.

若 $x_k$ 为非零有理数,那么由

$$x_k=\left\{\frac{p_k}{x_{k-1}}\right\}=\frac{p_k}{x_{k-1}}-\left[\frac{p_k}{x_{k-1}}\right]$$

可得 $$x_{k-1}=\frac{p_k}{x_k+\left[\dfrac{p_k}{x_{k-1}}\right]}.$$

于是 $x_{k-1}$也是有理数.

由以上结论可知,对某个 $k$,若 $x_k$ 是有理数,特别地,若数列最终出现 0,那么 $x_0$ 也是有理数.

现设 $x_0$ 为有理数,那么数列 $x_0,x_1,x_2,\cdots$为有理数列.

若 $x_{k-1}=\dfrac{m}{n}$, $0<m<n$,那么

$$x_k=\left\{\frac{p_k}{\dfrac{m}{n}}\right\}=\left\{\frac{n\cdot p_k}{m}\right\}=\frac{r}{m},0<r<m.$$

这里 $r$ 是 $np_k$ 除以 $m$ 的余数.

所以,数列 $\{x_k\}$ 的每一个非零项的分母严格地小于前一项的分母,从而非零项的个数不超过 $x_0$ 的分母.

因此,数列 $\{x_k\}$ 最终必出现 0.

14·77 设非负整数列 $a_1,a_2,\cdots,a_{1997}$ 满足 $a_i+a_j\leqslant a_{i+j}\leqslant a_i+a_j+1$ 对所有 $i,j\geqslant 1,i+j\leqslant 1997$.

**证明** 存在惟一实数 $x$,使得对一切 $n=1,2,\cdots,1997,a_n=[nx]$.

(第 26 届美国数学奥林匹克,1997 年)

**[证]** 若 $a_n=[nx]$ 存在,则

$$nx-1<a_n\leqslant nx<a_n+1,$$

因而 $\frac{a_n}{n}\leqslant x<\frac{a_n+1}{n}$. 即 $x\in\left(\frac{a_n}{n},\frac{a_n+1}{n}\right)$.

我们取定 $x=\max\frac{a_n}{n}$,则只需证明对于一切 $1\leqslant m\leqslant 1997$, $\frac{a_n}{n}\leqslant x<\frac{a_m+1}{m}$,

即
$$\frac{a_n}{n}<\frac{a_m+1}{m},$$

因而
$$na_m+n>ma_n. \qquad (*)$$

我们用数学归纳法证明(※)式.

当 $m=n=1$ 时,(※)式成立.

假设 $m,n$ 均小于 $k$ 时,(※)式成立.

当 $m,n$ 中较大的一个为 $k$ 时,有两种情况:

(1)当 $n=k$ 时. 设 $n=qm+r,q\in N,0\leqslant r\leqslant m$.

由已知不等式有

$$a_n\leqslant a_{qm}+a_r+1\leqslant a_{(q-1)m}+a_m+a_r+2$$
$$\leqslant\cdots\leqslant qa_m+a_r+q,$$

又由归纳假设 $ra_m+r>ma_r$,

于是
$$\begin{aligned}ma_n&\leqslant mqa_m+ma_r+qm\\&<mqa_m+ra_m+r+qm\\&=(mq+r)a_m+(mq+r)\\&=na_m+n.\end{aligned}$$

所以,(※)式成立.

(2)当 $m=k$ 时,设 $m=qn+r, q\in N, 0\leqslant r<m$.

由已知不等式有

$$a_m=a_{qn+r}\geqslant a_{qn}+a_r\geqslant a_{(q-1)n}+a_n+a_r$$
$$\geqslant\cdots\geqslant qa_n+a_r.$$

则 $na_m\geqslant nqa_n+na_r$,

而 $na_m+n\geqslant nqa_n+na_r+n$

$$=(m-r)a_n+na_r+n=ma_n+na_r+n-ra_n,$$

由归纳假设 $na_r+n>ra_n$

于是 $na_m+n\geqslant ma_n+na_r+n-ra_n>ma_n$.

所以,(※)式成立.从而本题得证.

14·78　确定所有的实数对$(a,b)$使得 $a[bn]=b[an]$对一切正整数 $n$ 成立.

（第 39 届国际数学奥林匹克预选题,1998 年）

**[解]** 令 $n=1$,得 $a[b]=b[a]$, ①

设 $a=[a]+\{a\}, b=[b]+\{b\}$,其中$\{a\},\{b\}$为 $a,b$ 的小数部分,则由已知有

$$a[[b]n+\{b\}n]=b[[a]n+\{a\}n],$$
$$a[b]n+a[\{b\}n]=b[a]n+b[\{a\}n],$$

由①得 $a[\{b\}n]=b[\{a\}n]$. ②

存在自然数 $k$,使$\{a\}<\frac{1}{k}$,令 $n=k$,由②得

$$a[k\{b\}]=0. \quad ③$$

若 $a\neq0$,则由③可得 $\{b\}<\frac{1}{k}$.

这就表明,当 $a$ 为整数(即$\{a\}=0$)时,$b$ 必为整数.

同样,若 $b\neq0$,且$\{b\}<\frac{1}{k}$,则$\{a\}<\frac{1}{k}$.

于是,当 $a,b$ 都不是整数时,存在 $k$,使得

$\frac{1}{k+1}\leqslant\{a\}<\frac{1}{k}$, $\frac{1}{k+1}\leqslant\{b\}<\frac{1}{k}$.

令 $n=k+1$,则

$1\leqslant n\{b\}<\frac{k+1}{k}<2$　$1\leqslant n\{a\}<\frac{k+1}{k}<2$

由②式可得　$a=b$.

由此可得,本题的解为

$(0,a),(a,0),(a,a)$(当 $a$ 为任意实数时)

$(a,b)$(当 $a,b$ 均为整数时).

# 第十五章　其　他

15·1　从 $1,2,\cdots,1982$ 中怎样划去最少个数的数，使余下的每一个数都不等于其中另两个数的积？划去的应是哪些数？

（第16届全苏数学奥林匹克，1982年）

［解］　划去 $2,3,4,\cdots,44$ 这43个数即可.

此时，除去1之外，任两数之积都大于 $45^2$，从而大于1982.

若划去任意42个数，必留下下面的三数组中的一个：

$(2,87,2\cdot 87),(3,86,3\cdot 86),\cdots,(t,89-t,t(89-t)),\cdots,(44,45,44\cdot 45)$，　$2\leqslant t\leqslant 44$.

因为当 $2\leqslant t\leqslant 44$ 时，函数 $t(89-t)$ 是严格增的，所以上面的三数组中的129个数互不相同，且均不超过

$$44\cdot 45=1980<1982.$$

于是43个数是划去的最少的数.

15·2　在 $\{1000,1001,\cdots,2000\}$ 中，两个连续整数相加而不进位的整数对有多少？

（第10届美国数学邀请赛，1992年）

［解］　令 $n$ 表示为 $\overline{1abc}$.

如果 $a,b,c$，中的一个是5,6,7或8，则 $n$ 与 $n+1$ 相加需要进位；

如果 $b=9,c\neq 9$，或者 $a=9,b$ 与 $c$ 至少有一个不是9，则 $n$ 与 $n+1$ 相加也需要进位.

如果 $n$ 不是上面所说的，那么它一定是下面的几种形式之一：

$$\overline{1abc},\ \overline{1ab9},\ \overline{1a99},\ 1999.$$

其中 $a,b,c\in\{0,1,2,3,4\}$.

对这样的 $n$， $n$ 与 $n+1$ 相加时不需要进位，所以共有

$$5^3+5^2+5+1=156 \text{ 对}.$$

15·3　非负整数有序数对$(m,n)$，若在求和 $m+n$ 时无需进位（十进制下），则称它为“简单”的.求所有和为 1492 的简单的非负整数有序数对的个数.

（第 5 届美国数学邀请赛，1987 年）

［解］　因为在求和时没有进位，所以个位加至 2 的方法有三种：

$$0+2,\quad 1+1,\quad 2+0.$$

十位加至 9 的方法有十种：

$$0+9,\quad 1+8,\quad 2+7,\quad 3+6,\quad 4+5,$$
$$9+0,\quad 8+1,\quad 7+2,\quad 6+3,\quad 5+4.$$

百位加至 4 的方法有五种：

$$0+4,\quad 1+3,\quad 2+2,\quad 3+1,\quad 4+0.$$

千位加至 1 的方法有二种：

$$0+1,\quad 1+0.$$

从而，所有和为 1492 的简单非负整数有序数组总数为

$$2\cdot 5\cdot 10\cdot 3=300.$$

15·4　我们注意到 $6!=8\cdot 9\cdot 10$.试求能使 $n!$ 表示成 $n-3$ 个连续自然数之积的最大的正整数 $n$.

（第 8 届美国数学邀请赛，1990 年）

［解］　$n!=n(n-1)(n-2)\cdots 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$
$\qquad=24n(n-1)(n-2)\cdots 5.$

此时 $24n(n-1)(n-2)\cdots 5$ 应是 $n-3$ 个连续自然数之积，所以可以得到 $n=23$.

下面证明 $n=23$ 是符合题目条件的最大的正整数 $n$.

若 $n>23$，则

$$n!=24n(n-1)\cdots 5<(n+1)n(n-1)\cdots 5.$$

而 $$n!>n(n-1)(n-2)\cdots 5\cdot 4.$$

因此有

$$n(n-1)\cdots 5\cdot 4<n!<(n+1)n(n-1)\cdots 5.$$

即 $n!$ 介于两个相继的 $n-3$ 个连续自然数之积之间，所以 $n!$ 不能表示成 $n-3$ 个连续自然数之积.

而 $n=23$ 时，显然有

$$23! = 24\cdot 23\cdot 22\cdot\cdots\cdot 6\cdot 5.$$



因此，所求的最大正整数 $n$ 为 23.

15·5　某州颁布由 6 个数字组成的车牌证号（由 0－9 的数字组成），该州规定任何两个牌号至少有两位数字不同（因此证号 $\boxed{027592}$ 和 $\boxed{020592}$ 不能都被使用）. 试决定车牌证号最多有多少个，给出证明.

（第 19 届美国数学奥林匹克，1990 年）

［解］　该州可以颁布 $10^5$ 个证号.

对满足条件的车牌证号的数字可以采用下面的一种作法.

对每一个 5 位数节 $x_1x_2x_3x_4x_5$，我们用同余式

$$x_6 \equiv x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \pmod{10}$$

决定 $x_6$.

对于任何这样构造出的两个不同的数

$$\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6} \quad 和 \quad \overline{b_1b_2b_3b_4b_5b_6},$$

至少有一个数位 $1\leqslant j\leqslant 5$，使得 $a_j\neq b_j$. 若另四位数字均相同，则

$$\begin{aligned} a_6 - b_6 &\equiv (a_1+a_2+a_3+a_4+a_5) - (b_1+b_2+b_3+b_4+b_5) \\ &= a_j - b_j \not\equiv 0 \pmod{10}. \end{aligned}$$

因此 $a_6\neq b_6$，所以 $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$ 和 $\overline{b_1b_2b_3b_4b_5b_6}$ 至少有两位数字不同.

由于用 0,1,2,…,9 这十个数字组成的 5 位数共有 $10^5$ 个，于是任何两个按上面作法构造的六位数至少有两位数字不同，且共有 $10^5$ 个.

若有大于 $10^5$ 个牌号，则至少有两个牌号的前 5 位相同，因而它们只有一位数字不同，不符合该州的规定.

15·6　求证任何整数可表示为五个整数的立方和的形式.

（前苏联大学生数学竞赛，1977 年）

［证］　因为对一切整数 $n$，恒有

$$6n = (n+1)^3 + (-n)^3 + (-n)^3 + (n-1)^3.$$

即：能被 6 整除的任何整数都可以表示为四个整数的立方和的形式. 又因为

$$6n = 6n + 0^3,$$
$$6n + 1 = 6n + 1^3,$$
$$6n + 2 = 6(n - 1) + 2^3,$$
$$6n + 3 = 6(n - 4) + 3^3,$$
$$6n + 4 = 6(n + 2) + (-2)^3,$$
$$6n + 5 = 6(n + 1) + (-1)^3.$$

故任何整数都可以表示为五个整数的立方和的形式.

15·7　正整数 $a,b,c,d$ 满足

$$ab = cd,\quad a + b = c - d,$$

证明存在一个直角三角形,各边的长为整数,面积为 $ab$.

（第 30 届国际数学奥林匹克候选题,1989 年）

［证］　由已知等式得

$$\begin{aligned}&(a+d)(b+d)\\=&\ ab + d(a+b+d)\\=&\ ab + cd\\=&\ 2ab.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(a+d)^2 + (b+d)^2\\=&\ a^2 + b^2 + 2d(a+b+d)\\=&\ a^2 + b^2 + 2cd\\=&\ (a+b)^2.\end{aligned}$$

所以,以 $a+d, b+d$ 为直角边(这时斜边为 $a+b$)的直角三角形的各边均是整数,且面积为 $ab$.

15·8　试证对于任意给定的正整数 $n$,必有惟一的一对整数 $k$ 和 $l$, $0 \leqslant l < k$,使得 $n = \frac{1}{2}k(k-1) + l$.

（中国北京市高中数学竞赛,1964 年）

［证］　当 $k = 2,3,4,\cdots$ 时,$\frac{1}{2}k(k-1)$ 都是正整数,且数列

$$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot(2-1), \frac{1}{2}\cdot 3\cdot(3-1), \frac{1}{2}\cdot 4\cdot(4-1), \cdots$$

是无界递增数列.

对于任意正整数 $n$,上述数列中只有有限个数不大于 $n$,把这有限

个(不大于 $n$ 的)数中之最大者记作$\frac{1}{2}k(k-1)$,那么



$$\frac{1}{2}k(k-1)\leqslant n<\frac{1}{2}(k+1)k.$$

由此 $0\leqslant n-\frac{1}{2}k(k-1)<\frac{1}{2}(k+1)k-\frac{1}{2}k(k-1)=k.$

令 $l=n-\frac{1}{2}k(k-1)$,则 $0\leqslant l<k$,而

$$n=\frac{1}{2}k(k-1)+l.$$

可见,合乎要求的整数 $k$ 和 $l$ 是存在的.

下面证明合乎要求的整数对 $(k,l)$ 是惟一的.

设有 $(k_1,l_1)$ 和 $(k_2,l_2)$ 两对整数都合乎要求,假如 $k_1<k_2$,那么

$$\begin{aligned}n&=\frac{1}{2}k_1(k_1-1)+l_1\\&<\frac{1}{2}k_1(k_1-1)+k_1\\&=\frac{1}{2}(k_1+1)k_1\\&\leqslant\frac{1}{2}k_2(k_2-1)\\&\leqslant\frac{1}{2}k_2(k_2-1)+l_2=n.\end{aligned}$$

这个矛盾说明 $k_1$ 不会小于 $k_2$.同理,$k_2$ 不会小于 $k_1$.

于是 $k_1=k_2$,由此

$$\begin{aligned}l_1&=n-\frac{1}{2}k_1(k_1-1)\\&=n-\frac{1}{2}k_2(k_2-1)\\&=l_2.\end{aligned}$$

这就是说,$k_1,l_1$ 及 $k_2,l_2$ 这两对整数必定完全相同,即合乎要求的整数 $k,l$ 只有一对.

**15·9** 设 $n$ 是一个给定的大于2的自然数,而 $V_n$ 是一个形如 $1+kn$ 的数集(其中 $k=1,2,\cdots$).一个数 $m\in V_n$,如果不存在两个数 $p$, $q\in V_n$,使得 $pq=m$,则称 $m$ 为 $V_n$ 中的不可分解数.

试证明存在一个数 $r\in V_n$,这个数可用不只一种方式表示成数集

$V_n$ 中的几个不可分解数的乘积.

(第 19 届国际数学奥林匹克,1977 年)

**[证 1]** $V_n = \{1+n, 1+2n, \cdots, 1+kn, \cdots\}$.

其中 $n > 2$, $k = 1, 2, \cdots$.

因为 $n > 2$,所以,显然有

$$n-1 \notin V_n, \quad 2n-1 \notin V_n.$$

并且 $n-1$ 与 $2n-1$ 均不可能分解成几个 $V_n$ 中的数的乘积.由于

$$(n-1)(2n-1) = 1+(2n-3)n \in V_n,$$

$$(n-1)^2 = 1+(n-2)n \in V_n,$$

$$(2n-1)^2 = 1+4(n-1)n \in V_n.$$

于是$(n-1)(2n-1)$,$(n-1)^2$和$(2n-1)^2$都是$V_n$ 中的不可分解数.

设 $r = (n-1)^2(2n-1)^2$,则由于

$$\begin{aligned} r &= (n-1)^2(2n-1)^2 \\ &= 1+[n(2n-3)^2+2(2n-3)]n, \end{aligned}$$

可得 $r \in V_n$.

显然,$r$ 有如下两种方式表示为 $V_n$ 中不可分解数的乘积:

$$r = (n-1)^2 \cdot (2n-1)^2,$$

$$r = [(n-1)(2n-1)] \cdot [(n-1)(2n-1)].$$

由此可见,存在一个数 $r \in V_n$,它可以用至少两种方式表示为 $V_n$ 中几个不可分解数的乘积.

**[证 2]** 用狄里赫莱定理:

在任何一个等差数列中,如果公差与首项互素,那么这个数列就包含有无限多个素数.

考察等差数列

$$n-1, 2n-1, 3n-1, \cdots, kn-1, \cdots$$

显然,其首项 $n-1$ 与公差 $n$,有

$$(n-1, n) = 1.$$

于是由狄里赫莱定理,此数列中有无限多个素数.

从这无穷多个素数中选出四个素数:

$$k_1n-1, \quad k_2n-1, \quad k_3n-1, \quad k_4n-1.$$

显然,这四个素数中的任两个数的乘积均属于 $V_n$,并且 $k_in-1 \notin$

$V_n(i = 1,2,3,4)$.所以任两数之积都是 $V_n$ 中的不可分解数.

这样我们可以用三种不同的方式把数

$$r = \prod_{i=1}^{4}(k_i n - 1)$$

分解成 $V_n$ 中的不可分解数的乘积:

$$r = [(k_1 n - 1)(k_2 n - 1)]\cdot[(k_3 n - 1)(k_4 n - 1)],$$
$$r = [(k_1 n - 1)(k_3 n - 1)]\cdot[(k_2 n - 1)(k_4 n - 1)],$$
$$r = [(k_1 n - 1)(k_4 n - 1)]\cdot[(k_2 n - 1)(k_3 n - 1)].$$

15·10　一袋花生共有 1988 颗,一只猴子第一天拿走一颗花生,从第二天起,每天拿走的都是以前各天的总和.如果到某天袋里的花生少于已拿走的总数时,这一天它又从拿走一颗开始,按原定的规律进行新的一轮.如此继续下去,那么这袋花生被猴子拿光时是第几天?

(理科实验班入学数学复试,1989 年)

[解]　设猴子第一轮用了 $k$ 天,即第 $k+1$ 天时又从拿一颗花生开始.

这时,前 $k$ 天共拿走花生

$$1 + 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{k-2} = 2^{k-1}$$

颗,且满足　$1988 - 2^{k-1} < 2^{k-1}$.

若在第二轮用了 $t$ 天,则在第二轮拿走 $2^{t-1}$ 颗,并有

$$1988 - 2^{k-1} - 2^{t-1} < 2^{t-1},\quad t < k.$$

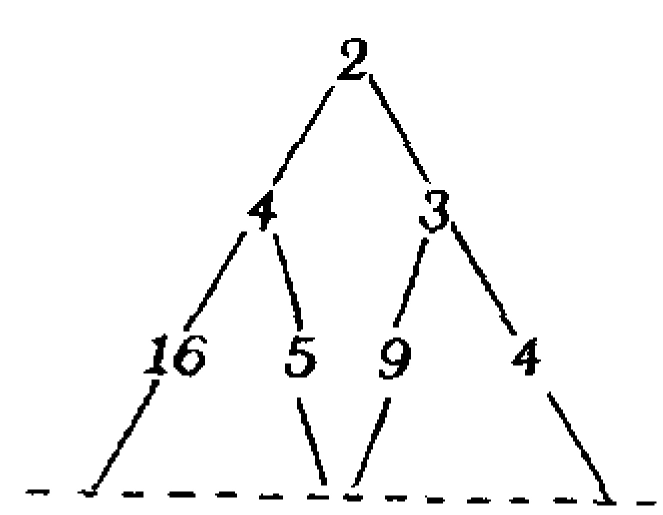
由此,只须把 1988 分解成 2 的幂的和,即

$$1988 = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^2.$$

所以,一共用了

$$(10+1)+(9+1)+(8+1)+(7+1)+(6+1)+(2+1)$$
$$= 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 3$$
$$= 48(天).$$

15·11　按以下规则作一个三角形的表格:在最上一行写着自然数 $a$,往下在每一个数 $k$ 的左下方写上 $k^2$,右下方写上 $k+1$.例如 $a=2$ 时,如图.证明在这个表格中每一横行中的所有的数都不相同.




(第 6 届全苏数学奥林匹克,1972 年)

[证]　假设在表格的某些行中有相同的数.设 $n$ 是这些行中最上

面那一行的行数,并设 $p$ 和 $q$ 是这一行中两个相同的数,即 $p = q$.

因为在第 $n-1$ 行中没有相同的数,而 $p,q$ 是第 $n-1$ 行中的数 $r$, $s$ 经过不同运算得来的.

设 $p = r^2$, $q = s+1$,则有

$$s = q - 1 = p - 1 = r^2 - 1.$$

设 $s$ 是由数 $a$ 经过若干次乘方运算及加 1 运算得到的.而进行平方运算的最大数不会大于 $r-1$,这是因为 $s = r^2 - 1$.

这就表明,数 $s$ 在进行了最后一次平方运算后,又至少进行了 $r^2 - 1 - (r-1)^2 = 2r - 2$ 步得到的,而且这些步都是加 1 运算.

于是从数 $a$ 得到 $s$ 至少需要 $2r-1$ 次,即 $n-2 \geqslant 2r-1$ 次运算得到.

但是 $r$ 和 $s$ 在同一行里,且由 $a$ 经过 $2r-1$ 次运算得到的任何数不小于 $a+2r-1 > r$.

于是由 $a$ 得到 $s$ 的过程中没有进行过乘方运算,这样由三角形表格的构造可知,$q = s+1$ 一定在第 $n$ 行中 最右边,最小的那个数,这就与 $p = q$ 矛盾.

因此,表格中任何一行都没有相同的数.

15·12 桌上放有两堆火柴,分别有 100 根和 252 根,两人轮流拿取火柴,每一次只能从其中一堆中取走火柴,且所取的根数应为另一堆火柴数目的约数,谁拿取最后一根火柴谁就获胜.试问,如果两人都采用正确的策略,那么谁将获胜 —— 是先拿的,还是其对手?

(列宁格勒数学奥林匹克,1988 年)

[解] 我们证明,先拿者必输.

对于每个自然数 $n$,用 $v(n)$ 表示使得 $n$ 可被 $2^k$ 整除的最大的整数 $k$,即

$$v(n) = \max\{k \mid 2^k \mid n,\quad k \in N\}.$$

如果在两人都拿过相同次数之后,两堆中分别剩有 $n$ 和 $m$ 根火柴,且 $v(n) = v(m)$,我们证明,在先拿者再拿一次之后,这一等式必被破坏.

设先拿者在第一堆中拿出 $r$ 根火柴,$r$ 是 $n$ 的约数,故有

$$v(r) \leqslant v(m) = v(n).$$

如果 $v(r) < v(n)$,则

$$v(n-r)<v(n)=v(m).$$

如果 $v(r)=v(n)$，则有

$$n=2^k n_1,\quad r=2^k r_1.$$

其中 $n_1$ 和 $r_1$ 均为奇数，从而 $n_1-r_1$ 为偶数，于是

$$2^{k+1}\mid n-r=2^k(n_1-r_1).$$

因此就有

$$v(n-r)\geqslant k+1>v(m).$$

综上即知，此时等式 $v(n)=v(m)$ 确被破坏.

如果在两人都拿过相同次数之后，两堆中分别剩有 $n$ 和 $m$ 根火柴，且 $v(n)\neq v(m)$，不妨设 $v(n)>v(m)$，若刚好轮到第二人拿，那么他就可从第一堆中取出 $r=2^{v(m)}$ 根火柴，使得等式 $v(n-r)=v(m)$ 成立，在下一步轮到先拿者拿火柴，由以上证明，等式 $v(n-r)=v(m)$ 将被破坏.

由于 $v(100)=v(252)=2$，故第二人总可以在他每次取过之后都保持等式 $v(n)=v(m)$ 成立，因此他必可获胜.

15·13　某整数集合既含有正整数，也含有负整数，而且如果 $a$ 和 $b$ 是它的元素，那么 $2a$ 和 $a+b$ 也是它的元素. 证明这个集合包含它的任意两个元素之差.

（匈牙利数学奥林匹克，1967 年）

[证]　设所给集合为 $A$.

我们首先证明：若 $c\in A,\quad n\in N$，则

$$nc\in A.$$

对 $n$ 用数学归纳法.

$n=1$ 时，$c\in A$，这由已知条件可得.

$n=2$ 时，由题设 $2c\in A$.

假设 $n=k$ 时有　　$kc\in A$.

那么由题设 $kc+c\in A$，于是

$$(k+1)c\in A.$$

于是对 $n\in N,\quad nc\in A$.

设 $a>0$ 是集合 $A$ 的最小正整数，$b<0$ 是 $A$ 的绝对值最小的负整数，则有

$$a+b\in A,$$

$$b < a + b < a.$$

由于 $A$ 中不含有小于$a$ 的正整数,也不含有大于 $b$ 的负整数,于是

$$a + b = 0, \quad b = - a,$$

因而 $0 \in A$.

于是集合 $A$ 包含元素 $a$ 的整数倍,即

$$\{ka, \quad a \in A, \quad k \in Z\} \subseteq A.$$

下面我们再证明,除了元素 $a$ 的整数倍之外,所研究的集合不包含其他元素.

假设在 $a$ 的两个连续整数倍$qa$ 与$(q+1)a$ 之间的元素$x$ 属于这个集合 $A$,于是

$$x = qa + r, \quad 0 < r < a.$$

这时由 $x \in A, qa \in A$,则

$$r = x + (-q)a \in A.$$

然而 $0 < r < a$,这与 $a$ 的选取矛盾.

于是 $A$ 是$a$ 的整数倍的集合

$$A = \{ka \mid a \in A, \quad k \in Z\}.$$

其中 $a$ 是$A$ 中的最小正整数.

由于 $A$ 中任意两个元素之差也是$a$ 的整数倍,因而也属于这个集合.

15·14　$S$ 是有理数$r$ 的集合,其中$0 < r < 1$,且 $r$ 有循环小数的展开形式为$\overline{0.abcabcabc\cdots} = \overline{0.\dot{a}b\dot{c}}$,　$a,b,c$ 不一定相异,在 $S$ 的元素中能写成最简分数的不同的分子有多少个?

(第 10 届美国数学邀请赛,1992 年)

[解]　因为$\overline{0.\dot{a}b\dot{c}} = \frac{\overline{abc}}{999}$,

又
$$999 = 3^3 \cdot 37.$$

如果$\overline{abc}$ 既不能被 3 整除也不被 37 整除,则分数就是最简形式.

由容斥原理,有

$$999 - \left(\frac{999}{3} + \frac{999}{37}\right) + \frac{999}{3 \cdot 37} = 648$$

个这样的数.

此外,还有形如$\frac{k}{37}$,其中自然数 $k$ 是小于 37 的 3 的倍数,这样的 $k$

有 3,6,9,…,36 共 12 个.

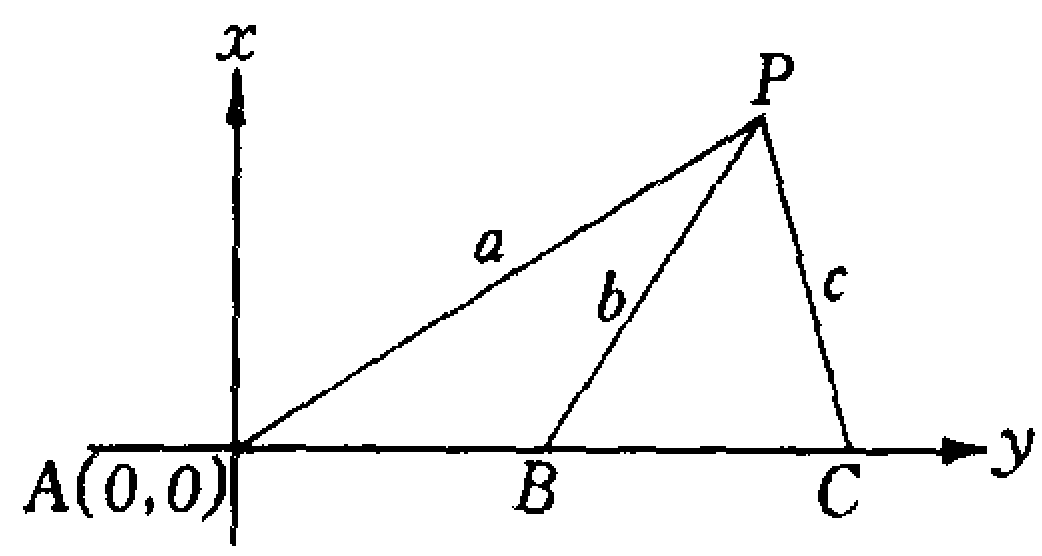
所以满足条件的分子有 648 + 12 = 660 个.



15·15　一个打纸洞机可以放在平面上任一点,当它操作时,可以把与它距离为无理数的点打掉,至少需要多少台打纸洞机,才能把平面上的所有点都打掉?

(第 51 届美国普特南数学竞赛,1990 年)

[解]　显然,两台打洞机是不够的.




下面证明三台打洞机足够.

例如,在直角坐标系中,把三台打洞机放在点 $A(0,0)$,$B(d,0)$,$C(2d,0)$,$d=\sqrt[4]{2}$.

设 $P$ 是平面上任一点,$P$ 到 $A,B,C$ 的距离分别为 $a,b,c$. 于是有

$$a^2+c^2=2b^2+2d^2,$$

即

$$a^2-2b^2+c^2=2\sqrt{2}.$$

$a,b,c$ 不可能都是有理数,所以 $P$ 点至少被一台打洞机打掉.

15·16　设 $N=\sum_{k=1}^{60}e_k k^{k^k}$,其中 $e_k=1$ 或 $-1$,$k=1,2,\cdots,60$. 证明 $N$ 不是一个整数的五次方.

(波兰数学竞赛,1991 年)

[证]　用反证法.

假设 $N$ 是某个整数的五次方.

不妨设 $e_{60}=1$,否则 $e_{60}=-1$,可考虑 $-N$. 令

$$x=(60^{60^{60}})^{\frac{1}{5}}=60^{\frac{1}{5}60^{60}}=60^{60^{59}\cdot 12}.$$

则

$$\begin{aligned}N&<60^{60^{60}}+59\cdot 59^{59^{59}}\\&<60^{60^{60}}+60^{60^{59}\cdot 12}\\&=x^5+x\\&<(x+1)^5.\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}N&>60^{60^{60}}-59\cdot 59^{59^{59}}\\&>x^5-x\\&=(x-1)^5+5x^4-10x^3+10x^2-4x+1\end{aligned}$$

$$> (x-1)^5.$$

这时由 $$(x-1)^5 < N < (x+1)^5$$

及 $N$ 是一个整数的五次方.

所以 $$N = x^5.$$

$$N^{\frac{1}{5}} = x.$$

从而就有 $\sum_{k=1}^{59} e_k k^{k^k} = 0.$ ①

然而 $$\left|\sum_{k=1}^{59} e_k k^{k^k}\right| \geqslant 59^{59^{59}} - \left|\sum_{k=1}^{58} e_k k^{k^k}\right|$$

$$> 59^{59^{59}} - 58 \cdot 58^{58^{59}}$$

$$> 59^{59^{59}} - 59^{59^{59}}$$

$$= 0. \quad ②$$

① 和 ② 矛盾,从而 $N$ 不是整数的五次方.

15·17 对于每个正整数 $x$,定义 $g(x) = x$ 的最大奇约数.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{g(x)}, \text{如果 } x \text{ 是偶数}. \\ 2^{\frac{x+1}{2}}, \text{如果 } x \text{ 是奇数}. \end{cases}$$

构造序列:$x_1 = 1, x_{n+1} = f(x_n)$.

证明数 1992 将出现在该序列中,试确定使得 $x_n = 1992$ 的最小的 $n$,并说明这样的 $n$ 是否惟一.

(第 33 届国际数学奥林匹克预选题,1992 年)

[证] 由题设中 $g(x)$ 与 $f(x)$ 的定义可求出

$g(1) = 1$, $g(2) = 1$, $g(3) = 3$, $g(4) = 1$,
$g(5) = 5$, $g(6) = 3$. $g(7) = 7$, $g(8) = 1$,
$g(9) = 9$, $g(10) = 5$, $g(11) = 11$, $g(12) = 3$.
$f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 4$, $f(4) = 6$,
$f(5) = 8$, $f(6) = 5$, $f(7) = 16$, $f(8) = 12$,
$f(9) = 32$, $f(10) = 7$, $f(11) = 64$, $f(12) = 10$.

把 $f(x)$ 的值写成如下的三角数表

1

2 3

数论卷

4 6 5
8 12 10 7
16 24 20 14 9
32 48 40 28 18 11
……

这个三角数表,奇数在对角线上,表中其余各数均为其上方邻数的2倍,每个正整数都恰好在表中出现一次.

因此,仅有惟一的 $n$ 可使 $x_n$ 等于 1992.

注意到 $2k-1=x_{\frac{1}{2}k(k+1)},\quad k=1,2,3,\cdots.$

令 $x_n=1992$,则有

$$x_{n+1}=4\cdot 251,$$
$$x_{n+2}=2\cdot 253,$$
$$x_{n+3}=255=2\cdot 128-1=x_{\frac{1}{2}\cdot 128\cdot(128+1)}=x_{8256}.$$

因此,所求的 $n=8253$.

15·18 既约分数的分母为30,求小于10的所有这样的正有理数的和.

(第10届美国数学邀请赛,1992年)

[解] 小于10,分母为30的既约分数可写成$\frac{30n+r}{30}$的形式,其中 $n$ 和 $r$ 为满足 $0\leqslant n\leqslant 9,\quad 0\leqslant r<30$ 的整数.

当且仅当 $r$ 与30互素时,$\frac{30n+r}{30}$是既约分数,因此应有

$$r\in\{1,7,11,13,17,19,23,29\}.$$

这样 $n$ 有10种选择,而 $r$ 有8种选择,而且没有两对选择$(n,r)$能使$\frac{30n+r}{30}$的值相同.

由此可知,所求的和共有 $8\cdot 10=80$ 项.

再注意到,若$\frac{k}{30}$满足题目要求,则 $10-\frac{k}{30}$ 也满足要求,这样可把$\frac{k}{30}$与$\left(10-\frac{k}{30}\right)$配成对计算.

则所有这样的分式的和为

$$\left(\frac{1}{30}+\frac{300-1}{30}\right)+\left(\frac{7}{30}+\frac{300-7}{30}\right)+\cdots+\left(\frac{149}{30}+\frac{300-149}{30}\right)$$

$= 40 \cdot 10 = 400.$

**15·19** 如果整数 $n$ 可以表示成 $n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$，其中 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 是满足 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_k} = 1$ 的正整数(不一定相异)，那么，我们称 $n$ 是"好数".

已知整数 33 至 73 是"好数"，证明每一个不小于 33 的整数都是"好数".

（第 7 届美国数学奥林匹克，1978 年）

［证］ 若 $(a_1, a_2, \cdots, a_k)$ 是"好数" $n$ 的一个分解，则有

$$\begin{cases} n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k, & ① \\ \dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_k} = 1. & ② \end{cases}$$

将 ② 乘以 $\frac{1}{2}$ 得

$$\frac{1}{2a_1} + \frac{1}{2a_2} + \cdots + \frac{1}{2a_k} = \frac{1}{2},$$

从而
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2a_1} + \frac{1}{2a_2} + \cdots + \frac{1}{2a_k} = 1.$$

又因为 $\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6},$

则有
$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2a_1} + \frac{1}{2a_2} + \cdots + \frac{1}{2a_k} = 1,$$
$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2a_1} + \frac{1}{2a_2} + \cdots + \frac{1}{2a_k} = 1.$$

再由 ① 可得

$$2n + 8 = 4 + 4 + 2a_1 + 2a_2 + \cdots + 2a_k,$$
$$2n + 9 = 3 + 6 + 2a_1 + 2a_2 + \cdots + 2a_k.$$

这就是说，$2n + 8$ 和 $2n + 9$ 都是"好数".

于是可以得到结论：若 $n$ 是一个"好数"，那么 $2n + 8$ 和 $2n + 9$ 都是"好数".

现在设 $P_n$ 是这样的命题：

所有整数 $n, n + 1, \cdots, 2n + 7 (n \geqslant 33)$ 都是"好数".

我们用数学归纳法证明命题 $P_n$.

当 $n = 33$ 时，$2n + 7 = 73$，由题设，从 33 到 73 之间的所有整数都是"好数"，

因此命题 $P_{33}$ 成立.

假设 $n=k$ 时,命题 $P_k$ 成立,即 $k,k+1,\cdots,2k+7$ 都是"好数",又由上面的证明 $k$ 是"好数"时,$2k+8,2k+9$ 都是"好数",于是

$$k+1,k+2,\cdots,2(k+1)+7=2k+9$$

都是"好数",即由命题 $P_k$ 成立可以推出命题 $P_{k+1}$ 成立.

因此,对 $n\geqslant 33$,命题 $P_n$ 都成立.

所以对每一个不小于 33 的整数都是"好数".

15·20　对正整数 $n\geqslant 1$ 的一个划分 $\pi$,是指将 $n$ 分成一个或若干个正整数之和,且按非减顺序排列(如 $n=4$,划分 $\pi$ 有 $1+1+1+1$,$1+1+2$,$1+3$,$2+2$ 和 4).对任一划分 $\pi$,定义 $A(\pi)$ 为划分 $\pi$ 中数 1 出现的个数,定义 $B(\pi)$ 为划分 $\pi$ 中出现的不同数字的个数(如对 $n=13$ 的一个划分 $\pi$:$1+1+2+2+2+5$ 而言,$A(\pi)=2$,$B(\pi)=3$).求证对任意正整数 $n$,其所有划分 $\pi$ 的 $A(\pi)$ 之和等于 $B(\pi)$ 之和.

(第 15 届美国数学奥林匹克,1986 年)

[证]　设 $P(n)$ 表示对正整数 $n$ 的划分个数,且令 $P(0)=1$.

我们首先证明:对任意正整数 $n$,其所有划分 $\pi$ 的 $A(\pi)$ 之和等于

$$\sum_{i=0}^{n-1}P(i)=P(n-1)+P(n-2)+\cdots+P(0).$$

对 $A(\pi)$ 之和计算如下:对每一个至少有一个"1"的划分拿去第一个"1",这种情况将发生 $P(n-1)$ 次,即对 $n$ 的所有划分 $\pi$ 中,第一个数是"1"的划分有 $P(n-1)$ 个;同理对 $n$ 的所有划分 $\pi$ 中第二个数是"1"的划分有 $P(n-2)$ 个;…;对 $n$ 的所有划分 $\pi$ 中第 $n-1$ 个数是"1"的划分有 $P(1)=1$ 个;对 $n$ 的所有划分 $\pi$ 中第 $n$ 个数是"1"的划分有 $P(0)=1$ 个.

所以 $A(\pi)$ 的和等于

$$P(n-1)+P(n-2)+\cdots+P(1)+P(0).$$

我们再来证明:对任意正整数 $n$,其所有划分 $\pi$ 的 $B(\pi)$ 之和等于

$$P(n-1)+P(n-2)+\cdots+P(1)+P(0).$$

设想有一个有 $P(n)$ 行 $n$ 列的矩阵.

若划分 $\pi_i(i=1,2,\cdots,P(n))$ 中有数字 $d(1\leqslant d\leqslant n)$,则在第 $i$ 行,第 $d$ 列的位置上打一个"√",我们用两种不同的方法计算打"√"数.

(1) 各行分别计“√”数.

则第 $i$ 行的“√”数 $= B(\pi_i)(i = 1,2,\cdots,P(n))$,再将这 $P(n)$ 个数相加,即为 $B(\pi)$ 之和.

(2) 各列分别计“√”数.

由于对 $n$ 的所有含$d$ 的划分与对$n-d$ 的所有划分是一一对应的,所以第 $d$ 列中的“√”数应为 $P(n-d)(d = 1,2,\cdots,n)$,再将这 $n$ 个数相加得

$$P(n-1) + P(n-2) + \cdots + P(1) + P(0).$$

由(1),(2) 可得 $B(\pi)$ 之和.

综合以上,命题得证.

**15·21** 能否将 2 写成这样的形式

$$2 = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \cdots + \frac{1}{n_{1974}}.$$

其中 $n_1,n_2,\cdots,n_{1974}$ 是不同的自然数.

(基辅数学奥林匹克,1974 年)

**[解]** 首先 1 可以写成三个分子为 1 的分数之和.

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}.$$

于是 $$2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}. \quad ①$$

注意到恒等式

$$\frac{1}{6k} = \frac{1}{12k} + \frac{1}{20k} + \frac{1}{30k}. \quad ②$$

取 $k = 1 = 5^0$,则

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30},$$

代入 ① 得 $2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30}$. ③

从而 2 化为 6 个分数之和.

取 $k = 5^1 = 5$,则 $\frac{1}{30} = \frac{1}{60} + \frac{1}{100} + \frac{1}{150}$,

代入 ③ 得

$$2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{60} + \frac{1}{100} + \frac{1}{150}, \quad ④$$

从而 2 化为 8 个分数之和.

再取 $k=5^2$,代入 ② 得到$\frac{1}{150}$的分解式代入 ④ 从而得到 10 个分数之和为 2.



进一步取 $k=5^3,5^4,\cdots,5^{984}$,每一次都使 ① 式增加两个新的不同项,于是经过这样的 985 次代换就使 2 化为

$$985\cdot 2+4=1974$$

个分子为 1 的分数之和.

15·22　$n$ 为大于 1 的整数,确定形如 $pq$ 的数的倒数和.这里 $p,q$ 为整数,满足条件 $0<p<q\leqslant n$,　$p+q>n$,并且 $p,q$ 的最大公约数为1.

(加拿大数学奥林匹克训练题,1989 年)

[解]　设满足条件的倒数和为

$$S_n=\sum_{\substack{0<p<q\leqslant n\\ p+q>n\\ (p,q)=1}}\frac{1}{pq}.$$

则　$S_2=\frac{1}{2}$,并且

$$S_{n+1}=S_n+\sum_{\substack{p<n+1\\ (p,n+1)=1}}\frac{1}{(n+1)p}-\sum_{\substack{0<p<q\\ p+q=n+1\\ (p,q)=1}}\frac{1}{pq}.\qquad ①$$

由于

$$\sum_{\substack{0<p<q\\ p+q=n+1\\ (p,q)=1}}\frac{1}{pq}$$

$$=\frac{1}{n+1}\sum_{\substack{0<p<q\\ p+q=n+1\\ (p,q)=1}}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)$$

$$=\frac{1}{n+1}\sum_{\substack{\frac{n+1}{2}<q<n+1\\ (q,n+1)=1}}\frac{1}{q}+\frac{1}{n+1}\sum_{\substack{\frac{n+1}{2}>p\\ (p,n+1)=1}}\frac{1}{p}$$

$$=\frac{1}{n+1}\sum_{\substack{p<n+1\\ (p,n+1)=1}}\frac{1}{p}.$$

$$=\sum_{\substack{p<n+1\\ (p,n+1)=1}}\frac{1}{(n+1)p}.\qquad ②$$

由 ①,② 可得

$$S_{n+1}=S_n.$$

从而对所有的 $n\geqslant 2$,

$$S_n=\frac{1}{2}.$$

15·23　设 $p$ 为素数，$k$ 是什么数时，集合 $\{1,2,\cdots,k\}$ 可以分拆为 $p$ 个元素之和相等的子集？

（第 26 届国际数学奥林匹克候选题，1985 年）

[**解**]　我们证明：满足条件的 $k$ 的集合为

$$V_p=\left\{k \mid p \mid \frac{k(k+1)}{2},\quad k\geqslant 2p-1,k\in N\right\}.$$

由于在集合的分拆时，至多有一个子集仅含一个元素，而另外 $p-1$ 个子集至少含两个元素，则

$$k\geqslant 2(p-1)+1=2p-1. \qquad ①$$

又由于集合 $\{1,2,\cdots,k\}$ 分拆为 $p$ 个元素之和相等的子集，则

$$pM=\frac{k(k+1)}{2}.$$

其中 $M$ 为每个子集的元素之和，于是

$$p\mid\frac{k(k+1)}{2}. \qquad ②$$

下面证明条件 ①，② 也是 $k\in V_p$ 的充分条件.

显然，在 $k\in V_p$ 时，$k+2p\in V_p$.

事实上，只要在对应于 $k$ 的分拆中将 $k+i$，　$k+2p+1-i$ 这两个元素添入第 $i$ 个子集中（$i=1,2,\cdots,p$）就可以，此时

$$\begin{aligned}\frac{(k+2p)(k+2p+1)}{2}&=\frac{k(k+1)}{2}+\frac{4k+2+4p}{2}\cdot p\\&=\frac{k(k+1)}{2}+(2k+1+2p)p.\end{aligned}$$

由 $p\mid\frac{k(k+1)}{2}$ 得

$$p\mid\frac{(k+2p)(k+2p+1)}{2}.$$

现在设 $k$ 满足条件 ①，②.

如果 $p=2$，那么由 ② 可知

$$4\mid k\quad 或\quad 4\mid k+1.$$

由于 $\{1,2,3\}=\{1,2\}\cup\{3\}$，

$$\{1,2,3,4\}=\{1,4\}\cup\{2,3\}.$$

所以 $3 \in V_p, \quad 4 \in V_p.$

再由 $k \in V_p$ 时，$k + 2p \in V_p$ 可知

$$3 + 2 \cdot 2t \in V_p, \quad 4 + 2 \cdot 2t \in V_p.$$

从而 $k \in V_p$.

如果 $p$ 是奇素数，由 ①，② 可知

$$k = mp - 1 \quad 或 \quad k = mp \quad (m \geqslant 2).$$

这时只需证明 $2p - 1, 2p, 3p, 3p - 1 \in V_p$.

对于 $k = 2p - 1$，有

$$\{1,2,\cdots,2p-1\}$$
$$= \{1,2p-2\} \cup \{2,2p-3\} \cup \cdots \{p-1,p\} \cup \{2p-1\}.$$

对于 $k = 2p$，有

$$\{1,2,\cdots,2p\} = \{1,2p\} \cup \{2,2p-1\} \cup \cdots \cup \{p,p+1\}.$$

所以 $2p - 1 \in V_p, \quad 2p \in V_p.$

对于 $k = 3p = 3(2m+1) = 6m+3$，有

$\{1,3m+2,6m+3\} \cup \{4,3m+5,6m-3\} \cup \cdots$

$\{3m+1,6m+2,3\} \cup \{3m+4,2,6m\} \cup \{3m+7,5,6m-6\}$
$\cup \cdots \cup \{6m+1,3m-1,6\}$

对于 $k = 3p - 1 = 3(2m+1) - 1 = 6m+2$，有

$\{1,3m+2,6m\} \cup \{4,3m+5,6m-6\} \cup \cdots$

$\{3m-2,6m-1,6\} \cup \{3m+1,6m+2\} \cup \{3m+4,2,6m-3\}$
$\cup \{3m+7,5,6m-9\} \cup \cdots \cup \{6m+1,3m-1,3\}.$

所以 $k \in V_p$ 时，可将集合 $\{1,2,\cdots,k\}$ 分拆为 $p$ 个元素之和相等的子集.

15·24　今有26个非零数码(即26个一位正整数)写成一行.证明可将该行数码分成若干段，使得由各段中的数码所组成的自然数的总和可被13整除.

（列宁格勒数学奥林匹克，1991年）

［证］　先证明一个引理.

引理设 $S$ 是由 $k$ 个不能被13整除的自然数构成的集合，$k \leqslant 13$；$A(S)$ 是 $S$ 中一切可能的部分元素的和被13除所得余数的集合，则集合 $A(S)$ 中的元素不少于 $k$ 个.

我们对 $k$ 进行归纳.

$k=1$ 时,引理显然成立.

现设 $k>1$.

先去掉任意一个 $a\in S$,并将其余 $k-1$ 个数所构成的集合记作 $T$,显然有 $A(T)\subset A(S)$.

易见,如果集合 $A(T)$ 中恰有 $k-1<13$ 个元素,那么只需证明 $A(T)\neq A(S)$ 即可.

由于 13 是素数,所以如果 $a$ 不能被 13 整除,那么 $0,1,2,\cdots,12$ 中的每一个就都是形如 $an$ 的数($n$ 为整数)被 13 除所得的余数.

以 $r_n$ 记 $an$ 被 13 除所得的余数,选取一个 $n$,使得 $r_n\in A(T)$, $r_{n+1}\notin A(T)$.则有

$$r_n=r_{x_1+\cdots+x_p}.$$

其中 $x_1,\cdots,x_p\in T$,且

$$r_{n+1}=r_{x_1+\cdots+x_p+a}\in A(S).$$

亦即 $A(T)\neq A(S)$.

引理得证.

现将 26 位数先分成 13 个二位数:

$$\overline{a_1b_1},\overline{a_2b_2},\cdots,\overline{a_{13}b_{13}}.$$

我们考察

$$S=\{9a_1,9a_2,\cdots,9a_{13}\}.$$

由引理所证可知,集合 $A(S)$ 由被 13 所除的所有 13 种可能的余数组成.

设 $m$ 是所有 13 个二位数之和,则必有

$$r_m=r_{9a_{i_1}+9a_{i_2}+\cdots+9a_{i_p}}. \qquad ①$$

现在,我们将二位数

$$\overline{a_{i_1}b_{i_1}},\overline{a_{i_2}b_{i_2}},\cdots,\overline{a_{i_p}b_{i_p}}$$

都拆成一位数,得到 $2p$ 个一位数,则由

$\overline{a_{i_t}b_{i_t}}-a_{i_t}-b_{i_t}=9a_{i_t},t=1,\cdots,p$ 可得,$2p$ 个一位数与其余 $13-p$ 个二位数之和为

$$m-9a_{i_1}-9a_{i_2}-\cdots-9a_{i_p}.$$

由 ① 式,它能被 13 整除.

15·25 将顺序为 $1,2,3,\cdots,2n$ 的 $2n$ 张牌变成 $n+1,1,n+2,2,\cdots,n-1,2n,n$.

数论卷

即原先的前 $n$ 张牌移至第 $2,4,\cdots,2n$ 张，而其余的 $n$ 张牌，依照原来顺序排在奇数位置即第 $1,3,5,\cdots,2n-1$ 张，这称为一次"完全"洗牌. 试确定有哪些 $n$，从顺序 $1,2,\cdots,2n$ 开始，经过"完全"洗牌可以恢复到原来状况.

（第 28 届国际数学奥林匹克候选题，1987 年）

[解] 可以证明. 对任意自然数 $n$，都可以将顺序为 $1,2,3,\cdots,2n$ 的牌，经过 $k$ 次洗牌后，使顺序恢复原状.

事实上，令 $m=2n+1$.

一次洗牌后，将 $x$ 变为 $y$，有

$$y\equiv 2x \pmod m,$$

因此经过 $k$ 次洗牌后，$x$ 变为 $2^kx \pmod m$.

由于 $m$ 是奇数，则

$$2^{\varphi(m)}\equiv 1 \pmod m.$$

其中 $\varphi(m)$ 为欧拉函数.

从而 $2^{\varphi(m)}x\equiv x \pmod m$.

因此，经过 $k$ 次 $(k=\varphi(m))$"完全"洗牌后，可以使牌恢复原状.

15·26 设自然数 $n(n>3)$ 有下列性质：把集合 $S_n=\{3,4,\cdots,n\}$ 任意分成两组时，总有某一组中的三个数 $a,b,c$（允许 $a=b$），使得 $ab=c$. 求这种 $n$ 的最小值.

（中国国家集训队测验题，1988 年）

[解] 当 $n\geqslant 3^5$ 时，

$$3,3^2,3^3,3^4,3^5\in S_n.$$

若 $S_n$ 分成两组 $A$ 和 $B$. 且不具备题设的性质.

不妨设 $3\in A$，则 $3\cdot 3\notin A$，即

$$3^2\in B,$$

则又有 $3^2\cdot 3^2\notin B$，即 $3^4\in A$，从而 $3^3\notin A$，$3^3\in B$. 此时不论 $3^5$ 属于 $A$ 还是属于 $B$，都会引出矛盾：

若 $3^5\in A$，则由 $3\in A$，$3^4\in A$，引出矛盾，

若 $3^5\in B$，则由 $3^2\in B$，$3^3\in B$，引出矛盾.

所以 $n\geqslant 3^5=243$ 时，具备题设的性质.

若 $n < 3^5 = 243$，令

$$A = \{k \mid 9 \leqslant k \leqslant 80\} \cap S_n,$$

$$B = \{k \mid 3 \leqslant k \leqslant 8 \text{ 或 } 81 \leqslant k \leqslant 242\} \cap S_n,$$

则 $A$ 和 $B$ 中的任一个都不具备 $ab = c$ 的性质.

即对 $n < 243$，存在一组分组方式，使得不具备题设的性质.

所以 $n$ 的最小值是 243.

15·27　试求具备下述性质的最小自然数 $n$. 如果把集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 任意分成两个不相交的子集时，则其中有一个子集含有 3 个不同的数，它们中的两个数之积等于第 3 个.

（第 29 届国际数学奥林匹克候选题，1988 年）

**[解]**　所求的最小值为 96.

设 $A_n = \{1,2,\cdots,n\}$. 又设分成的两个不相交的子集为 $B_n, C_n$.

我们首先证明，当 $n \geqslant 96$ 时，一定有一个子集中含有 3 个不同的数，它们中的两个数之积等于第 3 个.

假设 $B_n$ 和 $C_n$ 中的任一个都不具备这种性质，即不含有这样的 3 个不同的数，使得其中两个的积等于第 3 个.

由于 $n \geqslant 96$，则 96 的约数集合

$$\{1,2,3,4,6,8,12,16,24,32,48,96\}$$

的元素决不能都在同一个集合中，不然，就存在两个数之积等于第 3 个.

不失一般性，设 $2 \in B_n$.

对 3,4 进行讨论，则 3,4 有下面四种情况：

情况 $A$：　$3 \in B_n$，　$4 \in B_n$.

情况 $B$：　$3 \in B_n$，　$4 \in C_n$.

情况 $C$：　$3 \in C_n$，　$4 \in B_n$.

情况 $D$：　$3 \in C_n$，　$4 \in C_n$.

对情况 $A$.

因为 $2,3,4 \in B_n$，则

$$6 \notin B_n, 8 \notin B_n, 12 \notin B_n.$$

即　$$6 \in C_n, 8 \in C_n, 12 \in C_n.$$

从而　$48 \in B_n$，又 $2 \in B_n$，则

$$2 \cdot 48 \in C_n, \text{即 } 96 \in C_n,$$

另一方面,$8 \in C_n, 12 \in C_n$,则

$$8 \cdot 12 \in B_n, \text{即 } 96 \in B_n.$$

于是　$96 \in C_n$ 又 $96 \in B_n$,引出矛盾.

所以情况 $A$ 不可能.

对情况 $B$.

因为 $2,3 \in B_n$,　$4 \in C_n$,则

$$6 \notin B_n, \text{即 } 6 \in C_n.$$

从而

$$24 \in B_n,$$

因为 $3 \in B_n$,　$24 \in B_n$,则 $8 \in C_n$.

由于 $2 \in B_n$,　$24 \in B_n$,则 $12 \in C_n$,　$48 \in C_n$.

另一方面,$6 \in C_n$,　$8 \in C_n$,则

$$6 \cdot 8 = 48 \in B_n.$$

从 $48 \in B_n$ 又 $48 \in C_n$ 引出矛盾.

所以情况 $B$ 不可能.

对情况 $C$,

因为 $2,4 \in B_n$,　$3 \in C_n$,则

$$8 \in C_n, \quad 24 \in B_n.$$

从而由 $4 \in B_n, 24 \in B_n$ 得 $6 \in C_n$.

由 $6 \in C_n$,　$8 \in C_n$ 得 $48 \in B_n$,

由 $2 \in B_n$,　$24 \in B_n$ 得 $48 \in C_n$.

于是又引出矛盾.

对情况 $D$.

因为 $2 \in B_n$,　$3,4 \in C_n$,则

$$12 \in B_n, \quad 24 \in C_n.$$

又 $2 \in B_n$,　$12 \in B_n$,则 $6 \in C_n$.

而由 $4 \in C_n$,　$6 \in C_n$ 得 $24 \in B_n$.

于是引出 $24 \in C_n$ 又 $24 \in B_n$ 的矛盾.

所以情况 $D$ 不可能.

由以上,$n \geqslant 96$ 时,一定有一个子集中存在三个数,其中两个数之积等于第 3 个.

当 $n < 96$ 时,可以构造一个方法,使得任一子集中都不存在符合

条件的三个数.

对于 $A_{95} = \{1,2,3,\cdots,95\}$.取

$$B_n = \{1, p, p^2, p^2qr, p^4q, p^3q^2\},$$

$$C_n = \{p^3, p^4, p^5, p^6, pq, p^2q, pqr, p^3q, p^2q^2\}.$$

其中 $p, q, r$ 取不大于 95 的不同素数.

例如 $B_{95} = \{1,2,3,4,5,7,9,11,13,17,19,23,25,29,31,37,41,43,47,48,49,53,59,60,61,67,71,72,73,79,80,83,84,89,90\}$.

$$C_{95} = A_{95} \setminus B_{95}.$$

15·28 每个正整数都可以表示成一个或者多个连续正整数的和.试对每个正整数 $n$,求 $n$ 有多少种不同的方法表示成这样的和.

(第 1 届中国台北数学奥林匹克,1992 年)

[解] 设 $n$ 可以表示成 $m$ 个连续正整数之和.令

$$n = k + (k+1) + \cdots + [k + (m-1)]. \qquad ①$$

其中 $k$ 是正整数.则

$$n = mk + \frac{m(m-1)}{2}$$

$$= m\left(k + \frac{m-1}{2}\right). \qquad ②$$

(1) 若 $m$ 为奇数,则 $m-1$ 为偶数,从而由 ② 式可知 $m \mid n$,

且

$$\frac{m(m-1)}{2} < n.$$

$$m^2 - m - 2n < 0.$$

解得

$$m < \frac{1 + \sqrt{1+8n}}{2}. \qquad ③$$

反过来,由上述推理可见,对 $n$ 的每个满足 ③ 式的奇因数 $m$,就可以把 $n$ 表达为 ① 的 $m$ 个连续正整数的和.

(2) 若 $m$ 为偶数,把 ② 式改写成

$$2n = m(2k + m - 1).$$

由于 $2k + m - 1$ 是奇数,所以 $m$ 是 $2n$ 的偶因数.且若 $p_0$ 是 $n$ 的标准分解式中 2 的指数,则 $p_0 + 1$ 是 $m$ 的标准分解式中 2 的指数.此外 $m$ 仍满足 ③ 式

反过来,对于每个满足 ③ 式,且其分解式中 2 的指数为 $p_0 + 1$ 的 $m$,都有相应的 $n$ 表达为 ① 的 $k$ 个连续正整数的和.

综上讨论：若对每个 $n \in N$，记所求的表示为和的方法总数为 $f(n)$，则

$$f(n) = f_1(n) + f_2(n).$$

这里 $f_1(n)$ 是 $n$ 的满足不等式③的奇因数 $m$ 的个数；$f_2(n)$ 是满足若 $2^{p_0} \mid n, 2^{p_0+1} \nmid n$，且 $2^{p_0+1} \nmid m, 2^{p_0+2} \nmid m$ 的偶因数 $m$ 的个数.

15·29　证明(1)任何一个形如 $2^n$($n$ 为任意自然数)的数都不可以表示成两个或多个连续自然数之和.

(2)任何一个不是 2 的自然数幂的自然数一定可以表示成两个或多个连续自然数之和.

（波兰数学竞赛，1960 年）

［证］　(1)假设结论不正确，即存在两个或多个连续自然数之和可表为 $2^n$($n$ 为任意自然数)，于是有等式

$$k + (k+1) + \cdots + (k+r) = 2^n,$$

其中 $k, r, n$ 都是自然数.

因而有　$(2k+r)(r+1) = 2^{n+1}$.　①

首先注意到 $2k+r$ 与 $r+1$ 都是大于 1 的自然数.

其次我们注意到 $2k+r$ 和 $r+1$ 一为奇数，一为偶数. 这可由 $(2k+r)+(r+1) = 2(k+r)+1$ 是奇数得到.

因此①的左边能被一个大于 1 的奇数整除，而右边是 2 的幂，不能被大于 1 的奇数整除. 于是等式①不可能成立.

所以，任意 2 的幂都不可以写成两个或多个连续自然数之和.

(2)设 $M$ 是自然数，但不是 2 的正整数次幂，于是 $M$ 可以写成

$$M = 2^n(2m+1).$$

其中 $m, n$ 是整数，且 $m \geqslant 1,\quad n \geqslant 0$.

我们只要证明，存在整数

$$a \geqslant 1, \quad k \geqslant 2. \qquad ②$$

它们适合

$$a + (a+1) + \cdots + (a+k-1) = M,$$

即　$(2a+k-1)k = 2^{n+1}(2m+1)$.　③

如果 $2a+k-1 = 2^{n+1},\quad k = 2m+1$，则

$$a = 2^n - m, \quad k = 2m+1.$$

此时条件③被满足.

当且仅当 $2^n > m$ 时，$a = 2^n - m$，$k = 2m + 1$ 满足条件 ②

如果 $2a + k - 1 = 2m + 1$，$k = 2^{n+1}$，则

$$a = m + 1 - 2^n,\quad k = 2^{n+1}.$$

此时条件 ③ 被满足

当且仅当 $2^n \leqslant m$ 时，$a = m + 1 - 2^n$，$k = 2^{n+1}$ 满足条件 ②

由于 $2^n > m$ 与 $2^n \leqslant m$ 总有一个能成立，所以总存在连续若干个自然数之和恰好等于 $M$.

15·30　设 $n,m,k$ 都是自然数，且 $m \geqslant n$. 证明如果

$$1 + 2 + \cdots + n = mk,$$

则可将数 $1,2,\cdots,n$ 分成 $k$ 个组，使得每一组数的和都等于 $m$.

（第 22 届全苏数学奥林匹克，1988 年）

**[证]**　用数学归纳法.

$n = 1$ 时，结论显然成立.

假设对小于 $n$ 的自然数结论成立，我们考察集合 $S_n = \{1,2,\cdots,n\}$.

由 $1 + 2 + \cdots + n = mk$ 得

$$\frac{n(n+1)}{2} = mk.$$

(1) 如果 $m = n$，则 $\frac{1}{2}(n+1) = k$ 是整数.

我们可以按如下分法分成 $\frac{1}{2}(n+1)$ 组：

$$\{n\},\quad \{1,n-1\},\quad \{2,n-2\},\cdots,\quad \left\{\frac{n-1}{2},\frac{n+1}{2}\right\}.$$

(2) 如果 $m = n + 1$，则 $n$ 是偶数.

我们可按如下方法分成 $\frac{n}{2} = k$ 组：

$$\{1,n\},\quad \{2,n-1\},\quad \cdots,\quad \left\{\frac{n}{2},\frac{n+2}{2}\right\}.$$

(3) 如果 $n + 1 < m < 2n$ 且 $m$ 为奇数.

我们先从 $S_n$ 中分出

$$S_{m-n-1} = \{1,2,\cdots,m-n-1\}.$$

再将其余的 $2n - m + 1$ 个数两两配对，使各对之和等于 $m$：

$$\{m-n,n\},\{m-n+1,n-1\},\cdots,\left\{\frac{m-1}{2},\frac{m+1}{2}\right\}.$$

由于 $S_{m-n-1}$ 中所有数之和为

$$\frac{1}{2}(m-n-1)(m-n)=\frac{1}{2}m(m-2n-1)+\frac{1}{2}n(n+1)$$
$$=m\left[\frac{1}{2}(m-2n-1)+k\right].$$

所以 $S_{m-n-1}$ 中所有数之和能被 $m$ 整除，且因 $m\geqslant m-n-1$，于是可将 $S_{m-n-1}$ 中的数分成 $\frac{1}{2}(m-2n-1)+k$ 组，且每组之和都等于 $m$.

又把 $2n-m+1$ 个数两两配对分成 $\frac{1}{2}(2n-m+1)$ 组，而

$$\frac{1}{2}(m-2n-1)+k+\frac{1}{2}(2n-m+1)=k,$$

于是可把 $S_n$ 按要求分成 $k$ 个组，每组之和等于 $m$.

(4) 如果 $n+1<m<2n$ 且 $m$ 为偶数.

我们仍然先从 $S_n$ 中分出 $S_{m-n-1}$ 来，并将其余的 $2n-m+1$ 个数两两配对分成 $\frac{1}{2}(2n-m)$ 组，使每组之和为 $m$：

$$\{m-n,n\},\{m-n+1,n-1\},\cdots,\left\{\frac{1}{2}m-1,\frac{1}{2}m+1\right\}.$$

这时还剩下一个数 $\frac{m}{2}$ 没有分配.

由(3)，$S_{m-n-1}$ 所有数之和可以表示成

$$\frac{m}{2}(m-2n-1+2k)$$

的形式. 它可被 $\frac{m}{2}$ 整除，且 $\frac{m}{2}\geqslant m-n-1$.

于是由归纳假设可知，可将 $S_{m-n-1}$ 中的数分为 $m-2n-1+2k$ 组，使每组之和为 $\frac{m}{2}$，由于 $m-2n-1+2k$ 是一个奇数，所以当把上面剩下的一个数 $\frac{m}{2}$ 补入其中之后，变成 $m-2n+2k$ 组，然后把这些和为 $\frac{m}{2}$ 的组两两合并，使各组之和为 $m$. 这时共分了 $\frac{1}{2}(2n-m)+\frac{1}{2}(m-2n+2k)=k$ 组.

(5) 如果 $m\geqslant 2n$，此时

$$k=\frac{n(n+1)}{2m}\leqslant\frac{1}{4}(n+1),$$

所以 $$n-2k\geqslant 2k-1>0.$$

我们从 $S_n$ 中分出 $S_{n-2k}$，后者中所有数之和

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}(n-2k)(n-2k+1)\\=&\frac{1}{2}n(n+1)-k(2n+1)+2k^2\\=&mk-k(2n+1)+2k^2\end{aligned}$$

能被 $k$ 整除，且所得之商不小于 $n-2k$，这是因为

$$\frac{(n-2k)(n-2k+1)}{2(n-2k)}=\frac{1}{2}(n-2k+1)\geqslant k.$$

于是由归纳假设，可将 $S_{n-2k}$ 分为$k$ 组，使各组之和相等.

再将剩下的 $2k$ 个数两两配成一对，分成 $k$ 组，使各对数之和相等：

$$\{n-2k+1,n\},\{n-2k+2,n-1\},\cdots$$

然后再将这 $k$ 对数并入前面分出的$k$ 组数，则这样的 $k$ 组数各组数之和都等于 $m$.

由以上，对 $S_n$ 能满足题目要求.

15·31 能否将整数集合分为 3 个子集合，使对任何整数 $n$，$n$、$n-50$ 和 $n+1987$ 分属 3 个不同的子集合.

（第 50 届莫斯科数学奥林匹克，1987 年）

**［解］** 我们证明不可能把整数集分成 3 个这样的子集合，使 $n$，$n-50$，$n+1987$ 分属 3 个不同的子集，其中 $n$ 是任意整数.

如果一个 3 元数组中的 3 个数分别取自 3 个不同的子集，那么我们就把这个 3 元数组叫作“具有代表性的”.

假设存在满足题目要求的分法，则对任何整数 $n$，下面的 3 元数组都是“具有代表性的”：

$$(n-50,\quad n,\quad n+1987),\qquad ①$$

$$(n-100,\quad n-50,\quad n+1937),\qquad ②$$

$$(n+1937,\quad n+1987,\quad n+2\cdot1987).\qquad ③$$

我们用记号 $i\sim j$ 表示整数$i$ 与整数$j$ 属于同一个子集，而用记号 $i\nsim j$ 表示整数$i$ 与整数$j$ 不属于同一个子集.

由 ② 知 $$n+1937\nsim n-50,$$

由 ③ 知 $$n+1937 \not\sim n+1987.$$

由 ① 知 $$n \not\sim n-50,$$

$$n \not\sim n+1987.$$

于是只能有 $$n \sim n+1937. \qquad ④$$

由 ②,把 $n+1937$ 换成 $n$,又得到一个"具有代表性"的 3 元数组

$$(n-100,\quad n-50,\quad n). \qquad ⑤$$

还可得到(用 $n-50$ 换 $n$)

$$(n-150,\quad n-100,\quad n-50). \qquad ⑥$$

也是"具有代表性"的数组.

于是由 ⑤,⑥ 可知

$$n \not\sim n-50,\quad n \not\sim n-100,$$

于是只能有

$$n \sim n-150. \qquad ⑦$$

由 ④ 和 ⑦ 可得

$$0 \sim 1937 \sim 2\cdot 1937 \sim \cdots \sim 50\cdot 1937$$
$$= 646\cdot 150-50 \sim 645\cdot 150-50 \sim \cdots \sim -50.$$

于是 $0 \sim -50$,即当 $n=0$ 时,$n$ 与 $n-50$ 属同一个子集,出现矛盾.

因此不可能有满足题目要求的分法.

15·32 给定自然数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 和 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 两个和 $x_1+x_2+\cdots+x_n$ 以及 $y_1+y_2+\cdots+y_m$ 彼此相等且小于 $mn$. 证明在等式

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=y_1+y_2+\cdots+y_m$$

中可以删去一部分加数,使剩下的部分仍然是等式.

(第 11 届全苏数学奥林匹克,1977 年)

[证] 由 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 和 $y_j(j=1,2,\cdots,m)$ 是自然数,且

$$S=x_1+x_2+\cdots+x_n=y_1+y_2+\cdots+y_m$$

满足 $S<mn$ 可知, $S\geqslant 2$, $m\geqslant 2$, $n\geqslant 2$.

我们对 $m+n$ 施用数学归纳法.

(1) 当 $m=n=2$ 时,由 $2\leqslant S<4$ 可知,$S=2$ 或 3.

若 $S=2$,则有

$$S=x_1+x_2=y_1+y_2=1+1.$$

因此去掉一部分加数,剩下的仍然是等式.

若 $S=3$,则有

$$S = x_1 + x_2 = y_1 + y_2 = 1 + 2.$$

命题同样成立.

(2) 假设命题对 $m + n - 1$ 成立.

设 $$x_1 = \max\{x_1, x_2, \cdots, x_n\},$$
$$y_1 = \max\{y_1, y_2, \cdots, y_m\}.$$

且不妨设 $$x_1 > y_1.$$

若对 $m + n$ 有等式

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_m, \quad ①$$

则 $$(x_1 - y_1) + x_2 + \cdots + x_n = y_2 + \cdots + y_m. \quad ②$$

这个等式的两边共有 $m + n - 1$ 项,我们设法证明

$$S' = y_2 + \cdots + y_m < n(m - 1).$$

事实上,由 $S = y_1 + y_2 + \cdots + y_m < my_1$ 得

$$y_1 > \frac{S}{m}.$$

所以 $$S' = S - y_1 < S - \frac{S}{m}$$
$$= S \cdot \frac{m-1}{m} < mn \cdot \frac{m-1}{m} = n(m - 1).$$

因此,由归纳假设,对 ② 式可以删去一部分加数,使剩下的部分仍然是等式,于是对 ① 式也可这样做,从而命题对 $m + n$ 成立.

15·33 考察所有仅由数码 1 和 2 构成的 10 位数. 试将它们分为两类,使得同一类中任何两个数的和的表达式中,都至少有两个数码 3.

(第 17 届莫斯科数学奥林匹克,1954 年)

[解] 设有两个由相同个数的 1 和相同个数的 2 组成的不同的 10 位数.

由于两个数不同,而含有 1 的个数相同,必然有第一个数的某一个 1 的位置上,第二个数恰是 2 的位置,在第二个数的某一个 1 的位置上,第一个数恰是 2 的位置. 当这两数相加时,我们得到的 3 不少于 2 个,符合题目的分类要求.

因此,凡是含有相同个数 1 的所有数包含在同一类中.

我们可以这样分类:

将 $\underbrace{11\cdots1}_{10个}$ 分在第一类,则 $\underbrace{11\cdots1}_{9个}2$ 与 $\underbrace{11\cdots1}_{10个}$ 相加只能得到一个 3,因而

这两个数不能在同一类，于是$\underbrace{11\cdots1}_{9个}2$在第二类.

数$\underbrace{11\cdots1}_{8个}22$显然在第一类，因为它与$\underbrace{11\cdots1}_{10个}$相加得到两个3，而与$\underbrace{11\cdots1}_{9个}2$相加只得到一个3.因此，只要包含两个2的数都在第一类.

由以上分析，我们可以这样分类：

凡有偶数个2的所有数都属于第一类，

凡有奇数个2的所有数都属于第二类.

这时，在同一类中的任何两个数或者有相同的个数2(这种情况下，我们证明了这两个数之和不少于两个3)或者一个数比另一个数至少多两个2，很明显，这两数之和不少于两个数码3.

15·34　求最大的整数$A$，使对于由1到100的全部自然数的任一排列，其中都有10个位置连续的数，其和大于或等于$A$.

(波兰数学竞赛，1970年)

[解]　设$\sigma=(a_1,a_2,\cdots,a_{100})$是从1到100的全部自然数的任一排列，令

$$A_\sigma=\max_{0\leqslant n\leqslant 90}\sum_{k=1}^{10}a_{n+k}. \qquad ①$$

于是，排列$\sigma$中有某10个连续项之和等于$A_\sigma$，而其余任何连续10项之和都不大于$A_\sigma$.

因此，本题归结为求数

$$A=\min_\sigma A_\sigma. \qquad ②$$

由数$A_\sigma$的定义有

$$A_\sigma\geqslant a_1+a_2+\cdots+a_{10},$$
$$A_\sigma\geqslant a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{20},$$
$$\cdots\cdots$$
$$A_\sigma\geqslant a_{91}+a_{92}+\cdots+a_{100}.$$

将这些不等式两边分别相加，得

$$10A_\sigma\geqslant a_1+a_2+\cdots+a_{100}$$
$$=1+2+\cdots+100=5050.$$

因此，对于任何排列$\sigma$，有不等式

$$A_\sigma\geqslant 505.$$

由 ② 又有 $\quad A \geqslant 505.$ ③

现在考察由 1 到 100 的自然数的下列一种排列 $\tau = (a_1, a_2, \cdots, a_{100})$:

100, 1, 99, 2, 98, 3, 97, 4, …, 51, 50.

这个排列可用下列关系式给出:

$$a_{2n+1} = 100 - n, \qquad (\text{当 } 0 \leqslant n \leqslant 49 \text{ 时}),$$
$$a_{2n} = n, \qquad (\text{当 } 1 \leqslant n \leqslant 50 \text{ 时}).$$

我们证明这个排列的任何 10 项之和不大于 505.

事实上,如果这连续 10 项的首项下标是偶数 $2k$,那么

$$\begin{aligned} S_1 &= a_{2k} + a_{2k+1} + \cdots + a_{2k+9} \\ &= (a_{2k} + a_{2k+2} + \cdots + a_{2k+8}) + (a_{2k+1} + a_{2k+3} + \cdots + a_{2k+9}) \\ &= [k + (k+1) + \cdots + (k+4)] + [(100-k) + (100 \\ &\quad - k - 1) + \cdots + (100 - k - 4)] \\ &= 500. \end{aligned}$$

如果这连续 10 项的首项下标是奇数 $2k+1$,那么

$$\begin{aligned} S_2 &= a_{2k+1} + a_{2k+2} + \cdots + a_{2k+10} \\ &= (a_{2k} + a_{2k+1} + \cdots + a_{2k+9}) + a_{2k+10} - a_{2k} \\ &= S_1 + (k+5) - k \\ &= 505. \end{aligned}$$

于是,我们证明了排列 $\tau$ 的任何连续 10 项之和不大于 505,并且可以等于 505.

从而由 ② 得 $\quad A \leqslant 505.$ ④

于是由 ③,④ 得 $A = 505$.

**15·35** 实数轴上任给一个开区间,长度为$\frac{1}{n}$,其中 $n$ 为正整数,求证形如$\frac{p}{q}(1 \leqslant q \leqslant n)$的既约分数至多有$\left[\frac{n+1}{2}\right]$个属于这个区间.

(第 12 届美国数学奥林匹克,1983 年)

**[证]** 把前 $n$ 个自然数

$$1, \ 2, \ \cdots, \ n$$

作如下的分类:

每个奇数 $q_i$ 和它的 $2^m$ 倍($m \in N$,且 $q_i 2^m \leqslant n$)属于同一类.

由于 $1,2,\cdots,n$ 中有 $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ 个奇数,所以上述分类共分为 $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ 类.

这样的分类法使每个自然数 $q(1 \leqslant q \leqslant n)$ 属于且仅属于其中一类,同一类中的任意两数,大数必是小数的 $2^k$ 倍.

现在证明,对于同一类中的任意两数 $q_i$ 和 $q_i 2^k$,以它们为分母的任何两个既约分数 $\frac{p_i}{q_i}$ 和 $\frac{p'_i}{q_i \cdot 2^k}$ 之差的绝对值不小于 $\frac{1}{n}$.

首先,由于 $\frac{p_i}{q_i}$ 及 $\frac{p'_i}{q_i \cdot 2^k}$ 是既约分数,且

$$\frac{p_i}{q_i} \neq \frac{p'_i}{q_i \cdot 2^k},$$

所以

$$p'_i \neq p_i \cdot 2^k,$$

从而

$$|p_i \cdot 2^k - p'_i| \geqslant 1.$$

考虑到 $q_i \cdot 2^k \leqslant n$,则有

$$\left|\frac{p_i}{q_i} - \frac{p'_i}{q_i \cdot 2^k}\right| = \left|\frac{p_i \cdot 2^k - p'_i}{q_i \cdot 2^k}\right| \geqslant \frac{1}{n}.$$

由于以同一类中任两数为分母的任两个既约分数之差的绝对值不小于 $\frac{1}{n}$,又因为所给的区间是一个长度为 $\frac{1}{n}$ 的开区间,因而开区间内任意两数之差的绝对值小于 $\frac{1}{n}$,从而以每一类中的数为分母的既约分数中,至多只能有一个属于此区间.由于前 $n$ 个自然数分为 $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ 类,所以形如 $\frac{p}{q}(1 \leqslant q \leqslant n)$ 的既约分数中至多有 $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ 个属于此开区间.

15·36　开区间 $(0,1)$ 中的每个有理数 $\frac{p}{q}$($p,q$ 是互素的正整数)被长为 $\frac{1}{2q^2}$,中心在 $\frac{p}{q}$ 的闭区间覆盖.求证 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 不在上面所述的任一闭区间内.

(第 9 届美国普特南数学竞赛,1949 年)

[证] 若结论不成立,则$\frac{\sqrt{2}}{2}$在以某个有理数$\frac{p}{q}$为中心,长为$\frac{1}{2q^2}$的闭区间内,从而有 $\delta$,使得

$$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{p}{q}+\frac{\delta}{4q^2}\quad(|\delta|\leqslant 1).$$

$$q-\frac{\delta}{2\sqrt{2}q}=\sqrt{2}p,$$

$$q^2-\frac{\delta}{\sqrt{2}}+\frac{\delta^2}{8q^2}=2p^2,$$

$$q^2-2p^2=\frac{\delta}{\sqrt{2}}-\frac{\delta^2}{8q^2}.$$

因为 $q^2-2p^2$ 是整数,则$\frac{\delta}{\sqrt{2}}-\frac{\delta^2}{8q^2}$也是整数,由于

$$\left|\frac{\delta}{\sqrt{2}}-\frac{\delta^2}{8q^2}\right|\leqslant\frac{|\delta|}{\sqrt{2}}+\frac{|\delta^2|}{8q^2}\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{8}<1,$$

所以有

$$\frac{\delta}{\sqrt{2}}-\frac{\delta^2}{8q^2}=0,$$

从而

$$q^2-2p^2=0.$$

$$\sqrt{2}=\frac{q}{p}.$$

这与$\sqrt{2}$是无理数矛盾.

15·37 把 1 到 1000000 的所有自然数分成互不相交的两类,一类是完全平方数与完全立方数的和,其余的数为另一类.问哪一类的数较多?证明你的结论.

(第 22 届全俄数学奥林匹克,1996 年)

[解] 设完全平方数与完全立方数之和的一类数的集合为 $A$,另一类数的集合为 $B$.

我们证明 $B$ 的元素多于 $A$ 的元素.

设 $n\in A, n=k^2+m^3$,其中 $k, m\in N$,显然有 $k\leqslant 1000, m\leqslant 100$.

这些能产生集合 $A$ 的元素的数对$(k, m)$不会多于 $1000\times 100=100000$.并且满足条件的数对$(k, m)$少于 100000,这是因为存在不少

数对$(k,m)$使$n>1000000$，而且不同的数对$(k,m)$可能产生相同的$n$.



因此，$A$的元素少于100000个，显然$B$的元素个数远远超过$A$的元素个数.

15·38　是否存在满足下述条件的整数$n>1$：正整数集合可以被划分成$n$个非空子集，使得从任意$n-1$个子集中，各任取一个整数．所得的$n-1$个整数之和，应属于剩下的那个子集.

（第36届国际数学奥林匹克预选题，，1995年）

[解]　我们证明不存在题目要求的整数$n$.

显然$n\neq2$.假设$n\geqslant3$.设正整数$a\in A_1,b\in A_1$，且$a\neq b$.

又设$c$是$A_1$中的任意一个正整数，它也可以与$a$或$b$相同.

假设$a+c,b+c$属于不同的子集.

设正整数集合分成$n$个非空子集$A_1,A_2,\cdots,A_n$.

(1)$a+c$与$b+c$一个属于$A_1$，另一个不属于$A_1$的情形.

设$a+c\in A_1,b+c\in A_3$.

在子集$A_i$中选取$a_i,i=3,4,\cdots,n$，则

$$b+a_3+a_4+\cdots+a_n\in A_2$$

于是
$$(a+c)+(b+a_3+\cdots+a_n)+a_4+\cdots+a_n\in A_3. \quad ①$$

另一方面　$a+a_3+a_4+\cdots+a_n\in A_2$，

于是
$$(a+a_3+a_4+\cdots+a_n)+(b+c)+a_4+\cdots+a_n\in A_1. \quad ②$$

①与②矛盾.

(2)$a+c$与$b+c$都不属于$A_1$

设$a+c\in A_2,b+c\in A_3$，则

$$b+(a+c)+a_4+\cdots+a_n\in A_3, \quad ③$$

$$a+(b+c)+a_4+\cdots+a_n\in A_2. \quad ④$$

③与④矛盾.

这表明$a+c$与$b+c$必定属于同一子集.

在子集$A_i$中选取$x_i,i=1,2,\cdots,n$.

记$y_i=S-x_i,S=x_1+x_2+\cdots+x_n$.

则　$y_i\in A_i$.不妨假定$S\in A_1$.如果$x_i=y_i$，则由前面所证

$$x_i+y_i=2x_i=S\in A_1.$$

如果 $x_i \neq y_i$，则由前面所证 $2x_i = x_i + x_i$ 与 $x_i + y_i = S$ 应属于同一子集.

由于已假定 $S \in A_1$，则 $A_1$ 应包括全部偶数. 而 $A_2, A_3, \cdots, A_n$ 都由奇数构成.

如果 $n$ 是偶数，则由 $2 \in A_1, x_i \in A_i, i = 3, \cdots, n$ 是奇数，于是 $2 + x_3 + \cdots + x_n \in A_2$ 是一个偶数，出现矛盾.

如果 $n$ 是奇数，则 $x_1 + x_3 + \cdots + x_n \in A_2$ 应为奇数，这表明 $x_1$ 必定是偶数，于是 $A_1$ 恰好由全部偶数组成，通过变动 $x_1$，不难证明从某一点开始，所有的奇数必定都属于 $A_2$，同时又都属于 $A_3$，矛盾.

所以，无整数 $n$，满足题目所要求的条件.

15·39　确定并证明是否有整数集的子集 $X$ 具有下面的性质：对任意整数 $n$，恰有一组整数 $a, b \in X$，使 $a + 2b = n$.

（第 25 届美国数学奥林匹克，1996 年）

[解]　这样的子集 $X$ 存在.

首先令 $X_2 = \{0, 1\}$.

假设已有 $X_k = \{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$，使得 $a_i + 2a_j (1 \leqslant i, j \leqslant k)$ 互不相同.

令 $S_k = \{a_i + 2a_j | 1 \leqslant i, j \leqslant k\}$.

取任一不属于 $S_k$ 的整数 $n$，取正整数 $a_{k+1}$，又令 $a_{k+z} = -2a_{k+1} + n$.

只要 $a_{k+1}$ 充分大，对 $1 \leqslant i, j, s, t \leqslant k$，有

$$3a_{k+1} > a_s + 2a_{k+1} > a_{k+1} + 2a_i > n > a_{k+2} + 2a_j > a_{k+1} + 2a_{k+2} > a_t + 2a_{k+2} > 3a_{k+2}.$$

而且 $a_{k+1} + 2a_i$ 大于 $S_k$ 中的一切正整数，$a_{k+2} + 2a_j$ 小于 $S_k$ 中的一切负整数，于是，对

$$X_{k+2} = \{a_{k+1}, a_{k+2}\} \cup X_k$$

中，任二数 $a, b, a + 2b$ 互不相同，记

$$X = X_2 \cup X_4 \cup \cdots \cup X_{2k} \cup X_{2k+2} \cup \cdots$$

则集合 $X$ 满足要求.

15·40　设 $p$ 是一个奇素数，考虑集合 $\{1, 2, \cdots, 2p\}$ 的满足以下两个条件的子集 $A$：

(1) $A$ 恰有 $p$ 个元素；

(2)$A$ 中所有元素的和可被 $p$ 整除.

试求所有这样的子集 $A$ 的个数.

（第 36 届国际数学奥林匹克，1995 年）



**[解 1]** 记 $W=\{1,2,\cdots,2p\}$,

$U=\{1,2,\cdots,p\}$,

$V=\{p+1,p+2,\cdots,2p\}$.

除 $U$ 和 $V$ 这两个子集之外，$W$ 的其他 $p$ 元子集 $E$ 都使得

$$E\cap V\neq\varnothing,E\cap U\neq\varnothing. \qquad (※)$$

若 $W$ 的两个满足条件(※)的 $p$ 元子集 $S$ 和 $T$ 适合下面的条件:

(i) $S\cap V=T\cap V$,

(ii)只要编号适当，$S\cap U$ 的元素 $S_1,S_2,\cdots,S_m$ 和 $T\cap U$ 的元素 $t_1,t_2,\cdots,t_m$ 对适当的 $k\in\{0,1,\cdots,p-1\}$，满足同余式组

$$s_i-t_i\equiv k(\bmod p),i=1,2,\cdots,m.$$

我们就约定这两个子集 $S$ 和 $T$ 归入同一类.

对于同一类中的不同子集显然有 $k\neq0$，因而有

$$\sum_{i=1}^{p}s_i-\sum_{i=1}^{p}t_i\equiv mk\not\equiv0\pmod p.$$

对于同一类中的不同子集，它的各自元素之和，对模 $p$ 的余数各不相同，因此每一类中恰含 $p$ 个子集，其中仅有一个适合题目中的条件(2).

综上所述，在 $W=\{1,2,\cdots,2p\}$ 的 $C_{2p}^{p}$ 个 $p$ 元子集当中，除 $U$ 和 $V$ 这两个特殊的子集外，每 $p$ 个子集分成一类，每类恰有一个子集满足条件(2).

据此可以算出，$W=\{1,2,\cdots,2p\}$ 的适合条件(1)和(2)的子集总数为

$$\frac{1}{p}(C_{2p}^{p}-2)+2.$$

**[解 2]** 为考察 $W=\{1,2,\cdots,2p\}$ 的子集，我们构造如下的生成函数:

$$\begin{aligned}g(t,x)&=(t+x)(t+x^2)\cdots(t+x^{2p})\\&=\sum_{k,m}a_{k,m}t^kx^m.\end{aligned}$$

其中 $a_{k,m}$ 是展开式中 $t^k x^m$ 的系数，它表示 $W$ 的适合以下条件($\alpha$)和($\beta$)的子集的个数.

($\alpha$)该子集恰含 $2p-k$ 个元素；

($\beta$)该子集的元素之和等于 $m$.

记 $\varepsilon=e^{i\frac{2\pi}{p}}$，且 $E=\{\varepsilon^0,\varepsilon^1,\cdots,\varepsilon^{p-1}\}$，则有

$$\begin{aligned}&\sum_{t\in E}\sum_{x\in E}g(t,x)\\&=\sum_{t\in E}\Big[\sum_{k,m}a_{k,m}t^k\Big(\sum_{x\in E}x^m\Big)\Big]\\&=\sum_{t\in E}\Big(\sum_{k,m,p\mid m}a_{k,m}t^k\Big)p\\&=\Big(\sum_{p\mid k,p\mid m}a_{k,m}\Big)p^2.\end{aligned}\qquad ①$$

在计算中用到了这样一个事实：

$$\sum_{j=0}^{p-1}\varepsilon^{jn}=\begin{cases}0,若\ p\nmid n\\p,若\ p\mid n.\end{cases}$$

直接利用 $g(t,x)$ 的定义式(不借助于展开式)，用另一种方法计算同一和式，有

$$\begin{aligned}&\sum_{t\in E}\sum_{x\in E}g(t,x)\\&=\sum_{t\in E}\sum_{x\in E}(t+x)(t+x^2)\cdots(t+x^{2p})\\&=\sum_{t\in E}\Big[(t+1)^{2p}+\sum_{x\in E\setminus\{1\}}(t+x)\cdots(t+x^{2p})\Big]\\&=\sum_{t\in E}[(t+1)^{2p}+(p-1)(t^p+1)^2]\\&=\sum_{t\in E}(t+1)^{2p}+4p(p-1)\\&=\sum_{t\in E}(1+C_{2p}^1t+\cdots+C_{2p}^{2p}t^{2p})+4p(p-1)\\&=p(1+C_{2p}^p+1)+4p(p-1)\\&=p(C_{2p}^p+4p-2).\end{aligned}\qquad ②$$

比较这两种方法计算的结果①和②，得

$$\begin{aligned}\sum_{p\mid k,p\mid m}a_{k,m}&=\frac{1}{p}(C_{2p}^p+4p-2)\\&=\frac{1}{p}(C_{2p}^p-2)+4.\end{aligned}$$

上式左端除去 $a_{0,p(p+1)}=a_{2p,0}=1$ 这两项外，其余各项之和就是满足条件(1)和(2)的子集的个数，因此，所求的子集个数为

$$\sum_{p \nmid m} a_{k,m} = \sum_{p \mid k,\, p \nmid m} a_{k,m} - 2 = \frac{1}{p}(C_{2p}^{p} - 2) + 2.$$

15·41　求证存在无穷多个自然数 $n$，使得可将 $1,2,3,\cdots,3n$ 列成数表

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{matrix}$$

满足如下两个条件：

(1) $a_1+b_1+c_1=a_2+b_2+c_2=\cdots=a_n+b_n+c_n$ 且为 6 的倍数.

(2) $a_1+a_2+\cdots+a_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=c_1+c_2+\cdots+c_n$ 且为 6 的倍数.

(第 12 届中国中学生数学冬令营，1997 年)

**[证 1]**　将满足题设中两个条件的自然数 $n$ 的集合记作 $S$，

设 $n\in S$，由条件(1)，(2)推知，存在自然数 $s$ 和 $t$，使得

$$\begin{cases} \dfrac{3n(3n+1)}{2}=6sn, \\ \dfrac{3n(3n+1)}{2}=18t. \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} 3n+1=4s \\ n(3n+1)=12t. \end{cases}$$

所以有
$$\begin{cases} n\equiv 1 \pmod 4. \\ n\equiv 0 \pmod 3. \end{cases}$$

因此 $n$ 必具有形式

$$n=12k+9,\ k=0,1,\cdots. \qquad ①$$

首先证明 $9\in S$. 我们这样进行构造，由于

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 3 & 0 & 6 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 6 \\ 5 & 3 & 7 \\ 9 & 4 & 2 \end{pmatrix} = A_3.$$

容易看出 $A_3$ 的 3 个行之和，3 个列之和都是 15. 并且 $A_3$ 的 9 个元素分别为 $1,2,\cdots,9$. 现记 $A_3$ 各行的元素为

$$\alpha(3)=(1,8,6),\quad \beta(3)=(5,3,7),\quad \gamma(3)=(9,4,2).$$

构造 $3\times 9$ 的数表 $A_9$ 如下：

$$A_9=\begin{pmatrix}\alpha(3) & \beta(3)+18 & \gamma(3)+9\\ \beta(3)+9 & \gamma(3) & \alpha(3)+18\\ \gamma(3)+18 & \alpha(3)+9 & \beta(3)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 8 & 6 & 23 & 21 & 25 & 18 & 13 & 11\\ 14 & 12 & 16 & 9 & 4 & 2 & 19 & 26 & 24\\ 27 & 22 & 20 & 10 & 17 & 15 & 5 & 3 & 7\end{pmatrix}$$

$A_9$ 的元素恰为 $1,2,\cdots,27$. 并且

各列之和均为 $15+9+18=42\equiv 0 \pmod 6$,

各行之和均为 $3(15+9+18)=126\equiv 0 \pmod 6$.

所以 $9\in S, S\neq\varnothing$.

假设 $m\in S$,我们来证明 $9m\in S$.

由于 $m\in S$,故可将 $1,2,\cdots,3m$ 列成 $3\times m$ 的数表 $A_m$,使得各列之和均为 $6u$,各行之和均为 $6v$,其中 $u,v$ 均为自然数.

现将 $A_m$ 的第一行记作 $\alpha(m)$,第二行记作 $\beta(m)$,第三行记作 $\gamma(m)$,并构造 $3\times 3m$ 的数表 $A_{3m}$ 如下：

$$A_{3m}=\begin{pmatrix}\alpha(m) & \beta(m)+6m & \gamma(m)+3m\\ \beta(m)+3m & \gamma(m) & \alpha(m)+6m\\ \gamma(m)+6m & \alpha(m)+3m & \beta(m)\end{pmatrix},$$

其中 $\beta(m)+3m$ 表示将 $\beta(m)$ 中的每一个元素都加上 $3m$,其余记号含义类似.

于是,不难看出,$A_{3m}$ 的 $9m$ 个元素恰为 $1,2,\cdots,9m$,并且各列之和均为 $6u+9m$,各行之和均为 $18v+9m$.

再将 $A_{3m}$ 的第一行,第二行,第三行分别记作 $\alpha(3m),\beta(3m),\gamma(3m)$,并构造 $3\times 9m$ 的数表 $A_{9m}$ 如下：

$$A_{9m}=\begin{pmatrix}\alpha(3m) & \beta(3m)+18m & \gamma(3m)+9m\\ \beta(3m)+9m & \gamma(3m) & \alpha(3m)+18m\\ \gamma(3m)+18m & \alpha(3m)+9m & \beta(3m)\end{pmatrix},$$

不难看出,$A_{9m}$ 的 $27m$ 个元素恰为 $1,2,\cdots,27m$,并且

各列之和均为 $6u+36m$ 为 6 的倍数.

各行之和均为

$$3(18v+9m^2)+3m\cdot 18m+3m\cdot 9m=54v+108m^2$$

$\equiv 0 \pmod 6$.

这就证得:只要 $m \in S$,则必有 $9m \in S$.

综合上述,知 $\{9^k \mid k=1,2,\cdots\} \subset S$,所以 $S$ 为无穷集合.

**[证 2]** 我们证明$\{12k+9 \mid k \equiv 2 \pmod 9\}$.

设 $k \equiv 2 \pmod 9$,记 $m=4k+3$.

我们先将 $1,2,\cdots,3m$ 列成如下的 $3\times m$ 的数表 $A_m$:

$$A_m=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 & \cdots & 12k-2 & 12k+1 & 12k+4 & 12k+7 \\ 6k+5 & 12k+8 & 6k+2 & 12k+5 & \cdots & 6k+11 & 5 & 6k+8 & 2 \\ 12k+9 & 6k+3 & 12k+6 & 6k & \cdots & 6 & 6k+9 & 3 & 6k+6 \end{pmatrix}$$

不难看出,$A_m$ 的各列之和相等,均为 $18k+15$,$A_m$ 的第一行之和为$(4k+3)(6k+4)$,第二行之和为$(4k+3)(6k+5)=\dfrac{m(3m+1)}{2}$,第三行之和为$(4k+3)(6k+6)$.

由于 $k \equiv 2 \pmod 9$,所以 $l=\dfrac{2k+5}{9}$为正整数.

$A_m$ 的第一行是首项$a_1=1$,公差 $d_1=3$ 的等差数列,所以它的第 $2l$ 项为

$$a_{2l}=1+3(2l-1)=6l-2=\frac{4(k+1)}{3}.$$

$A_m$ 的第三行中,$c_2,c_4,\cdots,c_{m-1}$构成公差 $d_3=-3$,首项 $c_2=6k+3$ 的等差数列,所以

$$c_{2l}=6k+3-3(l-1)=6k+6-\frac{2k+5}{3}$$
$$=\frac{16k+13}{3}.$$

考察第三行与第一行中第 $2l$ 项的差

$$c_{2l}-a_{2l}=\frac{12k+9}{3}=4k+3.$$

因此,只要对换 $a_{2l}$与$c_{2l}$的位置,便可使其三个行之和全部相等,都为

$$(4k+3)(6k+5)=\frac{m(3m+1)}{2}.$$

并且各列之和保持不变,即都等于 $18k+15$.

现将经过上述对换后的数表记为 $B_m$,并将 $B_m$ 的第一行记为 $\alpha(m)$,第二行记为 $\beta(m)$,第三行记为 $\gamma(m)$. 再构造 $3\times 3m=3\times(12k$

+9)的数表 $A_{3m}$ 如下：

$$A_{3m}=\begin{pmatrix}\alpha(m) & \beta(m)+6m & \gamma(m)+3m\\ \beta(m)+3m & \gamma(m) & \alpha(m)+6m\\ \gamma(m)+6m & \alpha(m)+3m & \beta(m)\end{pmatrix},$$

不难看出，$A_{3m}$ 的所有元素恰为 $1,2,\cdots,12k+9$，其各列之和、各行之和分别相等，且

$$各列之和=18k+15+9m=54k+42\equiv 0 \pmod 6$$

$$\begin{aligned}各行之和&=\frac{3m(3m+1)}{2}+6m^2+3m^2\\&=3(4k+3)(6k+5)+9(4k+3)^2\\&=6(4k+3)(9k+7).\\&=0 \pmod 6.\end{aligned}$$

这表明，只要 $k\equiv 2 \pmod 9$，就有 $12k+9\in S$.

所以 $\{12k+9 \mid k\equiv 2 \pmod 9\}\subset S$，$S$ 为无穷集合.

# 附录

## 数学奥林匹克中常用的数论知识

**一.整除**

1.定义:对于整数 $a,b(b\neq 0)$,存在整数 $q$,满足 $a=bq$ 就叫做 $a$ 能被 $b$ 整除,记作 $b\mid a$.

其中 $a$ 叫做 $b$ 的倍数,$b$ 叫做 $a$ 的约数(因数),若 $b\neq\pm 1$,则 $b$ 叫做 $a$ 的真约数.

若 $a$ 不能被 $b$ 整除,则记作 $b\nmid a$.

如果 $a^t\mid b$, $a^{t+1}\nmid b$, $t\in N$,记作 $a^t\parallel b$.

2.关于整除的一些简单性质:

(1) $b\mid 0,\ \pm 1\mid a, a\mid a.(a\neq 0)$.

(2) 若 $b\mid a, a\neq 0$,则 $1\leqslant |b|\leqslant |a|$.

(3) 若 $c\mid b, b\mid a$,则 $c\mid a$.

(4) 若 $b\mid a, c\neq 0$,则 $bc\mid ac$.

(5) 若 $c\mid a, c\mid b$,则 $c\mid ma+nb$. $(m,n\in Z)$.

(6) 若 $\sum\limits_{i=1}^{k}a_i=0$, $b$ 能整除 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 中的 $k-1$ 个,则 $b$ 能整除另一个.

**二.同余**

(一) 同余.

1. 定义：设 $m$ 为正整数，若整数 $a$ 和 $b$ 被 $m$ 除的余数相同，则称 $a$ 和 $b$ 对模 $m$ 同余. 记作

$$a \equiv b \pmod{m}.$$

2. 同余的基本性质：

(1) $a \equiv b \pmod{m} \Longleftrightarrow m \mid b - a$.

(2) $a \equiv b \pmod{m} \Longleftrightarrow b = km + a \quad (k \in Z)$.

(3) $a \equiv a \pmod{m}$.

(4) 若 $a \equiv b \pmod{m}$，则 $b \equiv a \pmod{m}$.

(5) 若 $a \equiv b \pmod{m}$， $b \equiv c \pmod{m}$，则 $a \equiv c \pmod{m}$.

(6) 若 $a \equiv b \pmod{m}$， $c \equiv d \pmod{m}$，则

$$a \pm c \equiv b \pm d \pmod{m},$$

$$ac \equiv bd \pmod{m},$$

$$a^n \equiv b^n \pmod{m} \quad (n \in N).$$

(7) 若 $ac \equiv bc \pmod{m}$，$(c, m) = d$，则

$$a \equiv b \left(\mathrm{mod}\ \frac{m}{d}\right).$$

其中符号 $(c, m)$ 表示 $c, m$ 的最大公约数.

特别地，当 $(c, m) = 1$ 时，若 $ac \equiv bc \pmod{m}$，则 $a \equiv b \pmod{m}$.

(二) 同余类和完全剩余系.

1. 同余类：由关于模 $m$ 同余的数组成的集合，每一个集合叫做关于模 $m$ 的同余类(或叫做关于模 $m$ 的剩余类).

由于任何整数被 $m$ 除的余数只能是 $0, 1, 2, \cdots, m-1$ 这 $m$ 种情形，所以整数集可以按对模 $m$ 同余的关系分成 $m$ 个子集：

$$A_0, A_1, A_2, \cdots, A_{m-1}.$$

其中 $A_i = \{qm + i \mid m$ 为模, $q \in Z, 0 \leqslant i < m\}$. $i = 0, 1, 2, \cdots, m-1$.

所有的 $A_i (i = 0, 1, 2, \cdots, m-1)$ 满足

$$\bigcup_{i=0}^{m-1} A_i = Z, \quad \bigcap_{i=0}^{m-1} A_i = \varnothing.$$

2. 完全剩余系：从模 $m$ 的 $m$ 个同余类 $A_0, A_1, A_2, \cdots, A_{m-1}$ 中，每一类 $A_i$ 取一数 $a_i$，则 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{m-1}$ 叫做模 $m$ 的一个完全剩余系(简称 $m$ 的完系).

最简单的模 $m$ 的完全剩余系是 $0,1,2,\cdots,m-1$. 也叫做模 $m$ 的最小非负完系.

数论卷

显然 $m$ 个相继整数构成模 $m$ 的一个完系.

**三. 素数与合数**

1. 一个大于 1 的整数,如果只有 1 和它本身做为它的约数,这样的正整数叫做素数(也叫质数). 如果除了 1 和它本身之外还有其他的正约数,这样的正整数叫做合数.

1 既不是素数也不是合数.

因此,自然数集 $N$ 满足 $\quad N=\{1\}\cup\{素数\}\cup\{合数\}$.

2. 大于 1 的整数的所有真约数中,最小的正约数一定是素数.

3. 合数 $a$ 的最小素约数不大于 $\sqrt{a}$.

4. 素数有无穷多个.

5. 不存在这样的多项式

$$f(n)=\sum_{i=0}^{m}a_in^i$$

使得对任意的自然数 $n$, $f(n)$ 都是素数.

6. 威尔逊定理: $p$ 为素数的充分必要条件是

$$(p-1)!\equiv -1 \pmod p.$$

**四. 素因数分解**

1. 素因数分解定理(整数的惟一分解定理):每一个大于 1 的整数都能分解成素因数连乘积的形式,并且如果把这些素因数按照由小到大的顺序排列(相同因数的乘积写成幂的形式),这种分解方法是惟一的.

2. 整数 $n(n>1)$ 的标准分解式

$$n=\prod_{i=1}^{m}p_i^{\alpha_i} \qquad ①$$

其中 $p_i$ 为素数, $\alpha_i$ 为正整数, $i=1,2,\cdots,m$.

3. 约数个数定理:设 $d(n)=\sum_{d\mid n}1$ 表示大于 1 的整数 $n$ 的所有正约数的个数, $n$ 的标准分解式为 ① 式,则

$$d(n)=\prod_{i=1}^{m}(1+\alpha_i).$$

4.约数和定理:设 $\sigma(n)=\sum_{d|n} d$ 表示大于1的整数 $n$ 的所有正约数的和,$n$ 的标准分解式为 ① 式,则

$$\sigma(n)=\prod_{i=1}^{m}\frac{p_i^{\alpha_i+1}-1}{p_i-1}.$$

5.在 $n$!的标准分解式中,素因数 $p$ 的方幂为 $\sum_{r=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^r}\right]$.

其中记号[$x$]表示不超过 $x$ 的最大整数.

**五.公约数和公倍数**

1.公约数和最大公约数.

(1)若 $c \mid a_1, c \mid a_2, \cdots, c \mid a_n$,则 $c$ 叫 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的公约数.

$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的所有公约数中最大的一个叫 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的最大公约数.记作$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$.

(2)若 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的标准分解式为

$$a_1=\prod_{i=1}^{m} p_i^{\alpha_i},$$

$$a_2=\prod_{i=1}^{m} p_i^{\beta_i},$$

$$\cdots\cdots$$

$$a_n=\prod_{i=1}^{m} p_i^{\delta_i}.$$

其中 $p_i$ 为素数,$\alpha_i, \beta_i, \cdots, \delta_i$ 为非负整数,$i=1,2,\cdots,m$.则

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n)=\prod_{i=1}^{m} p_i^{t_i},$$

其中 $t_i=\min\{\alpha_i, \beta_i, \cdots, \delta_i\}$.

(3)如果 $a$ 是 $b$ 的倍数,那么 $a$ 和 $b$ 的公约数的集合与 $b$ 的约数集合相等.

(4)如果 $a$ 是 $b$ 的倍数,则$(a, b)=b$.

(5)设 $a$ 和 $b$ 是不同时等于0的整数,且 $d=ax_0+by_0$ 是形如 $ax+by$($x, y$ 是整数)的数中的最小正数,则 $d=(a, b)$.

(6)数 $a$ 和 $b$ 的公约数集合与它的最大公约数的约数集合相等.

(7)设 $m$ 是任意正整数,则 $(am, bm)=(a, b)m$.

(8) 设 $n$ 是 $a$ 和 $b$ 的一个公约数,则 $\left(\frac{a}{n},\frac{b}{n}\right)=\frac{(a,b)}{n}$.

(9) 设正整数 $a$ 和 $b(a>b)$ 满足等式 $a=bq+r,\quad 0\leqslant r<b$,则 $(a,b)=(b,r)$.

由此可得到求 $a,b$ 最大公约数的辗转相除法:

由 $\quad a=bq_1+r_1,\quad 0\leqslant r_1<b$,

若 $r_1=0$,则 $(a,b)=b$.

若 $r_1\neq 0$,则又可用 $r_1$ 去除 $b$,得

$$b=r_1q_2+r_2, 0\leqslant r_2<r_1,$$

若 $r_2=0$,则 $(a,b)=(b,r_1)=r_1$.

若 $r_2\neq 0$,再用 $r_2$ 去除 $r_1$,得

$$r_1=r_2q_3+r_3,\quad 0\leqslant r_3<r_2.$$

如此继续下去,由于

$$b>r_1>r_2>r_3>\cdots$$

以及 $r_i(i=1,2,\cdots)$ 是非负整数,则一定在进行到某一次时,例如第 $n+1$ 次得到 $r_{n+1}=0$,但由于 $r_n\neq 0$,则有

$$(a,b)=(b,r_1)=(r_1,r_2)=\cdots=(r_{n-1},r_n)=r_n.$$

用此法还可以求(5)中形如 $ax+by$ 的最小正数 $d=ax_0+by_0$.

2. 公倍数和最小公倍数.

(1) 若 $a_1\mid b,\quad a_2\mid b\quad,\cdots,\quad a_n\mid b$,则 $b$ 叫 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的公倍数.

$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的所有公倍数中最小的一个叫 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的最小公倍数.记作 $[a_1,a_2,\cdots,a_n]$.

(2) 若 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的标准分解式为

$$a_1=\prod_{i=1}^{m}p_i^{\alpha_i},$$

$$a_2=\prod_{i=1}^{m}p_i^{\beta_i},$$

$$\cdots\cdots$$

$$a_n=\prod_{i=1}^{m}p_i^{\delta_i}.$$

其中 $p_i$ 为素数,$\alpha_i,\beta_i,\cdots,\delta_i$ 为非负整数,$i=1,2,\cdots,m$,则

$$[a_1,a_2,\cdots,a_n]=\prod_{i=1}^{m}p_i^{r_i}.$$

其中 $r_i=\max\{\alpha_i,\beta_i,\cdots,\delta_i\}$.

(3) $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的最小公倍数是它们的任一公倍数的约数.

(4) $[a,b]=\dfrac{ab}{(a,b)}$.

**六. 互素数、费马小定理和孙子定理**

1. 互素数.

(1) 若 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)=1$,就叫做 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 互素(也叫做互质). 这 $n$ 个数叫互素数(互质数).

特别地,1 和任何整数互素;相邻两个整数互素;相邻两个奇数互素;对素数 $p$,若 $p$ 不能整除 $a$,则 $p$ 与 $a$ 互素.

(2) 若 $(a,b)=1$,则 $(a\pm b,a)=1$, $(a\pm b,ab)=1$.

(3) 若 $(a,b)=1$, $a\mid bc$,则 $a\mid c$.

(4) 若 $a\mid c,b\mid c$, $(a,b)=1$,则 $ab\mid c$.

(5) 若 $(a,b)=1$,则 $(b,ac)=(b,c)$.

(6) 若 $(a,b)=1$, $c\mid a$, 则 $(c,b)=1$.

(7) 若 $(a,b)=1$,则 $(a,b^k)=1$.

(8) 若 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 中的每一个与 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 中的每一个互素,则 $(a_1a_2\cdots a_m,\ b_1b_2\cdots b_n)=1$.

2. 欧拉函数:小于 $m$ 且与 $m$ 互素的正整数的个数叫做欧拉函数,记作 $\varphi(m)$.

若 $m=\prod\limits_{i=1}^{n}p_i^{\alpha_i}$,则

$$\varphi(m)=m\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{p_i}\right).$$

其中 $p_i$ 是素数,$\alpha_i$ 是正整数,$(i=1,2,\cdots,n)$.

当 $m$ 为素数时,$\varphi(m)=m-1$.

3. 欧拉定理和费马小定理:

(1) 欧拉定理:设 $m\geqslant 2$,且 $(a,m)=1$, $\varphi(m)$ 为欧拉函数,则

$$a^{\varphi(m)}\equiv 1\pmod{m}.$$

(2) 费马小定理:设 $p$ 是素数,且 $(a,p)=1$,则

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod p.$$

费马小定理是欧拉定理当 $m$ 为素数的特例.



4.孙子定理:设 $m_1, m_2, \cdots, m_k$ 是 $k$ 个两两互素的正整数.则同余式组

$$\begin{aligned} x &\equiv b_1 \pmod{m_1}, \\ x &\equiv b_2 \pmod{m_2}, \\ &\cdots\cdots \\ x &\equiv b_k \pmod{m_k}. \end{aligned}$$

有惟一解 $x \equiv M_1'M_1b_1 + M_2'M_2b_2 + \cdots + M_k'M_kb_k \pmod M$.

其中

$$\begin{aligned} &M = m_1m_2\cdots m_k, \\ &M_i = \frac{M}{m_i}, i = 1,2,\cdots,k, \\ &M_i'M_i \equiv 1 \pmod{m_i}, \quad i = 1,2,\cdots,k. \end{aligned}$$

孙子定理又叫中国剩余定理.

**七.奇数和偶数**

1.若一个整数能被 2 整除,则这个整数叫偶数,若一个整数被 2 除余 1,则这个整数叫奇数.

奇数集合和偶数集合都是以 2 为模的同余类.

2.奇数个奇数的和(或差)是奇数,偶数个奇数的和(或差)是偶数.

任意多个偶数的和(或差)为偶数.

一个奇数与一个偶数的和(或差)是奇数.

两个整数的和与差有相同的奇偶性.

3.任意多个奇数的积是奇数.

若任意多个整数中至少有一个偶数,则它们的积是偶数.

**八.完全平方数**

1.若 $a$ 是整数,则 $a^2$ 叫做 $a$ 的完全平方数.

2.完全平方数的个位数只能是 0,1,4,5,6,9.

3.奇数的平方的十位数是偶数.

4.个位数是 5 的平方数,其十位数是 2,百位数是偶数.

5.如果一个完全平方数的个位数是 6,那么它的十位数是奇数.

6. 偶数的平方能被 4 整除,奇数的平方被 4 除余 1.

7. 偶数的平方被 8 除余 0 或 4. 奇数的平方被 8 除余 1.

8. 若一个整数能被 3 整除,则这个数的平方能被 3 整除,若一个整数不能被 3 整除,则这个数的平方被 3 除余 1.

9. 若一个整数能被 5 整除,则这个数的平方能被 5 整除,若一个整数不能被 5 整除,则这个数的平方被 5 除余 + 1 或 − 1.

10. 把完全平方数的各位数码相加,如果所得到的和不是一位数,再把这个和的各位数码相加,直到一位数为止,这个一位数只能是 0,1,4,7,9.

11. 两个相邻完全平方数之间不可能有完全平方数.

12. 完全平方数的所有正约数个数为奇数,并且反过来也成立.

13. 如果素数 $p$ 是一个完全平方数的约数,那么 $p^2$ 也是这个完全平方数的约数.

**九. 整数的可除性特征**

1. 一个整数能被 2 整除的充分必要条件是这个数的个位数是偶数.

2. 一个整数能被 4 整除的充分必要条件是这个数的末两位数能被 4 整除.

3. 一个整数能被 5 整除的充分必要条件是这个数的个位数是 0 或 5.

4. 一个整数能被 3 整除的充分必要条件是这个数的各位数码之和能被 3 整除.

5. 一个整数能被 9 整除的充分必要条件是这个数的各位数码之和能被 9 整除.

6. 一个整数能被 11 整除的充分必要条件是这个数的奇位数码之和与偶数数码之和的差能被 11 整除.

7. 一个整数能被 $10n-1$($n$ 为自然数)整除的充分必要条件是把这个数的个位数截去以后,再加上这个个位数的 $n$ 倍,它的和能被 $10n-1$ 整除.

即把 $A$ 写成 $A=10x+y, y\in\{0,1,2,\cdots,9\}$,

则 $$10n-1 \mid A \Longleftrightarrow 10n-1 \mid x+ny.$$

由此可判断整数 $A$ 能否被 9,19,29,39,… 整除.

8. 一个整数能被 $10n+1$($n$ 为自然数)整除的充分必要条件是把这个数的个位数截去之后,再减去这个个位数的 $n$ 倍,它的差能被 $10n+1$ 整除.

即把 $A$ 写成 $A=10x+y, y\in\{0,1,2,\cdots,9\}$.

则 $$10n+1\mid A \Longleftrightarrow 10n+1\mid x-ny.$$

由此可判断整数 $A$ 能否被 $11,21,31,41,\cdots$ 整除.

**十. 十进制记数法**

1. 数 $A$ 的十进制表示为

$$A=\sum_{i=0}^{n}a_i10^i$$

其中 $a_i\in\{0,1,2,\cdots,9\}$, $i=0,1,\cdots,n-1$, $a_n\in\{1,2,\cdots,9\}$.

2. $A$ 的 $n$ 次幂的个位数等于 $A$ 的个位数的 $n$ 次幂的个位数,即

$$A^n\equiv a_0{}^n \pmod{10}.$$

3. $A^n$ 的个位数以 4 为周期循环出现.

4. $A$ 与它的各位数码之和 $S(A)=\sum_{i=0}^{n}a_i$ 对模 9 同余. 即

$$A\equiv\sum_{i=0}^{n}a_i \pmod 9.$$

5. $A$ 的各位数码之和 $S(A)=\sum_{i=0}^{n}a_i$ 满足

$$S(A+B)\leqslant S(A)+S(B).$$
$$S(A\cdot B)\leqslant S(A)\cdot S(B).$$

6. 若 $a$ 和 $b$ 为任意非负整数,则 $\frac{1}{2^a5^b}$ 的小数展开式是有限的.

7. 若 $\frac{1}{n}$ 具有有限小数展开式,则 $n=2^a5^b$,其中 $a,b$ 为非负整数.

8. 在 $\frac{1}{n}$ 的十进制小数展开式中,循环节长不大于 $n-1$.

9. 若 $(n,10)=1$,则 $\frac{1}{n}$ 的循环节长为 $r$,$r$ 是满足

$$10^r\equiv1 \pmod n$$

的最小正整数.

**十一. $k$ 进制记数法**

1. 设 $k\geqslant2$ 为任一整数(称为基),则任一十进制整数 $A$ 可惟一地

用基$k$表示,即可写成如下的形式:

$$A = d_0 + d_1 k + d_2 k^2 + \cdots + d_n k^n = \sum_{i=0}^{n} d_i k^i.$$

其中 $d_i \in \{0,1,2,\cdots,k-1\}, i = 0,1,2,\cdots,n-1$, $d_n \in \{1,2,\cdots,k-1\}$.

2. $A$ 的$k$进制表示可记为

$$A = (\overline{d_n d_{n-1} \cdots d_1 d_0})_k.$$

3. 设$B$为正的纯小数,则$B$可以惟一地用基$k$表示,即可写成如下的形式:

$$B = d_{-1} k^{-1} + d_{-2} k^{-2} + \cdots + d_{-n} k^{-n} + \cdots$$

其中 $d_{-i} \in \{0,1,2,\cdots,k-1\}$, $i = 1,2,\cdots,n,\cdots$

若$B$为有限小数,则上式为有限项,若$B$为无限小数,则上式为无限项.

**十二.不定方程**

1. 二元一次不定方程 $ax + by = c$.

(1) 不定方程 $ax + by = c$ ($a,b,c$为整数)有整数解的充分必要条件是$(a,b) \mid c$.

(2) 若$(a,b) = 1$,且$(x_0, y_0)$是不定方程 $ax + by = c$ 的一组整数解,则

$$\begin{cases} x = x_0 + bt \\ y = y_0 - at, \end{cases} \qquad (t \text{ 是整数})$$

是方程的全部整数解.

2. 不定方程 $x^2 + y^2 = z^2$ 的整数解.

(1) 若 $x = a$, $y = b$, $z = c$($a,b,c$为正整数)是方程 $x^2 + y^2 = z^2$ 的一组解,且$(a,b) = 1$,就称这组解为方程的一组基本解.

(2) 若 $x = a$, $y = b$, $z = c$ 为方程$x^2 + y^2 = z^2$ 的一组基本解,则$a$和$b$中恰有一数为偶数,$c$为奇数.

(3) 设 $x = a$, $y = b$, $z = c$ 为方程$x^2 + y^2 = z^2$ 的一组基本解,且假定$a$是偶数,则存在正整数$m$和$n$, $m > n$, $(m,n) = 1$,且 $m \not\equiv n \pmod 2$,使得

$$\begin{cases} a = 2mn, \\ b = m^2 - n^2, \\ c = m^2 + n^2. \end{cases}$$

(4) 若 $a = 2mn$, $b = m^2 - n^2$, $c = m^2 + n^2$,则 $a,b,c$ 是 $x^2 + y^2 = z^2$ 的一组解,如果还有 $m > n > 0$, $(m,n) = 1$ 和 $m \not\equiv n \pmod 2$,则 $a,b,c$ 就是方程的一组基本解.

3. 佩尔方程

(1) 方程 $x^2 - dy^2 = 1$($d$ 为给定的正整数)叫佩尔方程.

(2) 无论 $d$ 取什么值,$x = \pm 1, y = 0$ 是佩尔方程的解,这组解称为佩尔方程的平凡解.

(3) 设 $d > 0$ 是一个非平方数,则佩尔方程

$$x^2 - dy^2 = 1$$

有无穷多个不同的整数解.

(4) 设 $n > 0$, $(x_1, y_1)$ 是佩尔方程

$$x^2 - dy^2 = 1$$

的一个解,又设 $x_n$ 与 $y_n$ 由下式定义

$$(x_1 - \sqrt{d}y_1)^n = x_n + \sqrt{d}y_n,$$

则 $(x_n, y_n)$ 是 $x^2 - dy^2 = 1$ 的一个解.

**十三. 整点**

在平面直角坐标系中,横、纵坐标均为整数的点叫做整点,整点也叫格点.类似地可定义空间直角坐标系中的整点.

1. 整点多边形的面积公式:顶点都在整点上的简单多边形(即不自交的多边形),其面积为 $S$,多边形内的整点数为 $N$,多边形边上的整点数为 $L$,则

$$S = N + \frac{L}{2} - 1.$$

2. 正方形内的整点:

(1) 各边均平行于坐标轴的正方形,如果内部不含整点,它的面积最大是 1.

(2) 内部不含整点的正方形面积,最大是 2.

(3) 内部只含一个整点的最大正方形面积是 4.

3. 圆内整点问题:设 $A(r)$ 表示区域 $x^2 + y^2 \leqslant r^2$ 上的整点数,$r$ 是

正实数,则

$$A(r)=1+4[r]+4\sum_{1\leqslant s\leqslant r}[\sqrt{r^2-s^2}]$$

或 $$A(r)=1+4[r]+8\sum_{1\leqslant s\leqslant\sqrt{2}r}[\sqrt{r^2-s^2}]-4\left[\frac{r}{\sqrt{2}}\right]^2.$$

其中$[x]$表示不超过 $x$ 的最大整数.此外,当 $r$ 充分大时,区域 $x^2+y^2\leqslant r^2$ 上的格点数 $A(r)$ 接近于 $\pi r$.

4.不存在整点正三角形.

5.当 $n\geqslant 5$ 时,不存在整点正 $n$ 边形.

**十四.函数$[x]$**

1.定义:设 $x\in R$,则$[x]$为不大于 $x$ 的最大整数.

2.函数$[x]$的性质:

(1)$y=[x]$的定义域为实数集 $R$,值域为整数集 $Z$.

(2)$x=[x]+r,\quad 0\leqslant r<1$.

(3)$x-1<[x]\leqslant x<[x]+1$.

(4)$y=[x]$是广义增函数.即当 $x_1\leqslant x_2$ 时,$[x_1]\leqslant[x_2]$成立.

(5) 设 $n\in Z$,则$[n+x]=n+[x]$.

(6)$\left[\sum_{i=1}^{n}x_i\right]\geqslant\sum_{i=1}^{n}[x_i]$.

(7) 对正实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 有

$$\left[\prod_{i=1}^{n}x_i\right]\geqslant\prod_{i=1}^{n}[x_i].$$

特别地,对正数 $x$ 及正整数 $n$ 有

$$[x^n]\geqslant[x]^n,$$
$$[x]\geqslant[\sqrt[n]{x}]^n.$$

(8) 对正实数 $x,y$ 有

$$\left[\frac{y}{x}\right]\leqslant\frac{[y]}{[x]}.$$

(9) 设 $n$ 为正整数,则

$$\left[\frac{x}{n}\right]=\left[\frac{[x]}{n}\right].$$

(10) 对整数 $x$,$[-x]=-[x]$,

对非整数 $x$,$[-x]=-[x]-1$.

(11) 对正整数 $m$ 和 $n$,不大于 $m$ 的 $n$ 的倍数共有 $\left[\frac{m}{n}\right]$ 个.

(12) 函数 $\{x\}$ : $\{x\}$ 定义为实数 $x$ 的正的纯小数部分.即

$$\{x\} = x - [x].$$

$y = \{x\}$ 还有如下一些性质.

$\{x\} \in [0,1)$.

$\{x\}$ 是以 1 为最小正周期的周期函数.

$\{n + x\} = \{x\}$,($n$ 为整数).

# 索引

本索引列出本卷所收集的全部数学竞赛试题的竞赛名称，竞赛时间，括号内的第一个数为所赛试题在本卷中章的序号，第二个数为该题在本章题的序号．例如国际数学奥林匹克，1992年(12·17)表示本卷收集的1992年举行的国际中学生数学奥林匹克试题为本卷第12章第17题．

1978 年 (10·82)
1979 年 (3·34)
1981 年 (5·29, 12·111)
1982 年 (12·131)
1983 年 (6·37, 11·23)
1984 年 (2·26, 7·44)
1985 年 (6·30)
1986 年 (8·9)
1987 年 (3·45, 8·21)
1988 年 (11·19, 12·113)
1989 年 (3·65)
1990 年 (6·51)
1991 年 (6·49)
1992 年 (1·83, 12·17)
1993 年 (1·84)
1994 年 (6·66, 11·43)
1995 年 (15·40)

1996 年 (2·78, 6·65, 12.154)
1997 年 (12·152)
1998 年 (1·88)
1999 年 (6·71).

**国际数学奥林匹克候选题、预选题**

1979 年 (3·71, 3·72, 12·141)
1983 年 (4·52)
1984 年 (10·81)
1985 年 (3·36, 4·7, 5·6, 6·43, 7·32, 11·22, 11·38, 12·7, 12·78, 12·109, 12·134, 13·13, 13·36, 14·51, 14·58, 14·68, 15·23)
1986 年 (12·51)
1987 年 (2·49, 4·14, 5·12, 6·21, 11·34, 12·81, 12·106, 14

1988 年（1·62，4·12，8·12）.



**英国数学奥林匹克**

1965 年（7·72）
1972 年（12·137）
1981 年（1·87）
1982 年（11·40）
1985 年（8·17，11·20，12·128）
1991 年（6·25，8·1，8·55）
1994 年（8·68，10·115）.

**保加利亚数学奥林匹克**

1981 年（3·69）
1982 年（12·138）
1983 年（3·70）
1985 年（1·10）
1994 年（5·36，12·148）.

**加拿大数学奥林匹克**

1969 年（8·11）
1970 年（1·61，10·28）
1971 年（3·27，7·22，10·31）
1972 年（6·24，11·32，12·33）
1975 年（14·18，14·45）
1977 年（7·63，8·14，11·30）
1978 年（12·36）
1980 年（9·17）
1981 年（14·9）
1983 年（3·39，12·42）
1984 年（4·37，9·26）
1985 年（10·30，14·63）
1986 年（2·66，6·23）

**加拿大为参加国际数学奥林匹克准备的训练题**



**中国中学生数学冬令营**



**中国中学生数学冬令营选拔考试**

## 中国高中数学联合竞赛

1978 年（7·45，12·119）

1979 年（1·80）

1981 年（1·22）

1982 年（13·21）

1984 年（10·70）

1985 年（2·10）

1987 年（10·69，13·23）

1988 年（7·57）

1989 年（7·30）

1990 年（7·31，13·10）

1992 年（13·18）

1993 年（14·71）

1995 年（12·144）

1999 年（11·45）.

## 中国初中数学联合竞赛

1985 年（12·62）

1986 年（1·13，8·45）

1987 年（2·34，2·51，10·16，14·11）

1988 年（1·12，3·33）

1989 年（9·13）

1990 年（10·77，12·18，14·23）

1991 年（7·8）

1993 年（12·21）

1999 年（12·143）.

## 中国国家集训队训练题

1990 年（4·34，5·20，5·28，6·53，10·53，10·64，11·35，12·50，14·47，14·65）.

**中国国家集训队测验题**



**中国国家集训队选拔考试**



**中国北京市数学竞赛**

1987 年（1·7，1·21，9·23）
1988 年（3·23，6·19，12·20，12·35）
1990 年（7·41，7·50，11·29）
1991 年（4·24，8·35，10·9，12·37，12·60，14·30）
1992 年（3·67，8·16，8·34）.

**中国天津市数学竞赛**

1979 年（3·48）
1991 年（5·2）.

**中国河北省数学竞赛**

1979 年（1·59）
1993 年（9·24）.

**中国黑龙江省数学竞赛**

1979 年（10·23）.

**中国东北三省数学竞赛**

1986 年（14·34）
1987 年（2·12，12·46，12·88）.

**中国上海市数学竞赛**

1956 年（7·20）
1957 年（9·21）
1958 年（10·2）
1963 年（1·63，12·4）
1979 年（4·33）
1984 年（4·8）
1986 年（5·5）
1988 年（4·30，9·4，10·42）
1990 年（10·66，12·66）
1994 年（5·39）

1992 年（7·40，15·28）.



**中国江西省数学竞赛**

1979 年（8·33）.

**中国江西省南昌市数学竞赛**

1991 年（11·24）.

**中国山东省数学竞赛**

1979 年（10·10）.

**中国湖北省武汉市数学夏令营**

1987 年（1·28，10·3）.

**中国广西壮族自治区数学竞赛**

1979 年（9·19）.

**中国四川省数学竞赛**

1979 年（13·9）

1988 年（4·31）

1990 年（14·16）

1992 年（14·10）.

**中国陕西省数学竞赛**

1979 年（10·13）.

**中国甘肃省数学竞赛**

1979 年（13·4）.

**中国青海省西宁市数学竞赛**

1983 年（1·50）.

1955 年 (8·40)
1956 年 (1·53, 10·21)
1957 年 (2·54)
1958 年 (2·62, 7·19)
1960 年 (15·29)
1961 年 (11·36)
1962 年 (2·29, 6·11)
1963 年 (3·30)
1964 年 (3·2, 6·10, 8·56)
1965 年 (12·15)
1967 年 (1·55)
1969 年 (3·41)
1970 年 (12·76, 15·34)
1972 年 (10·56, 11·7)
1991 年 (15·16).

**罗马尼亚数学奥林匹克**

1978 年 (6·63, 8·48)
1994 年 (7·75).

**新加坡数学奥林匹克**

1985 年 (5·31, 6·5)
1987 年 (3·22).

**西班牙数学奥林匹克**

1992 年 (8·47).

**瑞典数学奥林匹克**

1982 年 (1·23, 14·17)
1983 年 (7·21).

**全苏数学奥林匹克**

**全俄数学奥林匹克**

**莫斯科数学奥林匹克**

**列宁格勒（圣彼得堡）数学奥林匹克**

1980 年（2·16，3·5，8·30，10·58）

1984 年（10·108）

1987 年（1·15，10·17）

1988 年（1·6，1·9，2·68，7·3，7·10，15·12）

1989 年（1·86，2·45，4·51，7·15，7·64，10·111）

1990 年（6·58）

1991 年（3·57，15·24）

1992 年（14·62）

1993 年（2·73）.

**全苏数学冬令营**

1991 年（2·23，12·103）.

**前苏联教委推荐的数学竞赛试题**

1988 年（4·27）

1989 年（3·28）

1990 年（1·49，8·24，12·5，12·70）

1991 年（12·41，　14·12）.

**前苏联大学生数学奥林匹克**

1975 年（6·38）

1976 年（1·58，12·135）

1977 年（2·65，15·6）.

**乌克兰数学奥林匹克**

1992 年（1·54，2·27，3·7，7·43，13·5）.

**基辅数学奥林匹克**

1935 年（1·1）

1936 年（6·3）

1939 年（6·2）

## 美国数学邀请赛

1983 年（3·3，12·31）
1984 年（3·66，9·5）
1985 年（3·13，5·9，14·46）
1986 年（1·25，4·29，10·8，11·21）
1987 年（1·26，1·27，4·40，5·21，12·38，15·3）
1988 年（1·32，10·73）
1989 年（1·35，10·34，10·80）
1990 年（4·9，10·85，15·4）
1991 年（1·48，12·57，14·39）
1992 年（14·54，15·2，15·14，15·18）
1993 年（2·24，12·63，12·65）
1994 年（4·53，14·74）
1999 年（1·97，8·69，10·120）.

## 美国数学奥林匹克

1972 年（5·19）
1973 年（2·60，3·29）
1975 年（14·5）
1976 年（12·84）
1977 年（1·79）
1978 年（15·19）
1979 年（12·16）
1981 年（14·6）
1982 年（6·59）
1983 年（15·35）
1984 年（4·49）
1985 年（12·130）
1986 年（3·49，12·58，15·20）
1987 年（12·68）
1988 年（1·39）

## 美国纽约数学奥林匹克



## 美国普特南数学竞赛

1969 年（4·22）
1970 年（8·57）
1971 年（4·17，13·2，13·19）
1972 年（6·52）
1973 年（3·24，14·60）
1974 年（7·59）
1975 年（6·57）
1976 年（4·19，12·96）
1977 年（2·52）
1978 年（12·24）
1979 年（13·20）
1980 年（5·22）
1981 年（3·40）
1983 年（8·63）
1986 年（14·35）
1989 年（3·12）
1990 年（15·15）
1991 年（2·55，8·28）
1992 年（11·41，12·153）.

**前南斯拉夫数学奥林匹克**

1973 年（8·65）
1975 年（12·139）
1983 年（10·112）
1988 年（2·1）.

**友谊杯国际数学奥林匹克**

1988 年（8·10）
1992 年（1·30，1·31，12·129）.

**亚洲太平洋地区数学奥林匹克**

1989 年（12·100）

1991 年 (2·58)
1992 年 (3·47)
1993 年 (13·37, 14·38).

**巴尔干地区数学奥林匹克**

1989 年 (3·17, 4·32)
1990 年 (1·34)
1999 年 (6·70).

**拉丁美洲地区数学奥林匹克**

1991 年 (9·14, 6·60).

# 历届国际数学奥林匹克概况

| 届次 | 时间 | 举办国家（或地区） | 总分第一 | 总分第二 | 总分第三 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1959 年 | 罗马尼亚 | 罗马尼亚 249 分 | 匈牙利 233 分 | 前捷克斯洛伐克 192 分 |
| 2 | 1960 年 | 罗马尼亚 | 前捷克斯洛伐克 257 分 | 匈牙利 248 分 | 罗马尼亚 248 分 |
| 3 | 1961 年 | 匈牙利 | 匈牙利 270 分 | 波　兰 203 分 | 罗马尼亚 197 分 |
| 4 | 1962 年 | 前捷克斯洛伐克 | 匈牙利 289 分 | 前苏联 263 分 | 罗马尼亚 257 分 |
| 5 | 1963 年 | 波　兰 | 前苏联 271 分 | 匈牙利 234 分 | 罗马尼亚 191 分 |
| 6 | 1964 年 | 前苏联 | 前苏联 269 分 | 匈牙利 253 分 | 罗马尼亚 213 分 |
| 7 | 1965 年 | 前民主德国 | 前苏联 281 分 | 匈牙利 244 分 | 罗马尼亚 222 分 |
| 8 | 1966 年 | 保加利亚 | 前苏联 293 分 | 匈牙利 281 分 | 前民主德国 280 分 |
| 9 | 1967 年 | 前南斯拉夫 | 前苏联 275 分 | 前民主德国 257 分 | 匈牙利 251 分 |
| 10 | 1968 年 | 前苏联 | 前民主德国 304 分 | 前苏联 298 分 | 匈牙利 291 分 |
| 11 | 1969 年 | 罗马尼亚 | 匈牙利 247 分 | 前民主德国 240 分 | 前苏联 231 分 |
| 12 | 1970 年 | 匈牙利 | 匈牙利 233 分 | 前苏联前民主德国 221 分 | |
| 13 | 1971 年 | 前捷克斯洛伐克 | 匈牙利 255 分 | 前苏联 205 分 | 前民主德国 142 分 |
| 14 | 1972 年 | 波　兰 | 前苏联 270 分 | 匈牙利 263 分 | 前民主德国 239 分 |
| 15 | 1973 年 | 前苏联 | 前苏联 254 分 | 匈牙利 215 分 | 前民主德国 188 分 |
| 16 | 1974 年 | 前民主德国 | 前苏联 256 分 | 美　国 243 分 | 匈牙利 237 分 |
| 17 | 1975 年 | 保加利亚 | 匈牙利 258 分 | 前民主德国 249 分 | 美　国 247 分 |
| 18 | 1976 年 | 奥地利 | 前苏联 250 分 | 英　国 214 分 | 美　国 188 分 |
| 19 | 1977 年 | 前南斯拉夫 | 美　国 202 分 | 前苏联 192 分 | 匈牙利 英　国 190 分 |
| 20 | 1978 年 | 罗马尼亚 | 罗马尼亚 237 分 | 美　国 225 分 | 英　国 201 分 |
| 21 | 1979 年 | 英　国 | 前苏联 267 分 | 罗马尼亚 240 分 | 前联邦德国 235 分 |

| 届次 | 时间 | 举办国家（或地区） | 总分第一 | 总分第二 | 总分第三 |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 22 | 1981年 | 美　国 | 美　国 314分 | 前联邦德国 312分 | 英　国 301分 |
| 23 | 1982年 | 匈牙利 | 前联邦德国 145分 | 前苏联 137分 | 前民主德国美国 136分 |
| 24 | 1983年 | 法　国 | 前联邦德国 212分 | 美　国 171分 | 匈牙利 170分 |
| 25 | 1984年 | 前捷克斯洛伐克 | 前苏联 235分 | 保加利亚 203分 | 罗马尼亚 199分 |
| 26 | 1985年 | 芬　兰 | 罗马尼亚 201分 | 美　国 180分 | 匈牙利 168分 |
| 27 | 1986年 | 波　兰 | 前苏联　美国 203分 | | 前联邦德国 196分 |
| 28 | 1987年 | 古　巴 | 罗马尼亚 250分 | 前联邦德国 248分 | 前苏联 235分 |
| 29 | 1988年 | 澳大利亚 | 前苏联 217分 | 中国　罗马尼亚 201分 | |
| 30 | 1989年 | 前联邦德国 | 中　国 237分 | 罗马尼亚 223分 | 前苏联 217分 |
| 31 | 1990年 | 中　国 | 中　国 230分 | 前苏联 193分 | 美　国 174分 |
| 32 | 1991年 | 瑞　典 | 前苏联 241分 | 中　国 231分 | 罗马尼亚 225分 |
| 33 | 1992年 | 俄罗斯 | 中　国 240分 | 美　国 181分 | 罗马尼亚 177分 |
| 34 | 1993年 | 土耳其 | 中　国 215分 | 德　国 189分 | 保加利亚 178分 |
| 35 | 1994年 | 加拿大 | 美　国 252分 | 中　国 229分 | 俄罗斯 224分 |
| 36 | 1995年 | 中国香港 | 中　国 236分 | 罗马尼亚 230分 | 俄罗斯 227分 |
| 37 | 1996年 | 印　度 | 罗马尼亚 | 美　国 | 匈牙利 |
| 38 | 1997年 | 阿根廷 | 中　国 223分 | 匈牙利 219分 | 伊　朗 217分 |
| 39 | 1998年 | 中国台北 | 伊　朗 | 保加利亚 | 匈牙利 美国 |
| 40 | 1999年 | 罗马尼亚 | 中国 俄罗斯 182分 | | 越　南 177分 |
| 41 | 2000年 | 韩国 | 中国 218分 | 俄罗斯 215分 | 美　国 184分 |
| 42 | 2001年 | 美国 | 中国 225分 | 俄罗斯　美国 196分 | |

注：第39届IMO中国未参加．

# 编者的话



当今的世界，数学已成为广泛渗透到各种自然科学、社会科学，并发挥着重大作用的一门基础和应用学科.从教育要面向世界，面向未来，面向现代化这一高度来看，让青少年从小就打下扎实的数学基础，这对我国今后的发展是极为重要的.国际上为推动数学的发展而进行的数学奥林匹克活动，现在已成为一种培养和选拔数学人才的特殊事业.

目前，数学奥林匹克在我国正方兴未艾，数学竞赛遍及五湖四海，尤其是我国中学生选手在国际数学奥林匹克大赛中屡夺金牌，成绩显赫，捷报频传，令世人瞩目，为祖国赢得了骄傲和荣誉.这些，充分显示了我国的数学水平和中华民族的聪明才智.为此，许多数学奥林匹克教练员，许多大、中学的教师，许多学生及其家长都渴望在自己的案头有一部能够指导数学奥林匹克解题的工具书.希望这部书能够广泛收集国内外数学奥林匹克试题的精品，包揽数学奥林匹克的精髓，以开阔自己的眼界，提高数学能力，品鉴数学的魅力，也希望这部书能够提供这些试题的更精确、更简捷的解法，以开拓思路，提高技巧.为适应各界的这种渴求，这部《世界数学奥林匹克解题大辞典》终于问世了.

这部大辞典的出版，是中国数学奥林匹克委员会、南开大学数学系和河北少年儿童出版社通力合作的产物；是中国

数学奥林匹克专家和教练员辛勤劳动的结晶;也是老一代数学家关心和支持的结果.我们不能不非常高兴地告诉大家,这部辞典在编辑过程中始终得到数学前辈陈省身先生,吴大任先生的关心和指导;中国数学会名誉理事长王元先生专为本辞典作序.可以这样说,如果没有作为数学泰斗的老一代数学家的关怀与支持,没有一批才华横溢的中青年数学家的艰苦努力,没有极具胆识的出版工作者的辛勤劳动,艰难而浩大的世纪工程——《世界数学奥林匹克解题大辞典》是难以如此顺利出版的.

这部大辞典精选了国内外数学竞赛的有代表性的试题,其中大部分是已经赛过并经过锤炼的试题,还有少部分竞赛的备选题和训练题.本辞典共分五卷,其中有四卷是按奥林匹克数学一般的分类方法而分为《代数卷》、《几何卷》、《数论卷》、《组合卷》;为了普及奥林匹克数学,完善辞典中题目类型,还编辑出版了《选择题卷》.

《世界数学奥林匹克解题大辞典》五卷共约500万字.《代数卷》、《数论卷》和《选择题卷》是按知识内容分章的;《组合卷》是按题目的内容分章的;《几何卷》则是按题目的结论分章的.每一卷的正文包括试题,试题的出处及解答三部分,试题的多种解法,则由解1,解2或证1,证2等给出.正文后有附录,附本卷常用的有关数学知识提要;还有本卷的索引,索引是按书中涉及到的参赛地区、国家和竞赛名称,按英文字母的顺序排列的.

《世界数学奥林匹克解题大辞典》的出版,无疑对我国数学奥林匹克事业的发展,对我国跨世纪科技人才的培养、造就和选拔有重要的促进作用,并为之摇橹扬帆、推波助澜!

愿数学奥林匹克之花香飘四海,

盼新一代科学精英普降神州!

本书的出版仅仅是一个尝试,殷切希望广大读者帮助我

们完善它.我们相信,经过不断地去粗取精,去伪存真,去旧增新,伴随着我国数学水平的不断提高,这部大辞典必将成为数学奥林匹克的经典之作.

# 世界数学奥林匹克解题大辞典

数论卷

中国数学奥林匹克委员会
南开大学数学系



# 世界数学奥林匹克解题大辞典

选择题卷

